

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXXIV

1937 (XV)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI




ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGrafo DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1937 (XV)



Digitized by the Internet Archive
in 2023

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI
pervenute all'Accademia durante le ferie del 1937 (Anno XV).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Matematica. — *Sulle funzioni di una variabile in una delle quattro algebre complesse commutative del 3° ordine.* Nota ⁽¹⁾ di N. SPAMPINATO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

In questa Nota enuncio alcuni teoremi che saranno dimostrati in una mia Memoria che sarà pubblicata altrove.

Com'è noto, esistono cinque algebre complesse del 3° ordine, dotate di modulo ⁽²⁾. Tra queste, *quattro sono commutative*, due riducibili e due irriducibili ⁽³⁾.

a) Delle due riducibili una è somma diretta di tre algebre del 1° ordine equivalenti all'ordinaria algebra dei numeri complessi. Gli elementi di questa algebra si diranno *numeri tricomplessi* [in ordine ad una definizione generale già introdotta ⁽⁴⁾]. L'altra è somma diretta di due algebre: una equivalente all'ordinaria algebra dei numeri complessi, e l'altra equivalente all'algebra dei numeri biduali. Gli elementi di questa seconda algebra riducibile si diranno *numeri complesso-biduali*.

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1937.

(2) Ved. per es., E. STUDY, *Ueber Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen*. « Monatshefte für Mathematik und Physik », I, Jahrgang, 1890; C. CARBONARO, *Sulle algebre complesse dotate di modulo*. « R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli », ser. 4ª, vol. III, 1933.

(3) Per i richiami alla teoria generale delle algebre, vedasi il trattato del mio maestro prof. G. SCORZA, *Corpi numerici ed algebre*. Principato, Messina, 1921.

(4) N. SPAMPINATO, *Sulle varietà iperalgebriche del Segre nell'S_r complesso o biduale*. « R. Accademia delle Scienze di Torino », to. 68, 1935-36.

b) Delle due irriducibili, una è quella formata dai *numeri triduali* [in ordine ad un'altra definizione generale già introdotta ⁽¹⁾] e l'altra è l'algebra complessa potenziale i cui elementi si diranno *numeri tripotenziali* ⁽²⁾.

Come per i numeri bicompleksi e biduali, così per i numeri tricompleksi, complesso-biduali, triduali e tripotenziali faremo vedere che una serie di potenze

$$(1) \quad f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m (x - x_1)^m$$

nel suo *campo circolare di convergenza* ⁽³⁾ (campo il cui tipo viene determinato per ognuna delle quattro algebre) rappresenta una funzione *totalmente derivabile*, ovvero a derivata caratteristica unica ⁽⁴⁾. Questa circostanza invece non si verifica per la quinta algebra non commutativa.

(1) C. CARBONARO, *Le varietà caratteristiche dell' S_{2n} immagini delle funzioni, di variabile n -duale, totalmente derivabili*. « Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università degli Studi, di Roma », ser. IV, vol. I, fasc. 4, aprile 1937.

(2) In una Nota ai Lincei: *Sulle algebre potenziali reali o complesse*. « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXI, ser. 6^a, 1935, ho dimostrato che ogni algebra complessa potenziale, dotata di modulo, irriducibile, di ordine n , è equivalente all'algebra avente la tabella di moltiplicazione:

	u_1	u_2	u_3	\dots	u_{n-2}	u_{n-1}	u_n
u_1	u_1	u_2	u_3	\dots	u_{n-2}	u_{n-1}	u_n
u_2	u_2	u_3	u_4	\dots	u_{n-1}	u_n	0
u_3	u_3	u_4	u_5	\dots	u_n	0	0
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
u_{n-2}	u_{n-2}	u_{n-1}	u_n	\dots	0	0	0
u_{n-1}	u_{n-1}	u_n	0	\dots	0	0	0
u_n	u_n	0	0	\dots	0	0	0

Gli elementi di quest'algebra si diranno *numeri n -potenziali*. Per $n = 2$ si hanno i numeri bipotenziali, questi coincidono con i numeri biduali. Per $n = 3$ si hanno i numeri tripotenziali, che non coincidono con i numeri triduali.

(3) N. SPAMPINATO, a) *Sulle funzioni di una variabile in un'algebra complessa ad n unità, dotata di modulo*. « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. LVIII, 1933, § 3, a); b) *Sulle funzioni di variabile bicomplessa o biduale. Scritti Matematici offerti a Luigi Berzolari*. Pavia, Rossetti, 1936.

(4) N. SPAMPINATO, *Sulle funzioni di una variabile in un'algebra complessa ad n unità, dotata di modulo*. « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », Memoria III, § 10, n. 1, to. LIX, 1935.

Fra le quattro algebre commutative, le due irriducibili si differenziano, poi, dalle due riducibili, perchè per esse vale il *teorema fondamentale dell'algebra*: *Un'equazione algebrica di grado n ammette, nel caso generico, n radici distinte.*

Così l'algebra irriducibile dei numeri biduali si differenzia da quella dei numeri bicomplessi (queste due algebre sono entrambe commutative e sono le sole algebre complesse del 2° ordine dotate di modulo), perchè in essa vale il teorema fondamentale suddetto.

Invece, un'equazione algebrica di grado n , nel caso generale, ammette:

a) n^2 radici distinte nell'algebra dei numeri bicomplessi o complesso-biduali (cioè in un'algebra somma diretta di due algebre irriducibili);

b) n^3 radici distinte nell'algebra dei numeri tricomplessi (che è somma diretta di tre algebre irriducibili).

Quanto sopra fa prevedere, come ho potuto osservare anche in altri casi, il seguente teorema:

Un'equazione algebrica di grado n , in un'algebra complessa commutativa, ammette, nel caso generico, n radici distinte, se l'algebra è irriducibile; n^s radici distinte se l'algebra è somma diretta di s algebre irriducibili.

Se scriviamo le tabelle di moltiplicazione delle quattro algebre in questione in modo che nelle rappresentazioni complesse nell' S_3 complesso i divisori dello zero siano rappresentati:

a) nei tre piani coordinati, per l'algebra dei numeri tricomplessi;

b) in due piani coordinati, per l'algebra dei numeri complesso-biduali;

c) in un piano coordinato, per le due algebre commutative irriducibili, avremo, nell' S_6 reale rappresentativo, tre, due o un S_4 caratteristici coordinati rappresentanti i divisori dello zero. Gli S_4 caratteristici paralleli a questi si diranno *divisori dello zero*, in analogia ad una definizione già introdotta per i piani caratteristici ⁽¹⁾.

Ebbene, per le quattro algebre commutative vale il seguente teorema [estensione di un teorema già dimostrato, sotto altra forma, per le funzioni totalmente derivabili, nell'algebra dei numeri bicomplessi, biduali ed n -duali ⁽¹⁾]:

Assegnato nell' S_6 reale rappresentativo un arco di linea l regolare ed una arbitraria funzione in una delle quattro algebre commutative del 3° ordine dotate di modulo, se l'arco l non appartiene ad un S_4 caratteristico divisore dello zero, esiste una ed una sola funzione totalmente derivabile, definita in un campo 6-dimensionale contenente l , che assume lungo l i valori della funzione assegnata.

(1) B. SEGRE, *Questioni geometriche legate alla teoria delle funzioni di due variabili complesse*. « Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma », vol. VII, parte II, 1930-31; G. SCORZA DRAGONI, *Sulle funzioni olomorfe di una variabile bicomplessa*. « Reale Accademia d'Italia », Memorie Classe Scienze, vol. V; N. SPAMPINATO, *Sulla rappresentazione delle funzioni di variabile bicomplessa totalmente derivabili*. « Annali di Matematica », ser. IV, to. XIV, 1935-36; C. CARBONARO, *Sulle funzioni totalmente derivabili di una variabile biduale*. « R. Accademia dei Lincei », vol. XXIII, ser. 6ª, fasc. 11 e loc. cit. in (5) a p. 1.

Fra le quattro algebre commutative le due irriducibili si differenziano dalle due riducibili anche per un'altra circostanza che qua vogliamo mettere in evidenza in relazione all'introduzione degli elementi all'infinito.

Gli elementi all'infinito nelle quattro algebre commutative considerate si possono introdurre con due metodi:

a) il metodo che ricorda il punto di vista del Severi, per l'introduzione dell'infinito nel campo di due o più variabili complesse ⁽¹⁾;

b) il metodo della funzione inversa.

L'introduzione dell'infinito col primo metodo si applica con maggior vantaggio per lo studio delle funzioni *semplicemente oloforme*, in corrispondenza alla derivazione caratteristica.

L'introduzione dell'infinito col secondo metodo offre maggior vantaggio per lo studio delle funzioni *totalmente oloforme*, in corrispondenza alla *derivazione totale*, o derivazione caratteristica unica.

L'algebra ampliata con gli elementi infiniti introdotti col metodo a) si rappresenta, in ogni caso, nell' S_3 complesso proiettivo, corrispondendo i punti impropri agli elementi infiniti. Invece, l'algebra ampliata con gli elementi infiniti introdotti col metodo della funzione inversa, ha una rappresentazione che varia da algebra ad algebra, però gode delle due seguenti proprietà ⁽²⁾, che non si verificano nell'algebra ampliata col metodo a):

A) *La funzione inversa vi determina una trasformazione biunivoca senza eccezioni.*

B) *Non esistono altri infiniti oltre quelli da assumere come inversi dello zero e dei divisori dello zero.*

Ora abbiamo già osservato ⁽³⁾, nel caso delle due algebre complesse del 2° ordine dotate di modulo, che quella irriducibile (dei numeri biduali), ampliata col metodo della funzione inversa, coincide con l' S_1 biduale proiettivo, mentre per quella riducibile non si verifica detta proprietà. Ebbene, anche per le quattro algebre commutative del 3° ordine dotate di modulo si verifica che le due irriducibili (numeri triduali e tripotenziali), ampliate col metodo della funzione inversa, coincidono con i corrispondenti S_1 proiettivi legati a dette algebre, mentre questa circostanza non si verifica per le due algebre riducibili (numeri tricomplessi e complesso-biduali).

Per le nostre quattro algebre, introdotti i concetti di *prolungamento analitico* e di *funzione analitica e totalmente analitica*, nei riguardi della distribuzione dei punti singolari di una funzione totalmente analitica si dimostra che:

(1) F. SEVERI, *Risultati, vedute e problemi della teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse*. «Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma», 1930-31, ser. II, vol. VII.

(2) Loc. cit. in (1) a p. 2, b), n. 5, Nota.

(3) Loc. cit. in (1) a p. 2, n. 7, IV) e V).

Se x_0 è un punto dell' S_6 reale rappresentativo, singolare per una funzione $f(x)$ totalmente analitica della variabile x tricomplessa, o complessa-biduale, o triduale, o tripotenziale, esiste un S_4 caratteristico divisore dello zero, contenente x_0 , i cui punti sono tutti singolari per $f(x)$.

Anche qua si può introdurre il concetto di S_4 caratteristici divisori dello zero, *singolari isolati*. I punti di un tale S_4 si diranno *sem'isolati* per la funzione.

Nell'intorno 6-dimensionale di un punto x_0 non singolare, si ha uno sviluppo in serie:

$$\sum_0^{\infty} \alpha_m (x - x_0)^m.$$

Nell'intorno 6-dimensionale di un punto x_0 sem'isolato si ha uno sviluppo in serie:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_m (x - x_0)^m.$$

Astronomia (Astrofisica). — *Gli elementi orbitali di ν Octantis* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di A. COLACEVICH, presentata dal Corrisp. G. ABETTI.

La stella ν Octantis è doppia spettroscopica. Ho calcolato ⁽³⁾ per questa stella gli elementi spettroscopici in base alle osservazioni esistenti. Tali elementi sono:

$$P = 1037 \text{ giorni} = 2.839 \text{ anni};$$

$$T = 2417506 \text{ G. G.} = 1906.^a 806;$$

$$e = 0.25;$$

$$\omega = 90^\circ;$$

$$K_1 = 8.0 \text{ km/sec};$$

$$V_0 = + 34.7 \text{ km/sec};$$

$$\frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = 0.050 \odot;$$

$$a_1 \sin i = 110\,400\,000 \text{ km.} = 0.74 \text{ U. A.}$$

(1) Lavoro eseguito al R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1937.

(3) « Publ. Astron. Society Pacific », 46, p. 87.

I simboli sono quelli solitamente usati per questi sistemi. Conviene fin d'ora fissare la precisione con la quale è determinato $a_1 \sin i$. Questo valore è dato, come si sa, da $a_1 \sin i = \cos t (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} K_1 P$. Dato che e è piccolo, un eventuale errore nel suo valore non ha influenza; anche P si può considerare noto con precisione in confronto a K_1 . Si vede subito che un errore $\pm \Delta K_1$ produce su $a_1 \sin i$ un errore di $\pm a_1 \sin i \Delta K_1 / K_1$. L'errore probabile di una determinazione di velocità radiale per questa stella è di ± 0.85 km/sec. Prendendo questa quantità come errore probabile anche di K_1 , avremo $\Delta K_1 / K_1 = \pm 0.106$ e perciò

$$a_1 \sin i = (0.74 \pm 0.08) \text{ U. A.}$$

Pubblicando questi elementi avevo già rilevato l'interesse particolare di questo sistema avente parallasse piuttosto notevole. Difatti la parallasse trigonometrica π della stessa è, secondo quanto è pubblicato nel vol. 8 delle *Yale Transactions*, pari a $+0.''068 \pm 0.''011$. Notiamo subito che l'errore probabile della parallasse è maggiore degli analoghi valori medi per altre stelle, valori medi che si aggirano intorno a $\pm 0.''007$.

Il valore di $a_1 \sin i$, espresso in secondi d'arco, sarà allora di $0.74 \times 0.''068 = 0.''050$. Sotto quest'angolo cioè si vedrebbe una lunghezza pari ad $a_1 \sin i$ posta normale alla visuale, alla distanza di ν *Octantis*. Comunque sia orientato nello spazio il piano orbitale, e comunque sia orientata su questo piano l'ellisse percorsa dalla stella attorno al baricentro del sistema, la separazione angolare massima della stella dal baricentro non potrà essere inferiore a $b_1 = a_1 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$. In questo caso si ha l'accentricità e uguale a 0.25, perciò $b_1 = 0.937 a_1$. Siccome non si conosce il valore di i , inclinazione del piano orbitale sul piano perpendicolare alla visuale, indicando con Δ la separazione angolare massima si avrà in generale che

$$\Delta \geq 0.74 \times 0.937 \times \pi = 0.69 \pi.$$

Ora la stella ν *Octantis* ha una sola componente visibile sugli spettrogrammi. Si può quindi ammettere che la componente secondaria, invisibile sugli spettrogrammi, non alteri in modo osservabile la posizione del centro di densità dell'immagine che la componente principale produce sulla lastra fotografica presa, come nel caso attuale, allo scopo di determinare la sua parallasse. Perciò la stella deve spostarsi in un'ellisse di ampiezza massima π con un periodo annuale e contemporaneamente in un'ellisse di ampiezza maggiore di 0.69π con un periodo di 2.8 anni. Se la parallasse reale del sistema è vicina al valore dato da Yale, anche il moto orbitale, che risulta allora di ampiezza massima non inferiore a $0.''047$, deve essere misurabile.

Il metodo per derivare gli elementi orbitali di una componente di un sistema doppio visuale, allorchè l'altra componente sia invisibile, venne esposto nella prima metà del secolo scorso da Bessel e da Peters che lo

applicarono al calcolo delle orbite apparenti di Sirio e di Procione. Questo metodo rimane essenzialmente lo stesso quando lo si voglia applicare a misure dedotte da lastre fotografiche. Esso venne adoperato da H. L. Alden in due calcoli del genere per le orbite di β Persei ⁽¹⁾ e di μ Persei ⁽²⁾. Un interessante sistema di questo tipo trovato e calcolato recentemente da B. P. Gerasimovic ⁽³⁾ è quello di α Ursae Minoris.

Le equazioni che servono a risolvere il problema sono del seguente tipo:

$$c + t\mu + P\pi + g \cos E + h \sin E = m$$

$$c' + t\mu' + P'\pi + k \cos E + l \sin E = m'$$

dove: m, m' sono i risultati delle misure di una lastra in ascensione retta e declinazione e sono chiamate le soluzioni della lastra;

c, c' sono costanti da determinarsi e valide per tutto il gruppo di lastre che riguardano una data stella;

t è la differenza di tempo tra l'istante dell'osservazione ed un'epoca prefissata, generalmente intermedia tra l'inizio e la fine delle osservazioni. L'unità di t nel calcolo è di 100 giorni e l'origine in questo caso è il G. G. 2425200;

μ, μ' sono i moti propri per 100 giorni in ascensione retta e in declinazione misurati in parti di millimetro sulla lastra;

P, P' , detti fattori di parallasse, facilmente calcolabili per ogni istante con le coordinate stellari, indicano le quantità della parallasse che si potranno misurare secondo il meridiano e il parallelo;

π è la parallasse da determinarsi;

E è l'anomalia eccentrica della stella nell'istante dato, considerata come componente di un sistema doppio. Nel caso che il sistema sia noto come spettroscopico si può calcolare E dagli elementi spettroscopici; g, h, k, l sono dei coefficienti definiti come segue:

$$g = a_1 (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i)$$

$$h = -a_1 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} (\sin \omega \sin \Omega - \cos \omega \cos \Omega \cos i)$$

$$k = a_1 (\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i)$$

$$l = -a_1 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} (\sin \omega \cos \Omega + \cos \omega \sin \Omega \cos i)$$

dove le lettere hanno il loro significato usuale nei sistemi doppi visuali.

I termini in $\sin E$ e $\cos E$ definiscono l'ellisse apparente riferito al suo centro come origine. Le coordinate del fuoco sono $+eg, +ek$.

(1) «Popular Astronomy», 33, p. 163.

(2) «Astronomical Journal», 36, p. 81.

(3) Poulkovo Circular n. 19.

Tornando al caso di ν Octantis si posseggono i risultati delle misure di 21 lastre misurate nel solo senso delle ascensioni rette. Quindi bisogna applicare il calcolo numerico alla sola equazione

$$(1) \quad c + t\mu_{\alpha} + P\pi + g \cos E + h \sin E = m.$$

Sappiamo in più dagli elementi spettroscopici che $\omega = 90^{\circ}$, perciò avremo

$$(2) \quad \begin{cases} g = a_1 \cos \Omega \cos i \\ h = -a_1 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \sin \Omega. \end{cases}$$

Le 21 osservazioni pubblicate a p. 218 del già citato volume delle *Yale Transactions* coprono in modo abbastanza uniforme un intervallo di tempo di 1078 giorni, cioè l'intero periodo di rivoluzione di questo sistema e perciò si può eseguire un calcolo dei valori approssimati delle costanti g ed h date dalla (2). Il volume di Yale offre alla medesima pagina il valore del coefficiente P , il valore di m , nonchè il peso p di ogni osservazione. Inoltre a p. 211 sono dati i coefficienti delle equazioni normali, limitate naturalmente alle incognite c , μ_{α} e π . Adottando questi valori ho calcolato gli altri coefficienti e le equazioni normali risultano come segue:

$$\begin{array}{rcccccc} 13.1\,c - & 2.17\,\mu_{\alpha} + & 2.32\,\pi + & 2.28\,g - & 2.97\,h = & +\,0.0147\,mm \\ & +\,201.5 & -\,2.33 & -\,11.61 & -\,7.26 & +\,674 \\ & & +\,9.27 & +\,2.75 & -\,0.58 & +\,337 \\ & & & +\,7.69 & -\,1.40 & +\,192 \\ & & & & +\,5.04 & -\,116 \end{array}$$

dove le incognite sono espresse in parti di millimetro sulla lastra fotografica. La soluzione di queste equazioni conduce ai seguenti valori delle incognite:

$$\begin{array}{ll} c = +\,0.00016 & g = +\,0.00191 \\ \mu_{\alpha} = +\,0.00046 & h = -\,0.00068. \\ \pi = +\,0.00311 \end{array}$$

Per convertire questi valori in frazioni di secondo d'arco bisognerà moltiplicarli per un fattore di scala. A p. (6) del volume di Yale è detto che 1 mm. sulla lastra è uguale a 18,"82. Otterremo così, esprimendo μ_{α} il moto annuo:

$$\begin{array}{ll} c = +\,0.00016\,mm & g = +\,0.''036 \pm 0.''013 \\ \mu_{\alpha} = +\,0.''032 & h = -\,0.013 \quad 0.016. \\ \pi = +\,0.059 \pm 0.''011 \end{array}$$

Ho calcolato gli errori probabili solo delle tre quantità che più interessano al caso presente. L'errore probabile di un'osservazione di peso uno risulta:

$$r_0 = \pm 0.''031.$$

Il volume di Yale dà invece le seguenti quantità a pp. 209-211:

$$c = + 0.00056 \text{ mm}$$

$$\mu_\alpha = + 0.''026$$

$$\pi = + 0.068 \pm 0.''011$$

$$r_0 = \pm 0.034.$$

L'introduzione delle due nuove incognite g ed h riduce di poco r_0 ; il valore di π viene pure ridotto. Assumendo i valori trovati di π , g ed h come trovati di sopra, possiamo ricavarne gli elementi a_1 , Ω , i del moto della componente splendente di ν Octantis. Passiamo per primo dalla parallasse relativa $0.''059$ a quella assoluta aggiungendovi $0.''001$ che è la parallasse media delle stelle di confronto sulle quali vennero fatte le misure, avremo perciò $\pi = 0.''060 \pm 0.''011$. Si è visto in principio che $a_1 \sin i = (0.74 \pm 0.08) \pi''$, si avrà perciò il seguente sistema:

$$(3) \quad \begin{cases} g = a_1 \cos \Omega \cos i = + 0.''036 \pm 0.''013 \\ j = a_1 \sin \Omega = + 0.013 & 16 \\ s = a_1 \sin i = + 0.044 & 12 \end{cases}$$

dove si è posto $j = -h : (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$ con $e = 0.25$.

Questo sistema si risolve facilmente e si ottiene:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= (g^2 + j^2 + s^2 + v^2) : 2 = 0.003302 \\ \operatorname{tg}^2 \Omega &= (j^2 - g^2 - s^2 + v^2) : 2 g^2 = 0.05401 \\ \operatorname{tg}^2 i &= (s^2 - g^2 - j^2 + v^2) : 2 g^2 = 1.4174 \\ v^2 &= [(g^2 + j^2 + s^2)^2 - 4 j^2 s^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

da cui tenendo conto dei segni delle equazioni di partenza (3):

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.''058 \pm 0.''018 \\ \Omega &= 13^\circ \pm 16^\circ \\ i &= \pm 50^\circ \pm 16^\circ. \end{aligned}$$

Gli errori probabili vennero desunti dai dati delle equazioni (3). Il segno \pm nell'inclinazione viene dal fatto che nel prodotto $a_1 \sin i$ la funzione trigonometrica è considerata solo nel suo valore assoluto. Il segno

dell'inclinazione può però venir fissato come segue. Dall'equazione (1) si vede che se, come in questo caso, la costante g è positiva vuol dire che al periastro ($E = 0^\circ$) la stella è spostata di una quantità $+g$ rispetto al centro dell'ellisse. Secondo le convenzioni ciò significa uno spostamento verso le ascensioni rette crescenti; basta pensare che ciò vale anche per μ_α . Il valore della costante h negativo indica invece che per $E = -90^\circ$ la stella è spostata verso le ascensioni rette crescenti e per $E = +90^\circ$ verso quelle decrescenti, sempre rispetto al centro dell'ellisse. In questi due istanti la stella si trova alle due estremità opposte dell'asse minore dell'ellisse. Questo asse, avendosi $\omega = 90^\circ$, è parallelo alla linea dei nodi. Perciò l'astro si trova, rispetto al centro dell'ellisse:

per $E = -90^\circ$	in angolo di posizione	13°
$E = 0$		103
$E = +90^\circ$		193 .

Gli angoli di posizione sono in conseguenza crescenti col tempo.

Dalle osservazioni spettroscopiche si vede che al momento del passaggio al periastro la velocità della stella è uguale a quella del baricentro, mentre prima è di allontanamento e dopo di avvicinamento (sempre rispetto al baricentro). Se ne conclude, che il periastro si trova più lontano del piano perpendicolare alla visuale passante per il baricentro. Secondo le convenzioni si avrà quindi un'inclinazione negativa perchè l'astro nella linea dei nodi, in angolo di posizione 13° , si allontana dall'osservatore.

Combinando gli elementi spettroscopici con questi si ha in definitiva:

$$P = 1037 \text{ giorni} = 2.839 \text{ anni}$$

$$T = 2417506 \text{ G. G.} = 1906.^a806$$

$$e = 0.25$$

$$V_0 = +34.7 \text{ km/sec}$$

$$K_1 = 8.0 \text{ km/sec.}$$

$$\omega = 90^\circ$$

$$\Omega = 13^\circ$$

$$i = -50^\circ$$

$$a_1 = 144 \times 10^6 \text{ km} = 0.96 \text{ U. A.} = 0.''058$$

$$\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^3} = 0.110 \odot$$

angoli di posizione crescenti col tempo.

Questi elementi si riferiscono alla componente visibile del sistema. Qualche dato ulteriore si può avere approfittando della relazione tra la massa e la luminosità. La grandezza apparente visuale del sistema è, secondo il catalogo di Draper, 3.74. Si può supporre con buona approssimazione che questa sia la grandezza della componente più splendente. Con la parallasse trigonometrica qui calcolata se ne deduce la grandezza assoluta visuale + 2.6. La relazione massa-luminosità dà per questa grandezza assoluta un valore della massa m_1 pari a $1.7 \odot$. Conoscendo che $\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} = 0.110 \odot$ si ha $m_2 = 0.9 \odot$ e perciò $m_2/m_1 = 0.53$. Sempre secondo la relazione massa-luminosità si avrebbe per la componente secondaria una grandezza assoluta visuale + 5.5, quindi questa componente sarebbe circa 3 grandezze meno splendente dell'altra. La separazione angolare massima sarebbe di circa $0.''04 (1 + m_1/m_2) = 0.''12$. Quindi, data la differenza di splendore, il sistema non è osservabile visualmente.

Abbiamo potuto così concludere, sia pure in modo provvisorio, gli elementi orbitali del sistema ν *Octantis*. Gli errori probabili sono rilevanti e sono necessarie altre osservazioni del medesimo tipo per confermare i risultati ottenuti.

Ho fatto presente questo caso al dott. H. L. Alden della stazione astronomica dell'osservatorio di Yale a Johannesburg nel Sud Africa, dove venne fatta la determinazione della parallasse. Dalla sua cortese risposta ho appreso che è sua intenzione di raccogliere durante quest'anno altre osservazioni e di misurare poi le posizioni della stella in tutte le lastre in entrambe le coordinate per poter così perfezionare gli elementi orbitali del sistema.

Geologia. — *Contributo alla conoscenza del vulcanismo recente in Sardegna* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di S. VARDABASSO, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

In Sardegna durante il Terziario e il Quaternario — come è noto — l'attività magmatica è stata molto intensa e varia.

Le manifestazioni relative, definite nelle loro linee generali già da A. Larmarmora, hanno avuto successivamente illustrazioni di dettaglio da parte di parecchi petrografi ⁽⁵⁾; tuttavia non siamo ancora giunti ad una esauriente precisazione dei fenomeni e dei materiali, come lo attestano anche i contributi di questi ultimi anni di Debenedetti ⁽⁶⁾, Cavinato ⁽³⁾, Minucci ⁽⁹⁾, Serra ⁽¹⁰⁾ ed altri, nonché i tentativi di sintesi di Burford ⁽¹⁾ e di Cavinato ⁽⁴⁾.

Le difficoltà di ordine geologico nello stabilire l'età delle singole manifestazioni sono da ricercarsi nei rapporti non sempre chiari fra le dislocazioni tettoniche e la venuta dei magmi per cui, data la particolare evoluzione del rilievo dell'Isola, si impone anche un più attento esame delle sue condizioni paleogeografiche.

Si aggiunga che le testimonianze del vulcanismo del tardo Paleozoico ⁽¹¹⁾ in una regione caratterizzata da considerevoli lacune stratigrafiche, come è la Sardegna, si possono prestare ad erronee interpretazioni nei casi quando nello stesso settore si sono svolte manifestazioni endogene anche durante il Cenozoico.

Se infine si tiene presente che gli studiosi non dispongono di una buona carta geologica — gran parte dell'Isola è ancora da rilevare — non può sorprendere che anche i problemi riguardanti genesi e prodotti del vulcanismo recente in Sardegna, con i loro notevoli riflessi economici (giacimenti di manganese, caolino ecc. ⁽¹²⁾), sono da considerarsi tutt'altro che risolti.

Così ad esempio in occasione del XII Congresso Geografico Italiano, tenutosi in Sardegna nel 1934, abbiamo appreso che ai cicli vulcanici oligocenico e plio-plistocenico se ne dovrebbe aggiungere uno anteriore, cioè eocenico, come con riserva è stato annunciato da M. Gortani ⁽⁷⁾ e più decisamente affermato in un importante studio da A. Cavinato ⁽⁴⁾.

Io sono però d'avviso che prima di considerare acquisita definitivamente l'esistenza di un vulcanismo eocenico in Sardegna sia il caso di istituire un rigoroso confronto fra la serie effusiva e piroclastica del Gerrei (Escalaplano),

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Geologico della R. Università di Cagliari.

(2) Pervenuta all'Accademia il 5 luglio 1937.

ritenuta appunto terziaria (Eocene), e quella dell'Ogliastra (Perdasdefogu) e della Barbagia (Seui), sicuramente paleozoiche (Permico).

Un esame accurato permetterà di constatare anche al petrografo il sorprendente parallelismo nelle condizioni geomorfologiche e stratigrafiche, cioè paleogeografiche, dei tre piccoli bacini nei quali sono conservate le serie eruttive sopra accennate. In questi bacini, che si seguono a breve distanza nel settore schistoso-cristallino nella Sardegna sudorientale a sud del Gennargentu, si è raccolto dapprima il detrito degli schisti, in modo da formare una puddinga basale del tutto simile a quella facies continentale, che nelle Alpi passa sotto il nome di « Verrucano » ed è di regola coperta dai tufi e dalle lave del Permico (esempio classico la Piattaforma Porfirica Atesina); poi si è svolto un limitato vulcanismo, che ha dal più al meno livellato il rilievo e sepolto anche piccoli depositi di carbone (flora autuniana).

I bacini di Seui, Perdasdefogu ed anche di Escalaplano sono cioè depressioni residue del rilievo formatosi in seguito al corrugamento varisco e quindi resti fossili di una morfologia del Carbonifero superiore, pervenuti a noi per la successiva colmata del Permico inferiore, dal più al meno analogamente a quanto è avvenuto nelle Alpi e del resto anche nella vicina Corsica.

Anche in Sardegna si constata cioè uno stretto nesso fra le puddinghe basali di schisto ed i tufi e le lave sovrastanti. La differenza fra il bacino di Escalaplano e quelli di Perdasdefogu e Seui consiste, se mai, nella assenza di tracce di carbone fossile nel primo, che perciò non è stato oggetto di ricerche.

Per chi tiene presente l'evoluzione morfologica della Sardegna ⁽¹³⁾, non è concepibile l'esistenza, attraverso il Mesozoico, di un bacino formatosi nel Paleozoico per essere colmato solo nel Cenozoico. Dal punto di vista paleogeografico si viene perciò ad escludere un vulcanismo eocenico nei dintorni di Escalaplano. Senza contare che la serie sedimentare eocenica trasgressiva (ed in parte anche tracce di quella giurese) si estende orizzontale indifferentemente sopra l'impalcatura schistoso-cristallina del Paleozoico antico e sopra le lave e i tufi conservati entro il bacino aperto in questa formazione. Soltanto nella zona più prossima al Flumendosa successive dislocazioni per fratture possono aver determinato contatti anormali, dando localmente l'impressione che l'Eocene sia attraversato dalle rocce eruttive.

Ad ogni modo, in attesa che un accurato rilevamento geologico di dettaglio permetta di chiarire meglio questi rapporti, il « vulcanismo eocenico » di Escalaplano — unico in Sardegna — dovrebbe essere per ora considerato come assai problematico.

Future ricerche potrebbero eventualmente constatare anche qui la venuta di lave oligoceniche, analogamente a quanto ho trovato sulla destra del Flumendosa nel territorio di Orròli (Genna Ureu), cioè di fronte al bacino di Escalaplano, come è riportato in un lavoro in corso di stampa della mia allieva I. Caria ⁽²⁾.

Queste considerazioni mostrano quanto siamo ancora lontani da una precisa conoscenza del vulcanismo recente in Sardegna.

A conferma di questo asserto sono in grado di segnalare ora anche la scoperta di un centro eruttivo recente, fatta da me nel settore attiguo al Gerrei, cioè nel Sarrabus.

*
* *

Al Capo Ferrato, che si protende nel Mare Tirreno a sud della foce del Flumendosa nella Sardegna meridionale, circa 15 chilometri da Muravera, centro di quell'interessante zona argentifera, stando alle notizie del Lamar-mora, le carte geologiche segnano una massa dioritica nel granito. In realtà si tratta di un grosso dicco lamprofirico, facilmente visibile per il suo colore nero, sia dal mare che dall'aereo, sulla costa settentrionale dirupata del Capo Ferrato (Bruncu sa Figu).

Questo lamprofiro, iniettato nel granito, fa indubbiamente parte del ciclo magmatico varisco.

Qui il massiccio paleozoico in giacitura anticlinale è profondamente smantellato, mancando del tutto gli schisti del Silurico, che invece sono iniettati dal granito e dai porfidi nella zona mineralizzata di Muravera.

I filoni porfirici, aplitici e lamprofirici (per lo più spessartiti), che attraversano il granito, sono diretti in prevalenza N-S, cioè parallelamente alla costa, fatta eccezione però per quello maggiore di Bruncu sa Figu, diretto E-O.

Il piano di iniezione di questo filone, qua e là sconvolto, è trasformato in una breccia di granito e lamprofiro cementata da una pasta ora tufacea ora pomicea, grigia, a piccoli ortoclasti in rilievo, la quale pare trabocchi da una fessura per riversarsi in mare.

Questi sorprendenti rapporti sono visibili tra la massa lamprofirica nera di Bruncu sa Figu, che scende a picco nel mare, e l'attigua caletta alla radice N del Capo Ferrato (Portu de s'Ilixi), dove le chiazze e striature di ruggine nella roccia tufacea hanno invogliato a fare, senza successo, una ricerca di ferro.

Non v'è dubbio che qui siamo in presenza di un fenomeno eruttivo molto recente. Tra la venuta dei filoni lamprofirici e quella della lava pomicea passa certamente un lungo intervallo, occupato con ogni probabilità da una fase continentale durata dal Paleozoico superiore al Quaternario.

A questa interpretazione ritengo si possa arrivare considerando i rapporti geomorfologici immediatamente a O del Capo Ferrato, dove sorge isolato un monte a cupola (Monte Ferru 299 m.), che colpisce subito per la sua forma estranea al paesaggio circostante, modellato nel granito ⁽¹⁾.

(1) Bisogna fare attenzione alle omonimie nella toponomastica sarda; di «Monte Ferru» ce ne sono parecchi: oltre quello del grande centro eruttivo di S. Lussurgiu (Ori-

Si tratta infatti di una costruzione vulcanica fresca, sovrapposta cioè ad un rilievo elaborato: il Monte Ferru è un vero domo come quelli classici dell'Alvernia, degli Euganei e di altri centri eruttivi trachitici. Anche la roccia già a prima vista può esser giudicata una trachite dalla pasta fondamentale cenere a struttura porfirica per l'idiomorfismo dei feldspati di prima generazione e per gli aghetti anfibolici alquanto limonitizzati. Più precisi confronti con altre rocce affini della Sardegna, per esempio colle trachiti del Monte Ferru di S. Lussurgiu, seguiranno a studio ultimato.

Fra la trachite del Monte Ferru e l'affioramento tufaceo-pomiccio di Portu de s'Ilixi un raccordo è stabilito da spuntoni e apofisi trachitiche minori sporgenti dal granito, sempre a contatto con i filoni lamprofirici, come è ad esempio a Bruncu Perda Niedda, anche questo riconoscibile a distanza per il suo colore nerastro.

Per la venuta di questa trachite si direbbe valga la regola generale che cioè in un territorio già interessato dal vulcanismo le manifestazioni endogene, che si succedono anche alla distanza di ere geologiche, seguono la via di minor resistenza, offerta dalle antiche iniezioni filoniane.

Un caso, in altri termini, di riattivazione tettonica di antiche linee di struttura in conseguenza di dislocazioni epirogeniche.

Per quanto concerne l'età della lava di Capo Ferrato un riferimento possiamo trovarlo nelle condizioni geologiche della spiaggia a sud del Capo. Qui a breve distanza dal Porto Pirastu, presso lo sbocco del Riu di Sernifà, è conservato un lembo di panchina quaternaria sollevata di un paio di metri sul mare.

Si tratta sicuramente del Piano Tirrenico, molto bene rappresentato lungo la costa occidentale e meridionale della Sardegna, ma estremamente raro su quella orientale. Il banco di arenaria quarzosa a stratificazione incrociata, bene cementato, includente un impasto di conchiglie, poggia in discordanza sul granito, sul quale però non segue immediatamente, intercalandosi alla base un letto irregolare di ciottoloni di granito.

A sua volta la panchina è coperta da alluvioni terrazzate diluviali a ciottoli di granito, porfido, apfite, quarzo, lamprofiro, cementati da un'argilla arenacea rossa.

Nella panchina quaternaria, distante appena un migliaio di metri dal Monte Ferru, ho cercato invano ciottoli di trachite provenienti da questo; non ne ho trovati neppure nella sovrastante coltre diluviale, dove però la mia ricerca è stata forzatamente limitata dalla fitta macchia, che la ricopre.

L'assenza di inclusi di lava nel Piano Tirrenico e la freschezza del rilievo vulcanico del Monte Ferru, evidentemente sovrapposto al paesaggio

stano), bene conosciuto nella letteratura geologico-petrografica, c'è anche questo di Capo Ferrato nel Sarrabus, quello di Capo Sferacavallo nell'Ogliastra ed altri.

granitico di antico scolpimento, concorderebbero così nell'attribuzione di un'età quaternaria alla venuta della trachite di Capo Ferrato.

Siamo cioè in presenza di una manifestazione vulcanica recentissima in un settore insospettato della costa sud-orientale della Sardegna.

Probabilmente si tratta di un'attività magmatica in relazione con gli ultimi assestamenti tettonici del massiccio sbloccato, riconoscibili fra l'altro dalle diverse quote raggiunte dal Piano Tirrenico ⁽¹³⁾.

È verosimile che le cupole, i domi e mammelloni trachandesitici, dacitici, nevaditici ecc. della valle del Cixerri nell'Iglesiente, così bene illustrati da E. Minucci ⁽⁸⁻⁹⁾ appartengano alla stessa età della trachite di Capo Ferrato nel Sarrabus.

Così mentre nella zona depressa della Sardegna settentrionale (Logudoro) l'attività eruttiva è continuata fino nel Quaternario, dando origine a quei rinomati piccoli conì basaltici, nelle zone di sprofondamento della Sardegna meridionale sarebbero sorte contemporaneamente costruzioni trachitiche, di cui particolarmente notevole questa isolata di Capo Ferrato, che per il suo interesse anche nei riguardi del vulcanismo lungo le coste del Tirreno mi è parsa degna di menzione e di una più dettagliata illustrazione ⁽¹⁴⁾.

BIBLIOGRAFIA

1. J. BURFORD, *Les formations volcaniques de la Sardaigne*. « Bull. Suisse de Min. et Petr. », XIII, 1933.
2. I. CARIA, *Contributo alla geomorfologia del Medio Flumendosa*. « Rend. Sem. Fac. Scienze R. Univ. Cagliari », 1937.
3. A. CAVINATO, *Ricerche geologico-petrografiche sulla regione dell' Arburese (Sardegna)*. Padova, 1930.
4. ID., *Studi petrografici sulla Sardegna sud-orientale*. Padova, 1935.
5. R. CIASCA, *Bibliografia sarda*, vol. V, pag. 106. Roma, 1934.
6. A. DEBENEDETTI, *Primi risultati dello studio di rocce effusive della Sardegna sud-occidentale*. « Rend. Acc. Lincei », XVII. Roma, 1933.
7. M. GORTANI, *L'esplorazione geologica della Sardegna*. « Atti XII Congr. Geogr. It. », Cagliari, 1935.
8. E. MINUCCI, *Morfologia e vulcanismo nella valle del Cixerri*. « Atti XII Congr. Geogr. It. », Cagliari, 1935.
9. ID., *La regione vulcanica del Cixerri in Sardegna*. « Boll. Uff. Geol. Ital. », LX. Roma, 1935.
10. A. SERRA, *Nuove osservazioni sul vulcanismo terziario e quaternario nella Sardegna settentrionale*. « Atti XII Congr. Geogr. It. », Cagliari, 1935.
11. S. VARDABASSO, *Giacitura e forma del nucleo granitico del massiccio sardo-corso*, XVI Internat. Geol. Congr., 1933. Report, vol. I. Washington, 1936.
12. ID. e G. GRIMALDI, *Contributo allo studio dei giacimenti caoliniferi di Serrenti e Furti (Cagliari)*. « Res. Ass. Min. Sarda », vol. 40. Iglesias, 1935.
13. ID., *Origine ed evoluzione del rilievo del massiccio sardo-corso (con carta e profili geologici)*. « Atti XII Congr. Geogr. It. », Cagliari, 1935.
14. ID., *Segnalazione di un centro vulcanico recente nel Sarrabus (Sardegna SE)*. « Rend. Sem. Facoltà Scienze R. Univ. Cagliari », 1937.

Chimica. — *Costituzione chimica e sapore dolce*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di C. FINZI e M. COLONNA, presentata dal Corrisp. G. BARGELLINI.

Lo studio delle relazioni fra costituzione chimica e sapore dolce è stato oggetto di ricerche di numerosi sperimentatori: anche recentemente sono comparsi lavori in questo campo nella letteratura italiana, come ultimamente la Nota di A. Neri⁽³⁾ che studiava i derivati solfonici di naftoisotriazinderivati, e quella di C. Alberti⁽⁴⁾ sugli acetilderivati della dulcina. A queste note rimandiamo per le citazioni dell'ampia letteratura riguardante questo interessante campo di ricerche.

Senza diffonderci in troppi esempi, dalle numerose ricerche che si riferiscono specialmente al campo della dulcina e della saccarina, si possono trarre queste conclusioni:

1° Tutti i derivati simmetricamente bisostituiti dell'urea non hanno sapore dolce.

2° Ad eccezione dei sali metallici, tutti i derivati di sostituzione dell'idrogeno imidico della saccarina non sono dolci.

3° I prodotti di sostituzione dell'ossigeno carbonilico nella saccarina non sono dolci.

4° I prodotti di sostituzione nel nucleo benzenico della saccarina possono conservare il sapore dolce a seconda della natura del sostituito. Sono dolci l'amino saccarina⁽⁵⁾, la metil saccarina e la fluoro, bromo, cloro-saccarina⁽⁶⁾.

La teoria di Oertly e Meyers⁽⁷⁾ che trasporta nel campo dei composti sapigeni le concezioni di Witt per i coloranti azoici, soffre già di qualche eccezione nel campo delle sostanze dolci grasse, e non può affatto applicarsi alle sostanze dolci appartenenti alla serie aromatica.

Per questi composti si può senza dubbio concludere che ancora non è stata trovata una relazione tra sapore dolce e costituzione chimica.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Perugia.

(2) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1937.

(3) « Gazz. Chim. It. », 67, 273, 282, 289 (1937) e « Studi Facoltà medica Senese », anno IV, p. 160.

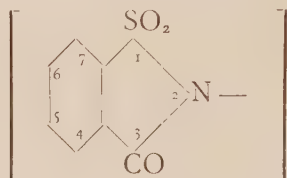
(4) « Atti V Congresso Chimica pura e applicata », 1935, p. 271.

(5) NOYES, « Berichte » 19, 689 (1897). Referate.

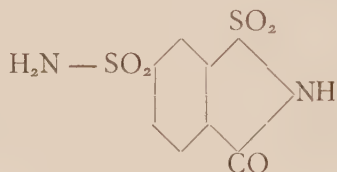
(6) FRANKEL, *Die Arzneimittel Synthese*, V ed., 142 (1921).

(7) « Journal Amer. Chem. Soc. », 41, 855 (1919).

Il fatto che il sapore dolce della saccharina o del saccharinato di sodio non aumenta proporzionalmente alla concentrazione delle soluzioni, e che la saccharina si può considerare un acido forte che ha infatti una costante di dissociazione abbastanza elevata ⁽¹⁾, ha suggerito l'idea che il sapore dolce della saccharina sia dovuto all'anione :



Ciò potrebbe essere confermato dal fatto che nella saccharina, tutti i derivati all'iminogruppo, sempre ad eccezione dei sali, non sono dolci. Epperò c'è da osservare d'altra parte, che alcuni derivati saccharinici al nucleo benzenico, che pur in acqua dovrebbero essere dissociati, non conservano il sapore dolce. A parte l'esempio della 6-nitro ⁽²⁾ e della 4-carbossisaccharina ⁽³⁾ per i quali si potrebbe ritenere che la scomparsa del sapore dolce sia dovuta alla presenza del gruppo amarogeno $-NO_2$ o del gruppo acidogeno $-COOH$, riportiamo il caso della saccharin-6-sulfonamide ⁽⁴⁾, sostanza non dolce :



In questo caso la mancanza del sapore dolce non deve attribuirsi alla scomparsa della dissociazione elettrolitica, nè all'introduzione di un aggruppamento contrastante col sapore dolce.

In conclusione appare a noi, che i numerosi lavori nel campo della saccharina, non siano certo riusciti a stabilire che in realtà esista una relazione tra la costituzione chimica e il sapore dolce dei derivati saccharinici; e questo diciamo, anche in seguito ai risultati delle ricerche che esponiamo in questa Nota.

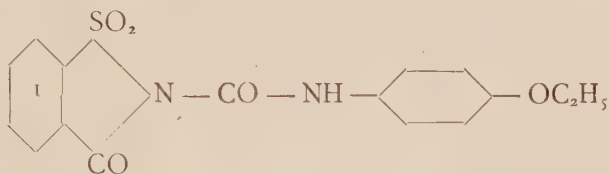
(1) MAGIDSON e GORBASCHTON, «Berichte», 56, 1810 (1923); TAUFEL e WAGNER, «Berichte», 58, 909 (1925); A. IMBESI e V. De ANGELIS, «Ann. Chim. Appl.», 25, 254 (1935).

(2) NOYES, loc. cit.

(3) ZINCKE «Liebigs Annalen» 416, 65 (1918); ZINCKE e GRUNE, «Liebigs Annalen», 427, 221 (1922); «Chem», 39, 728 (1926).

(4) HERZOG, «Zeitschr. für angew. Chem.», 39, 728 (1926).

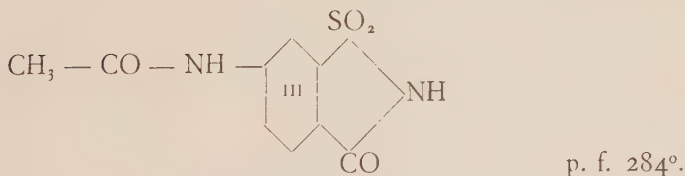
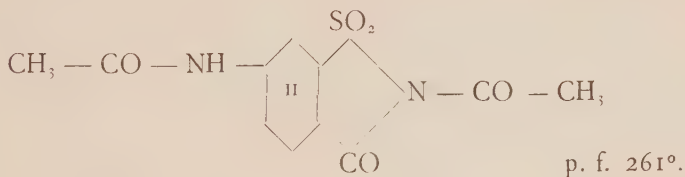
Mentre nei derivati della saccarina e della dulcina, descritti dall'ampia letteratura chimica, gli sperimentatori non si sono preoccupati in modo speciale di introdurre dei gruppi dulcigeni, noi abbiamo voluto vedere se e quali cambiamenti nel sapore dolce potevano verificarsi, preparando derivati che si potevano considerare reciprocamente derivati della dulcina o della saccarina per sostituzione, nell'una o nell'altra, di aggruppamenti dulcinici o saccarinici. Abbiamo così preparato la saccarin-2-p-ossietilformanilide (form. I):



che abbiamo ottenuto per azione della fenetidina sul saccarin-N-carbonato di etile ⁽¹⁾. Il prodotto è bianco e fonde a 156° con spumeggiamento. Questo composto, come si vede, si può considerare come derivato all'idrogeno imidico della saccarina o viceversa come un derivato della dulcina, per sostituzione dei due atomi di idrogeno del gruppo aminico. Il composto non è dolce, e ciò conferma dunque l'osservazione generale, che i derivati all'iminogruppo della saccarina o all'aminogruppo della dulcina hanno perduto tutti il sapore dolce.

Abbiamo quindi rivolto la nostra attenzione alle sostituzioni nel nucleo benzenico. Materiale di partenza di queste ricerche è stata la 6-amino saccarina, già nota nella letteratura chimica ⁽²⁾.

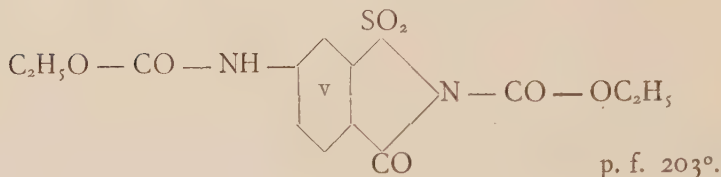
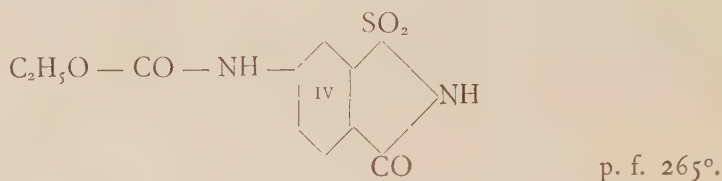
Per azione della anidride acetica sulla 6-amino saccarina abbiamo ottenuto la N-N'-di acetil saccarina (form. II) la quale per lieve riscaldamento con soluzione acquosa di soda caustica si trasforma nell'acetilderivato all'amino gruppo (form. III):



(1) H. ECKENROTH, «Berichte» 30, 1265' (1897)

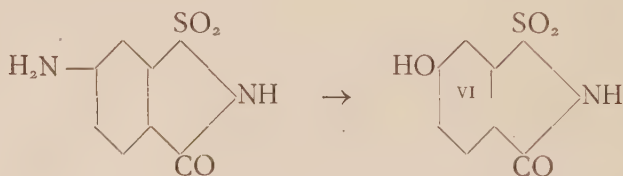
(2) NOYES, loc. cit.

Così pure per azione dell'etere clorocarbonico sull'amino saccarinato di sodio, abbiamo ottenuto il saccarin-6-uretano (form. IV), il cui sale di sodio trattato ancora con etere clorocarbonico ci ha dato il 6-uretano-saccarin-2-carbonato di etile (form. V):



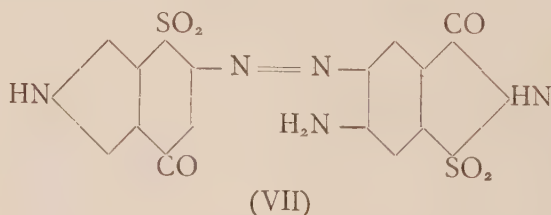
Questi composti sono tutti senza sapor dolce, e ad essi abbiamo accennato perchè ci hanno servito per la preparazione degli altri interessanti derivati che qui descriviamo.

Per sostituzione dell'aminogruppo con l'ossidrile, attraverso il diazoderivato dell'aminosaccarina, abbiamo ottenuto la 6-ossi-saccarina (form. VI):



Questa sostanza bianca, che fonde a 264° con decomposizione è dolcissima. Non abbiamo fatto prove di confronto del sapore dolce tra i due composti, ma l'ossisaccarina ci appare più dolce dell'aminosaccarina.

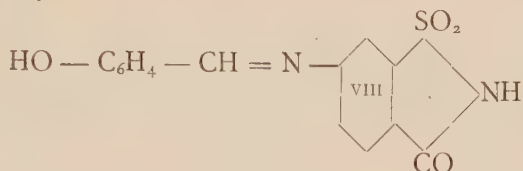
Abbiamo copulato l'amino saccarina con il suo diazoderivato; il prodotto di copulazione (form. VII).



è giallo, fonde a 241° decomponendosi e conserva la solubilità nei carbonati alcalini. Il composto è insaporo: questo fatto ci illustra l'influenza del gruppo

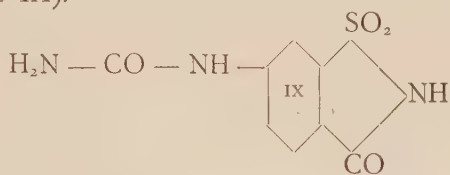
azoico come sostituyente nucleare, in rapporto al sapore dei composti di partenza.

Anche le variazioni all'aminogruppo portano un cambiamento sostanziale del sapore dolce. Abbiamo prima detto che l'acetil-amino-saccarina (form. III) non è dolce: e così pure è insapora la base di Schiff che noi abbiamo ottenuto dall'aminosaccarina con aldeide salicilica; la salicilalsaccarina (form. VIII).



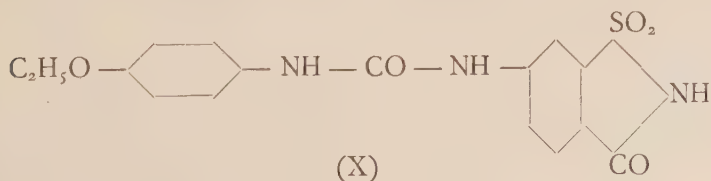
è un composto giallo (p. f. 276°-277°) che con grande facilità si idrolizza per ridare l'aminosaccarina.

Poichè la letteratura porta vari esempi dei derivati dell'urea a sapore dolce, tutti però derivati assimetrici, abbiamo voluto preparare la 6-saccarin-urea: (form. IX).

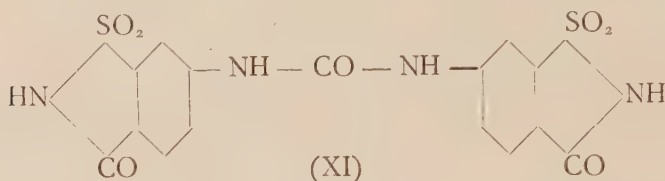


La preparazione del composto è stata alquanto laboriosa. L'azione dell'acido isocianico sull'aminosaccarina non ci ha portato ad alcun risultato. Abbiamo anche fatto reagire l'ammoniaca in varie condizioni sulla 1-uretansaccarina (Form. IV), senza riuscire ad ottenere la saccarinurea, che invece abbiamo potuto preparare per fusione dell'uretano etilico con l'amino-saccarina. La saccarinurea (form. IX) così ottenuta, è un prodotto che riscaldato fino a 305° non fonde; conserva i caratteri di solubilità della saccarina, ma ha perduto completamente il sapore dolce. Questa osservazione ci appare particolarmente notevole nei riguardi dei rapporti fra il sapore dolce e costituzione chimica. Si dovrebbe concludere che la sostituzione del gruppo ossietilico della dulcina con un anello isotiazolico faccia scomparire il sapore. Ed anche se consideriamo il prodotto come un derivato Bz della saccarina, appare ugualmente non normale che il gruppo ureico tolga il sapore dolce.

Abbiamo anche preparato la saccarin-6-dulcina (form. X):

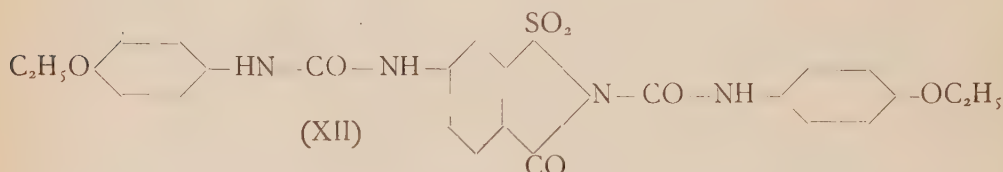


Questo prodotto fonde a 227–228° e conserva la proprietà della saccarina, di essere solubile negli alcali. Lo abbiamo ottenuto per azione della fenetidina sull'uretansaccarina (form. IV). Il prodotto è senza sapor dolce. Questa osservazione può confermare il fatto generale già citato, che tutti i derivati di sostituzione ai due aminogruppi dell'urea sono insapori. E così è insapora la 6-6'-disaccarinurea simmetrica (form. IX):



che abbiamo ottenuto per azione del fosgene sull'aminosaccarina in presenza di dimetilaniлина. È un prodotto bianco, solubile nei carbonati alcalini, e che fino a 300° non si altera.

Ed infine accenniamo anche al prodotto che brevemente chiamiamo di-dulcinsaccarina (form. XII):



il quale, come del resto era da attendersi, non è dolce. Il prodotto fonde a 228°–229° ed è insolubile negli alcali. È stato ottenuto per azione della fenetidina sul 6-uretansaccarin-2-carbonato di etile (form. V).

Dal complesso dei risultati delle ricerche che abbiamo esposto, appare a noi di dover concludere che non si possano trarre delle regole relative ai rapporti tra il sapore dolce e la costituzione chimica delle sostanze appartenenti alla serie aromatica. Il sapore dolce di queste sostanze non si presenta a nostro avviso come proprietà dipendente da un unico fattore, da questo o da quell'aggruppamento, ma come proprietà che deve attribuirsi al complesso chimico che questi composti rappresentano.

Mineralogia. — *Calcite di « Madonna del Carmine » di Dorgali* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di C. LAURO, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Appena fuori di Dorgali, verso Baunei, lungo l'Orientale sarda, si trova una piccola collina, attorno alla quale la carrozzabile gira, facendo un'ampia curva ad « U », prima di puntare decisamente verso il sud.

La collina è costituita da una piccola colata di lava basaltica, di circa due metri di spessore, poggiante direttamente sul granito; un granito profondamente alterato e sgranulato.

Questa collina prende nome dal piccolo oratorio costruito sul suo culmine e dedicato alla « Madonna del Carmine ». Alle sue spalle, proprio alla uscita della curva sopra indicata, allorchè la strada si dispone parallela ai potenti banchi di calcare cretacico, è stata aperta una cava di materiale da costruzione.

Lo spaccato ivi praticato è quanto mai suggestivo per le osservazioni che esso permette, intorno ai rapporti di giacitura fra la lava e il granito, relazioni che mi riservo di descrivere e documentare in altra sede ⁽³⁾.

In questa Nota riferisco su dei piccoli cristallini di calcite, assai ben sviluppati, ricchi di numerose faccette, perfettamente limpidi, trasparenti ed incolori, che ho raccolti in piccole druse o spaccature, entro la lava compatta.

La lava stessa è affetta da un principio di fessurazione, dovuta certo alle contrazioni subite durante il raffreddamento. Il fenomeno è per altro di assai lieve entità, ed è in parte mascherato dal fatto, che i singoli blocchi sono stati nuovamente saldati fra di loro da una esile crosta bianchissima, che è agevole riconoscere come calcite purissima.

Le druse entro cui ho trovato i cristallini di calcite che mi accingo a descrivere, sono raccordate a quelle esilissime fessurazioni riempite pure di calcite. Per cui è evidente che quelle fenditure furono le vie di accesso alle druse, e che la calcite che costituisce il cemento, ed i cristallini di calcite delle druse, debbano avere una origine comune.

La loro forma di giacitura, il fatto stesso che la lava anche lungo le fessurazioni è sempre perfettamente fresca, convincono che la loro genesi debba essere legata a quella fase idrotermale a bassa temperatura, che rap-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Cagliari.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 luglio 1937.

(3) C. LAURO, *Studio geologico petrografico sulle rocce vulcaniche post-mioceniche della Sardegna*. Nota III. In preparazione.

presenta uno degli stadi finali del complesso fenomeno del vulcanismo, e che viene per l'appunto indicato « idrotermale dei carbonati ».

Le azioni di questi fenomeni idrotermali a bassa temperatura, sono del resto comuni nei basalti della Sardegna, ed io stesso ho già avuto campo di segnalarli per le lave di Bari Sardo ⁽¹⁾ e della « Giara » di Gesturi ⁽²⁾.

Per altro, qui nei pressi di Dorgali, le manifestazioni di questo idrotermalismo pare abbiano raggiunto un maggiore sviluppo, o per lo meno, l'apertura della cava ivi praticata, mi ha permesso di osservare queste manifestazioni in condizioni più favorevoli che non altrove.

È opportuno per altro che io rilevi come nella stessa località vi sia anche della calcite secondaria di evidente deposito chimico dovuto alla circolazione delle acque in seno ai soprastanti calcari del cretaceo.

Questa calcite si presenta in grossi blocchi spatici (nè ho visto anche delle dimensioni di m. $1 \times 0.4 \times 0.4$) fortemente colorati da ossidi di ferro, ed è facilmente distinguibile dalla calcite di origine idrotermale, sia per il suo aspetto che per la sua giacitura.

Si trova di solito ai margini dei banchi di calcare, alle volte entro lo stesso basalto a riempimento di spaccature e di vacui superficiali.

Un bell'esempio di questo tipo si ha poco oltre la cava, al km. 46.7 da Baunei, sulla fiancata sinistra della strada, sottostante alla potente parete di cretaceo, ove la messa in opera della carozzabile ha messo in evidenza uno stretto filone di basalto che attraversa il granito e gli si rovescia sopra ricoprendolo a mo' di fungo.

I cristallini di calcite sono sempre di piccole dimensioni. I più grandi misurano appena due o tre millimetri secondo la direzione dell'asse ternario. Sono, come ho già detto, assai ben sviluppati e perfettamente limpidi ed incolori. Stanno impiantati con l'asse ternario in una esile crosta di calcite che tappezza interamente le pareti delle piccole druse in cui si trovano.

Ho eseguito le misure angolari col goniometro a due cerchi modello Goldschmidt. Data l'assenza della faccia basale e delle facce della zona prismatica, per le solite operazioni inerenti alla definizione della « faccia polo 0 » (faccia possibile 0001 = piano di proiezione), mi sono servito delle facce del romboedro acuto $\{0\ 2\ \bar{2}\ 1\}$ sempre presenti e sempre perfettamente speculari.

L'esame di numerosi cristallini mi ha permesso di constatare la presenza delle forme:

$$\begin{aligned} \{1\ 0\ \bar{1}\ 1\} & , \quad \{4\ 0\ \bar{4}\ 1\} & , \quad \{0\ 2\ \bar{2}\ 1\} & , \quad \{0\ 11\ \bar{1}\bar{1}\ 1\} , \\ \{0\ 17\ \bar{1}\bar{7}\ 1\} & , \quad \{7\ 4\ \bar{1}\bar{1}\ 3\} & , \quad \{3\ 2\ \bar{5}\ 1\} & , \quad \{5\ 10\ \bar{1}\bar{5}\ 4\} . \end{aligned}$$

(1) C. LAURO, *Studio geologico petrografico delle rocce vulcaniche post-mioceniche della Sardegna*. Nota I. *La colata basaltica di Bari Sardo*. « Periodico di Mineralogia », 1937, p. 107.

(2) C. LAURO, *Studio geologico petrografico delle rocce vulcaniche post-mioceniche della Sardegna*. Nota II. *La « Giara » di Gesturi*. « Periodico di Mineralogia », 1937, p. 125.

I romboedri negativi $\{0\ 2\ \bar{2}\ 1\}$ e $\{0\ 11\ \bar{1}\bar{1}\ 1\}$ sono le forme che caratterizzano l'abito dei cristallini di calcite di questa località. Hanno ambedue uno sviluppo preponderante rispetto alle altre forme. Il primo, come ho già rilevato, è costantemente presente; il secondo invece alle volte è sostituito dal romboedro negativo più acuto $\{0\ 17\ \bar{1}\bar{7}\ 1\}$ ed allora a sua volta ben sviluppato. Questo ultimo romboedro ho trovato anche associato al precedente $\{0\ 11\ \bar{1}\bar{1}\ 1\}$, ma in tali casi è poco sviluppato.

Molto frequente è il romboedro positivo $\{1\ 0\ \bar{1}\ 1\}$; ed in misura minore il romboedro positivo $\{4\ 0\ \bar{4}\ 1\}$. Il primo in faccette rettangolari allungate perfettamente speculari; il secondo in faccette poligonali aventi qualche volta un discreto sviluppo.

Pure frequente è anche lo scalenoedro positivo $\{7\ 4\ \bar{1}\bar{1}\ 3\}$. Poche volte ho trovato l'altro scalenoedro positivo $\{3\ 2\ \bar{5}\ 1\}$; una sola volta accoppiato al precedente.

Una sola volta ho trovato, infine, lo scalenoedro negativo $\{5\ 10\ \bar{1}\bar{5}\ 4\}$. A malgrado le sue dimensioni assai ridotte e le cattive riflessioni che esso ha dato, la sua identificazione deve ritenersi sicura come prova il confronto fra i valori sperimentali e quelli calcolati per φ e ρ .

Nei cristallini esaminati ho riscontrato la presenza delle seguenti combinazioni che elenco scrivendo le forme in ordine di sviluppo:

- a) $\{0\ 2\ \bar{2}\ 1\}$ $\{0\ 11\ \bar{1}\bar{1}\ 1\}$ $\{0\ 17\ \bar{1}\bar{7}\ 1\}$ $\{7\ 4\ \bar{1}\bar{1}\ 3\}$ $\{4\ 0\ \bar{4}\ 1\}$
 b) $\{0\ 2\ \bar{2}\ 1\}$ $\{0\ 11\ \bar{1}\bar{1}\ 1\}$ $\{7\ 4\ \bar{1}\bar{1}\ 3\}$ $\{1\ 0\ \bar{1}\ 1\}$ $\{5\ 10\ \bar{1}\bar{5}\ 4\}$
 c) $\{0\ 2\ \bar{2}\ 1\}$ $\{0\ 11\ \bar{1}\bar{1}\ 1\}$ $\{7\ 4\ \bar{1}\bar{1}\ 3\}$ $\{1\ 0\ \bar{1}\ 1\}$ $\{4\ 0\ \bar{4}\ 1\}$
 d) $\{0\ 2\ \bar{2}\ 1\}$ $\{0\ 11\ \bar{1}\bar{1}\ 1\}$ $\{7\ 4\ \bar{1}\bar{1}\ 3\}$
 e) $\{0\ 2\ \bar{2}\ 1\}$ $\{0\ 11\ \bar{1}\bar{1}\ 1\}$ $\{1\ 0\ \bar{1}\ 1\}$
 f) $\{0\ 2\ \bar{2}\ 1\}$ $\{0\ 17\ \bar{1}\bar{7}\ 1\}$ $\{3\ 2\ \bar{5}\ 1\}$ $\{1\ 0\ \bar{1}\ 1\}$
 g) $\{0\ 2\ \bar{2}\ 1\}$ $\{0\ 17\ \bar{1}\bar{7}\ 1\}$ $\{7\ 4\ \bar{1}\bar{1}\ 3\}$ $\{3\ 2\ \bar{5}\ 1\}$ $\{1\ 0\ \bar{1}\ 1\}$ $\{4\ 0\ \bar{4}\ 1\}$
 h) $\{0\ 2\ \bar{2}\ 1\}$ $\{0\ 17\ \bar{1}\bar{7}\ 1\}$.

La fig. 1, ricavata graficamente dalla proiezione gnomonica⁽¹⁾ (fig. 2) rappresenta l'abito della combinazione c) che è la più frequente.

Nella tabella che segue riporto i risultati delle misure che hanno permesso l'identificazione delle forme sopra indicate, e li confronto con i valori calcolati in base alle costanti generalmente adottate

$$c = 0.8543$$

$$p_0 = 0.5695.$$

(1) Per l'esecuzione della proiezione gnomonica, ho riportato le distanze fra il polo o ed i poli delle singole faccie uguali ad $h \cdot \operatorname{tg} \rho$ (ove h = raggio del cerchio fondamentale), con $h = 1$ anzichè con $h = 5$ come è consuetudine.

Ciò è dovuto ai forti valori di ρ per le forme $\{0\ 11\ \bar{1}\bar{1}\ 1\}$ e specialmente $\{0\ 17\ \bar{1}\bar{7}\ 1\}$ che per $h = 5$ sarebbero andati a cadere troppo lontano dal centro della figura (rispettivamente a cm. 54.254 e cm. 83.799).

Le relazioni

$$p = \frac{(h - k)}{l}$$

$$q = \frac{(h + 2k)}{l}$$

$$\frac{h}{l} = \frac{(2p + q)}{3}$$

$$\frac{k}{l} = \frac{(q - p)}{3}$$

legano gli indici p e q del Goldschmidt (G_2 simb.) a quelli di Bravais ($h \ k \ l$).

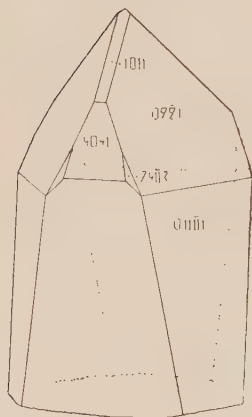
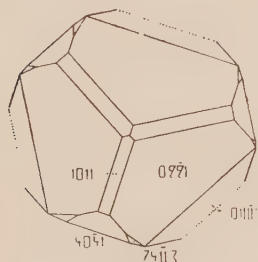


Fig. 1.

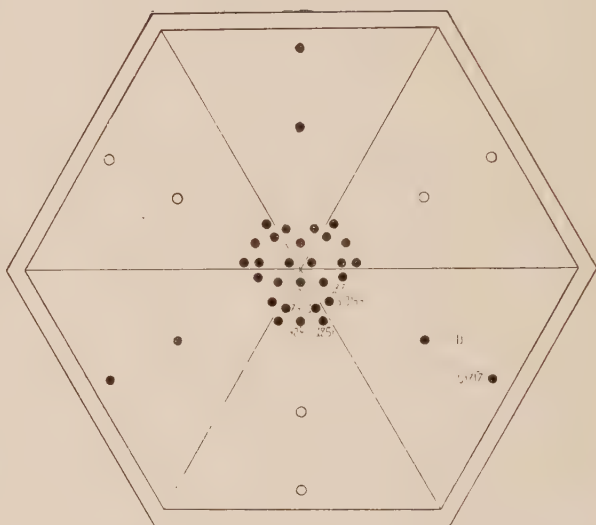


Fig. 2.

Indici			Valori calcolati		Valori misurati				N.
G ₂ simb.	Bravais	Miller	φ	ρ	media		limiti delle misure		
					φ	ρ	φ	ρ	
I	I 0 $\bar{1}$ I	I 0 0	30°00'	44°36'	30°01'	44°43'	29°39'–30°43'	44°29'–44°57'	7
4	4 0 $\bar{4}$ I	3 $\bar{1}$ $\bar{1}$	»	75°47'	29°57'	75°29'	29°38'–30°17'	74°31'–75°57'	6
– 2	0 2 $\bar{2}$ I	I I $\bar{1}$	»	63°07'	30°02'	63°09'	29°45'–30°29'	62°49'–63°22'	30
– II II	0 II \bar{II} I	4 4 $\bar{7}$	»	84°44'	30°07'	84°50'	29°46'–30°48'	84°20'–85°19'	5
– 17 17	0 17 $\bar{17}$ I	6 6 \bar{II}	»	86°35'	30°01'	86°53'	29°34'–30°23'	86°12'–87°18'	4
5 I	7 4 \bar{II} 3	7 0 $\bar{4}$	8°57'	72°30'	8°48'	72°26'	8°23'– 9°24'	72°07'–72°47'	15
7 I	3 2 $\bar{5}$ I	3 0 $\bar{2}$	6°35'	76°54'	6°34'	76°17'	6°26'– 6°43'	75°55'–76°40'	2
– 5 $\frac{5}{4}$	5 10 $\bar{15}$ 4	8 3 $\bar{7}$	10°53'	72°57'	10°41'	73°31'	—	—	I

Biologia. — *Contributo allo studio dell'azione del fattore antineuritico (B¹) sul testicolo* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di V. CAPRARO e M. FORTUNATO, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Generalmente gli AA., che si sono occupati dell'azione del fattore antineuritico (B¹) sui testicoli degli uccelli, hanno notato fenomeni più o meno accentuati d'ipotrofia di questi organi (Funk e Douglas, Mac Carrison, Portier, Riquier ⁽³⁾, Abderhalden ⁽⁴⁾, Sanfilippo ⁽⁵⁾, Cannavà ⁽⁶⁾). Le alterazioni descritte consistono, in generale, in una riduzione più o meno spiccata dell'epitelio seminale, che può ridursi anche ad un solo strato, con degenerazione più o meno avanzata degli strati più interni.

I tubuli sono diminuiti di dimensioni; talvolta il tessuto interstiziale è aumentato; l'organo in toto è diminuito di volume e di peso.

Altri AA. (Reitano e Sanfilippo ⁽⁷⁾) dichiarano di essere riusciti, a mezzo di diete speciali, ad ottenere una sindrome beriberica puramente nervosa senza alterazione testicolare.

Altri AA. (Solarino ⁽⁸⁾) infine, ammettono che le eventuali alterazioni, cui vanno incontro i testicoli degli uccelli affetti da beriberi oriziano, non sono dovute alla mancanza del fattore B¹, ma alla iponutrizione, ch'è condizione frequente in questa malattia, confermando così la tesi sostenuta da G. Amantea ⁽⁹⁾ fin dal 1926, sulla base di osservazioni eseguite con metodo fisiologico.

A noi si è offerta la possibilità di portare un contributo allo studio ulteriore dell'argomento, approfittando di due piccioni, i quali, esplorati nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma, avevano presentato il raro comportamento di giungere, per alimentazione oriziana esclusiva, al beriberi sperimentale senza perdita, anzi con guadagno di peso.

(1) Lavoro eseguito negli Istituti di Anatomia ed Embriologia comparate e di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1937.

(3) G. C. RIQUIER, «Studi Sassaresi», ser. II, vol. IV, 1926. (In questo lavoro si trovano citati: FUNK e DOUGLAS, MAC CARRISON, PORTIER).

(4) E. ABDERHALDEN, «Pflüger's Arch.», Bd. 217, p. 88, 1927.

(5) G. SANFILIPPO, «Boll. Soc. Ital. Biol. Sper.», vol. V, p. 765, 1930.

(6) A. CANNAVÀ, «Boll. Soc. Ital. Biol. Sper.», vol. XI, p. 975, 1936.

(7) R. REITANO e G. SANFILIPPO, «Boll. Soc. Ital. Biol. Sper.», vol. IV, p. 515, 1929.

(8) Citato da CANNAVÀ, loc. cit.

(9) G. AMANTEA, «Boll. Soc. Ital. Biol. Sper.», vol. I, fasc. IV, 1926.

Entrambi si sono così comportati per tre volte su tre prove eseguite ad opportuni intervalli.

Precisamente alla fine della terza esperienza i due animali sono stati da noi utilizzati per lo studio dei testicoli.

Il primo piccione aveva presentato in modo acuto disturbi a tipo cerebellare e scarsi fenomeni paretici a carico degli arti; nel secondo, pure in maniera acuta, si erano manifestati netti fenomeni paralitici agli arti superiori ed inferiori e disturbi della sensibilità muscolare.

Lo stesso giorno della comparsa della sindrome li abbiamo sacrificati per decapitazione, eseguendo nell'Istituto di Anatomia ed Embriologia comparsate della R. Università di Roma lo studio dei testicoli.

Dopo aver prelevato questi, li abbiamo pesati, indi fissati in formalina 10 %, e poi, seguendo le tecniche abituali, ne abbiamo allestite sezioni al microtomo congelatore, che abbiamo colorate col Sudan III, ed altre al microtomo comune, previa inclusione in paraffina, che abbiamo colorate con ematossilina Carazzi-eosina.

All'esame macroscopico i testicoli del primo piccione erano ambedue ben sviluppati, del peso di gr. 0.80 ciascuno.

All'esame microscopico del didimo abbiamo notato che il tessuto interstiziale era ricchissimo di cellule ripiene di goccioline sudanofile, ma, nell'insieme, non aumentato oltre i limiti fisiologici. I tubuli seminiferi avevano, in media, un diametro di mm. 0.28, con epitelio seminale rigoglioso: spermatogoni, spermatociti, spermatidi e spermatozoidi per quantità e disposizione normali (fig. 1).

Verso il lume del tubulo apparivano degli elementi seminali in via di degenerazione ed elementi di difficile interpretazione e che, del resto, si possono trovare anche in piccioni normali: cellule seminali plurinucleate, elementi con più nuclei spermatidici già allungati in una massa citoplasmatica omogenea. La sostanza sudanofila diffusa nei tubuli era scarsa. Nell'epididimo non vi era traccia di grassi ed i tubuli erano vuoti di elementi seminali.

All'esame macroscopico i testicoli del secondo piccione apparivano bene sviluppati, del peso di gr. 1.15 ciascuno.

All'esame microscopico il tessuto interstiziale del didimo era normalmente sviluppato e con quantità più scarsa, rispetto al primo, di cellule cariche di goccioline sudanofile. I tubuli seminiferi, di un diametro di mm. 0.32, in media, presentavano l'epitelio seminale rigoglioso e senza alterazioni constatabili. Si notavano, in definitiva, aspetti istologici simili a quelli del caso precedente (figg. 2 e 3). Nel tessuto interstiziale dell'epididimo si trovava scarsa quantità di sostanza sudanofila. L'epitelio dei tubuli epididimari era ricco di grassi e nel lume di essi vi erano numerosi spermatozoidi maturi, scarse cellule seminali in degenerazione.

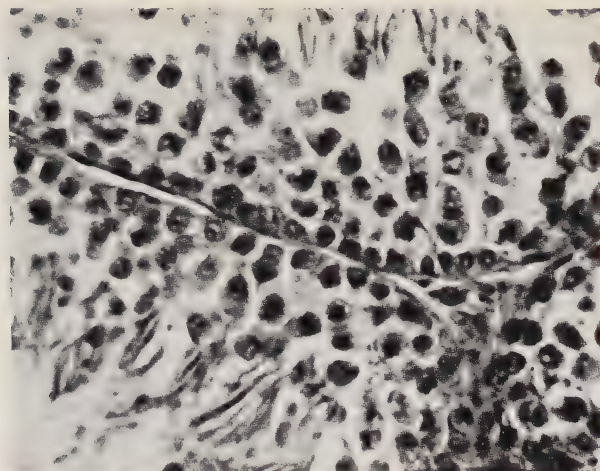


Fig. 1

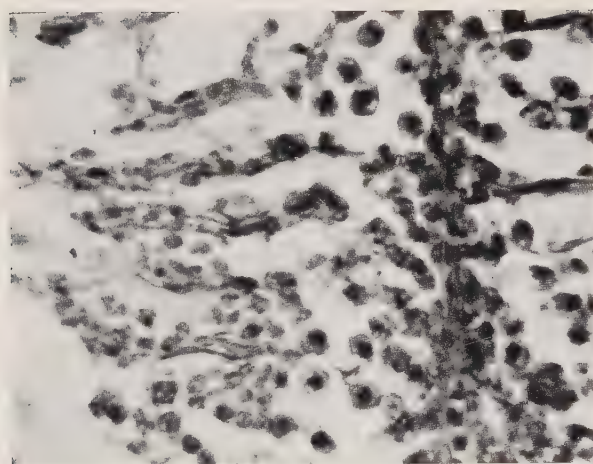


Fig. 2

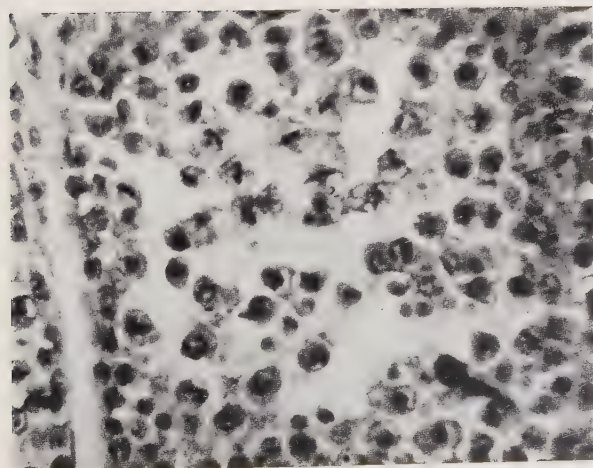


Fig. 3

La conclusione che possiamo trarre dall'esame di questi due casi è che l'effetto della privazione del fattore B¹ sul testicolo, quando non è accompagnata da iponutrizione, nel beriberi aviario da alimentazione orizantica esclusiva, è nullo.

Non possiamo dare, per ora, un giudizio su quegli elementi seminali in via di degenerazione e quegli elementi che abbiamo dichiarato essere di difficile interpretazione, notati anche nei piccioni normali.

Però, data la loro rarità nei due casi esaminati e tenendo presente la squisita sensibilità del testicolo all'azione di numerosi e svariati fattori spesso indeterminabili, non crediamo che, con la loro presenza, possano infirmare la conclusione a cui siamo giunti.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

Fig. 1. - Piccione I. Si vedono due tubuli seminiferi affiancati con epitelio seminale costituito, andando dalla base al lume del tubulo, da spermatogoni, spermatociti, spermatidi e ciuffi di spermatozoidi.

Fig. 2. - Piccione II. Come nella fig. 1.

Fig. 3. - Piccione II. Si vedono chiaramente delle mitosi negli spermatociti in fase di piastra equatoriale.

(Le fotografie sono allo stesso ingrandimento e sono state eseguite con apparecchio fotografico Koristka, obb. 40, oc. 15 Zeiss).

Biologia. — *Contrattilità ed eccitazione neurogena e miogena negli «Ascidieae»*. Nota ⁽¹⁾ di M. FEDELE, presentata dal Corrisp. U. PIERANTONI.

Per immunizzare il capitolo della fisiologia del sistema nervoso dei Tunicati da illazioni teoriche, nelle quali non è possibile scernere ciò che è pura speculazione da ciò che è contributo positivo di fatti, cominciamo con l'osservare che, dopo quanto io ho esposto dei risultati delle mie ricerche morfologiche, non è più ammissibile definire, come si fa da alcuni, il sistema nervoso dei Tunicati come costituito da un unico ganglio nervoso centrale, da cui si irradia la innervazione per tutte le parti del corpo, o, peggio ancora, come si pretende, senza base, da altri, da un neuroepitelio insieme con questo ganglio; il sistema nervoso degli Ascidieae, come quello dei Taliacei, risulta costituito, oltre che dal ganglio nervoso centrale, del quale in questi ultimi animali ho dimostrato strutture, funzioni e significato ⁽²⁾, di un apparato

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1937.

(2) M. FEDELE, *Ricerche sulla natura dei ritmi muscolari degli Invertebrati*. « Arch. di Sc. Biol. », vol. 19, p. 107, 1933.

nervoso viscerale, le cui cellule entrano in rapporto con il ganglio centrale per mezzo di un nervo, che, per i suoi rapporti e la sua distribuzione prossimale e distale, ben a ragione si può paragonare al pneumogastrico dei Vertebrati.

Negli Ascidiacei gli apparati nervosi viscerali si presentano in rapporto con il « cordone cellulare dorsale », il quale va dal ganglio centrale fino alle gonadi, correndo per lungo tratto connesso con il vaso dorsale e poi fra questo e il deferente e l'intestino, ed è connesso con cellule nervose, che forniscono fibre al sacco branchiale ed ai vari visceri.

Questo sistema nervoso autonomo, ricco di elementi nervosi cellulari e di fibre variamente intrecciantisi ed anastomizzanti, non ha rapporti con la muscolatura del corpo delle Ascidie.

Fissate le basi strutturali, possiamo con precise direttive esaminare ciò che è stato dedotto, e ciò che possiamo legittimamente dedurre dall'esame funzionale.

Dalle prime ricerche in seguito a scervellazione della *Ciona intestinalis* si credette che persistessero i riflessi, e che questi potessero estrinsecarsi attraverso le disposizioni adatte della trama muscolare e attraverso reti nervose periferiche (Loeb, Bethe).

Loeb⁽¹⁾ non vedeva, perciò, nessuna necessità del ganglio centrale per i riflessi, e riscontrava solo una differenza di irritabilità, fra ascidie normali ed operate, nel rapporto oscillante da 1/3 ad 1/8 ad 1/18 in meno per queste ultime.

Si pensò, in seguito, ad una semplice attenuazione della sensibilità e del tono muscolare, ed alla scomparsa di solo alcuni riflessi, mentre altri sarebbero conservati (Magnus, Fröhlich, Jordan ed altri). In base alle mie ricerche, condotte su di uno studio delle strutture nervose e muscolari e sull'esame funzionale di esse, io dimostrai che, in seguito alla scervellazione, scompare ogni vero riflesso, e che i residui movimenti estrinsecanti nella muscolatura del corpo erano la espressione di un fenomeno puramente miogeno, rivelandosi le contrazioni in conseguenza della eccitabilità diretta delle fibre muscolari, e propaganti esse, attraverso le sole vie di comunicazione muscolare, da fibra a fibra.

Al ganglio nervoso veniva così da me attribuita tutta la importanza di unico centro per i riflessi, in rapporto alla muscolatura somatica, e non quella di una semplice « corta via » per essi, come si era creduto di riconoscere, attribuendo funzione di centri per i riflessi ad ipotetiche reti nervose periferiche.

In sostanza, nel campo dei fatti, pur senza scendere in minute descrizioni, possiamo precisare che le Cione integre mostrano riflessi caratteristici, manifestanti in tipiche attività coordinate in rapporto al territorio di rece-

(1) J. LOEB, *Comparative Physiology of the Brain* ecc., capitolo 3, p. 35.

zione stimolato⁽¹⁾, e, inoltre, manifestano fenomeni dinamici ritmici, che si presentano, con le irregolarità e inversioni note, nel muscolo cardiaco, in periodiche inibizioni dell'attività ciliare (Fedele) ed in contrazioni della muscolatura somatica.

Con l'asportazione, od operando la distruzione in sito del ganglio centrale si rivela un abbassamento del tono della muscolatura somatica (Loeb, Jordan, Fedele) e la scomparsa dei riflessi (Fedele), nonché la persistenza del ritmo cardiaco, dei tipici fenomeni della ciliatura branchiale e delle contrazioni ritmiche somatiche.

Gli autori in genere, anche posteriori alle mie ricerche, si sono arrestati a constatare la scomparsa dei riflessi incrociati, più facilmente constatabili, credendo alla persistenza di altri riflessi effettuanti nella muscolatura somatica.

Ma, se accompagniamo lo studio della organizzazione nervosa con quella muscolare, è facile convincersi che le risposte contrattive dopo scervellazione non si manifestano in conseguenza di meccanismo riflesso, ma sono contrazioni puramente miogene, in seguito ad eccitazione diretta della muscolatura. Questo è stato da me chiaramente messo in evidenza, e tutti gli esperimenti successivi del Ten Cate⁽²⁾, Bacq⁽³⁾ Yamaguchi⁽⁴⁾ sono, in fondo, obbiettivamente interpretati, una conferma delle mie vedute.

Nessuno degli sperimentatori ha fatto una analisi anatomica-fisiologica della muscolatura, come è stata da me condotta fin dalle mie prime ricerche, ma sia le esperienze del Ten Cate, che, pur non riuscendo a liberarsi dalla erronea credenza in una rete nervosa periferica, riconosce ai movimenti di *Ciona* deganglionate natura di contrazioni aneurali e conviene che le anomalie, che si riscontrano in questi movimenti in *Ciona*, si spiegano in modo soddisfacente in base alle disposizioni anatomiche dei muscoli, come le esperienze di Yamaguchi con amputazioni di sifoni, e quelle di Bacq su muscoli isolati e denervati, confermano perfettamente che le risposte contrattive e le loro modalità, in *Ascidie* prive di ganglio centrale, sono esaurientemente spiegabili con le sole attività e rapporti muscolari.

Le modalità contrattive muscolari di *Ciona* privata del ganglio centrale si possono riassumere nelle seguenti, già da me dimostrate:

1. A stimolazioni ben localizzate (e perciò meglio meccaniche) si ottengono contrazioni partenti dal punto stimolato e irradiantisi, per le vie delle comunicazioni muscolari, in tutti i sensi. — 2. Le stimolazioni esercitate

(1) M. FEDELE, *Attività riflesse ed effettori autonomi negli « Ascidiee »*. « Rend. Reale Acc. Lincei », vol. 32, ser. 5^a, p. 184.

(2) J. TEN CATE, « Arch. Néerlandaises, de Phys. », to. 13, 1928, p. 391.

(3) Z. M. BACQ, « Bull. Ac. R. Belgique » Cl. Sc. (5) to. 20, 1934, p. 1042; e « Arch. intern. Physiol. », to. 40, 1935, p. 357; e « C. R. Soc. Biol. Paris », to. 117, 1934, p. 485.

(4) Z. YAMAGUCHI, « Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ. » (4), vol. 6, p. 597, 1931.

sulla muscolatura trasversale provocano contratture ad anello lungo il corpo, propagantisi nei due sensi finchè durano le comunicazioni fra le due fibre muscolari, e per un tratto più o meno lungo in dipendenza della intensità della stimolazione. — 3. Se è stimolata opportunamente la muscolatura anulare del sifone cloacale, le contratture passano, da un lato, lungo il sifone fino alla sua estremità, e dall'altro si estendono gradatamente lungo la muscolatura del corpo. — 4. Se si stimola, invece, quella del sifone ingestivo al di sopra della zona tentacolare, l'onda, mentre si estende da una parte fino alla estremità del sifone, verso il corpo, invece, si arresta alla zona anulare, in cui la muscolatura del sifone è distinta anatomicamente da quella del tronco. E così la stimolazione della muscolatura trasversale somatica esercitata in zona inferiore a questo limite, mentre in basso si propaga su tutto il corpo, in alto non oltrepassa la linea di divisione delle due muscolature. — 5. Anche la stimolazione dei muscoli longitudinali desta contrazioni, che si propagano lungo di essi finchè permane la loro continuità, e si arrestano ai limiti delle recisioni. — 6. Risulta molto chiaro, dallo studio da me fatto della propagazione di queste contrazioni in *Cione* scervellate o curarizzate, che le contratture, dopo stimolazioni ben localizzate, seguono le vie muscolari e si propagano da fibra a fibra lungo la trama dei muscoli, di cui ho studiato minuziosamente strutture, rapporti e comunicazioni.

In questo schema rientrano tutte le particolarità contrattive di *Ciona*, e le varie modalità riscontrabili in seguito a variazione dei punti stimolati, non sono che comprensibili modalità di esso; e in nessun modo il succedersi delle contrazioni in seguito a scervellazione sono comparabili alle coordinazioni riflesse, nelle quali sono in gioco non solo impulsi di moto trasmessi dal centro alla muscolatura, ma ancora inibizioni, le quali ultime scompaiono completamente con l'asportazione del ganglio.

Le fibre muscolari di *Ciona* posseggono accentuata irritabilità e anche le ricerche del Bacq, su fibre isolate e denervate, hanno confermato questo fatto. Queste fibre muscolari di *Ciona* presentano un esempio notevole e degno di approfondimento di quella diretta eccitabilità delle fibre muscolari, che è ormai un fatto dimostrato e acquisito della fisiologia muscolare.

Le contrazioni ritmiche, che presentano le fibre muscolari delle *Ascidie* isolate, rientrano perfettamente nel quadro di quanto ci è noto per le fibre lisce denervate in generale, che presentano in condizioni analoghe lo stesso automatismo; e nei riguardi delle contratture ritmiche di *Cione* integre o scervellate, l'analisi del fenomeno, che non esce in ogni modo dal quadro generale da me delineato, andrebbe approfondito, tenendo anche presente un ritmo inibitore, che si manifesta, secondo le mie osservazioni, anche nella ciliatura branchiale, per quanto questo si riveli asincrono con le contrazioni muscolari delle *Ascidie*, apparentemente spontanee.

Sia nella asportazione o distruzione in sito del ganglio centrale, sia operando su parti staccate del corpo, invero, in *Ciona* non si elimina sempre

ogni elemento cellulare nervoso, ma quando si opera su parti comprendenti zone da me indicate come sedi dei centri nervosi viscerali, vi rimangono connessi i cospicui centri, che ho già indicati in rapporto con il cordone viscerale, dalla origine gangliare alla gonade.

Ma non possiamo attribuire a queste formazioni rapporti con i fenomeni contrattivi dell'involucro muscolo cutaneo, per il fatto che tratti isolati dei sifoni, per i quali non è in nessun modo da pensare a rapporti con questi elementi viscerali, e tratti del tronco privi delle zone indicate, manifestano nella muscolatura somatica l'istesso comportamento che nell'animale semplicemente scervellato.

D'altra parte è un errore asserire, come ho chiarito con le mie esaurienti ricerche in proposito, che nel sistema nervoso periferico delle Cione si trovino cellule gangliari fin nelle più sottili ramificazioni, come fa il Ten Cate⁽¹⁾ e come credono erroneamente altri sperimentatori e ripete ultimamente anche lo Schiller⁽²⁾ poichè, formazioni cellulari, come ho dimostrato, sono in rapporto solo con il nervo branchiale, e i nervi periferici, che si distribuiscono alle pareti del corpo, prendono solo rapporti con le cellule recettrici sotto epiteliali e con gli elementi del ganglio centrale, presentando così, il neurone sensitivo il suo corpo cellulare alla periferia, e quello motore nel centro, nel quale solo si realizza la sinapsi fra le due vie, centripeta e centrifuga.

Le esperienze di stimolazione di parti staccate del tubo muscolo cutaneo non ci possono mettere, però, sempre in condizione di esercitare la stimolazione su muscoli perfettamente denervati, date le numerosissime e fini arborizzazioni dei nervi (non da confondere, naturalmente, con le fantastiche reti fibro cellulari periferiche!) che nel loro percorso, molto comunemente, si addossano ai muscoli, sicchè, in questo caso la stimolazione investe non solo il muscolo, ma le fibre nervose connesse nel preparato.

Quando si sperimenta su frammenti, dopo qualche giorno possiamo ritenere eliminato per degenerazione l'elemento nervoso; ma su animali semplicemente scervellati, il potere rigeneratore, che conduce alla rapida neoformazione del ganglio, ci può lasciare in dubbio sulla totale esclusione di ogni intervento da parte delle fibre nervose, sia pure prive di centro gangliare, e agenti, quindi, per eccitazione diretta e non riflessa. Ma la sperimentazione farmacologica, chiarisce anche essa questa possibile obiezione e conferma pienamente la natura miogena della contrazione nelle Cione deganglionate.

La nicotina può provocare contrazioni energiche e durature, ma usata in dosi deboli e per immersione di piccole Cione da 2 a 4 cm. di lun-

(1) TEN CATE, I, 1928, loc. cit., p. 1. Si comprende che la mia esclusione si riferisce a cellule motrici, non a quelle sensitive, che hanno il pirenoforo alla periferia.

(2) I. SCHILLER, «Bull. Inst. Océanograph.», n. 721, p. 1.

ghezza, trasparenti e sensibilissime, mostra una rapida azione sia sul sistema nervoso, che direttamente sulle fibre muscolari, scomparendo ogni attività riflessa, e, in seguito, la stessa eccitabilità diretta muscolare, dopo circa mezz'ora d'immersione.

L'animale si mostra inerte e immobile, mentre continua il movimento ciliare della branchia.

L'atropina provoca forti e persistenti contratture, ed è poco adatta allo studio dell'attività muscolare, mentre la cocaina e l'idrato di cloralio, pur portando gradatamente, più rapidamente la prima, ad una anestesia completa in cui non è possibile più destare veri riflessi (è facile constatare la scomparsa dei riflessi incrociati) lasciano, specialmente l'idrato di cloralio, lungamente la muscolatura della Ciona eccitabilissima.

Ma l'azione del curaro è da ritenersi decisiva per il nostro assunto, poichè la sua azione, anche su animali integri, fa scomparire ogni attività riflessa ad effettori muscolari, e ci permette di osservare agevolmente le contrazioni dei vari gruppi muscolari dietro eccitazione diretta di essi, senza l'intervento del sistema nervoso, per la interruzione della giunzione neuro-muscolare.

I muscoli, esaminati in queste condizioni, mostrano, anche dopo una diecina di ore, una contrattilità esplicantesi con le modalità da me dimostrate di una irritabilità e contrazione locale diffondentesi, secondo il grado della stimolazione esercitata, più o meno attraverso le vie delle connessioni muscolari.

Quale è dunque la base fisiologica che dovrebbe porre fuori dubbio, secondo l'asserzione del Buddenbrock ⁽¹⁾, la esistenza di una rete nervosa periferica degli Ascidiacea?

Forse l'altra asserzione del Bethe ⁽²⁾, e di altri che l'hanno seguito, in cui la necessità di una tale rete si poggiava sull'errore, la cui rettificazione parmi oramai pacifica, che le Ascidie scervellate conservassero attività riflesse nella muscolatura somatica?

Lo studio della fisiologia della fibra muscolare degli Ascidiacei non ci impone nessuna necessità di supporre la presenza di una rete nervosa periferica, del resto da me dimostrata inesistente ⁽³⁾, ma ci conduce bensì, sulla via dei fatti, a riconoscere in questi animali la possibilità di movimenti possedenti un certo grado di coordinazione e connesso con la necessità stessa delle vie di trasmissione della trama muscolare.

(1) W. v. BUDDENBROCK, *Grundriss der Vergleichenden Physiologie*. 2. Auflage, Geb. Borntraeger, Berlin, 1937.

(2) BETHE, « Allgemein Anat. u. Physiol. der Nervensystems ». Leipzig, 1903.

(3) Vedi, oltre i miei precedenti lavori sul sistema nervoso dei Tunicati, anche: M. FEDELE, *Ancora sulla inesistenza di una rete nervosa periferica nei Tunicati*. « Rend. R. Accad. Lincei », 1937.

La eccitabilità diretta muscolare è oramai un problema risolto per la fisiologia, come non presenta più dubbi la conduzione dell'azione contrattiva attraverso le vie istesse della sostanza muscolare.

Le Ascidie ne porgono un esempio molto chiaro e dimostrativo, da me completamente chiarito da tutti i punti di vista: e con lo studio delle attività e con quello della costituzione morfologica dei muscoli e del sistema nervoso.

Loeb aveva già pensato ad una eccitabilità e conducibilità muscolare diretta in *Ciona*; io l'ho dimostrata, precisata e resa evidente: ai credenti nella favola di una rete diffusa periferica nei Tunicati non resta che rivagliare le loro ricerche, certamente pregevoli, sulla base dei fatti da me dimostrati, abbandonando un insostenibile errore, che le isterilisce.

La favola della esistenza di una rete nervosa periferica, di un neuro-epitelio in rapporto con l'attività della muscolatura somatica delle Ascidie, è finita!

Biologia. — *Studi di Biologia embrionale.* — II. *Differente comportamento di fronte all'anaerobiosi e normale assorbimento di ossigeno nelle diverse forme di Anfibi* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di ALDO SPIRITO, presentata dal Socio E. CARANO.

In una Nota preliminare del 1936 e in un lavoro in esteso recentemente pubblicato ⁽³⁾, ho riferito le mie esperienze relative ai processi di anaerobiosi durante lo sviluppo embrionale di alcuni Anfibi e dei Petromizonti. In tali ricerche è risultato un diverso comportamento, di fronte all'assenza di ossigeno o all'azione di soluzioni di KCN, a seconda della specie adoperata.

Si presentava logico quindi esaminare se e come queste differenze di comportamento si potessero mettere in rapporto a meccanismi intrinseci delle specie osservate, e, innanzi tutto, se le rispettive resistenze massime o minime all'assenza di O₂ potessero essere in relazione a un assorbimento piccolo o grande di tale elemento.

Queste idee sono state già prospettate nel lavoro precedente, e le ricerche descritte in questa Nota, che si occupa appunto dello studio del normale assorbimento di O₂, ne sono state la diretta conseguenza.

Le indagini degli AA. precedenti, pur su stadi embrionali di Anfibi (Bataillon, Godlewski, Bialaszewicz e Bledowski, Parnas e Krasinska, Brachet), sono state eseguite con apparecchi di vario tipo: tra i migliori noto il

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Embriologia comparate della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1937.

(3) Questi « Rendiconti », vol. XXIII, 1936; « Arch. Scienze Biol. », vol. 23, 1937.

microrespirometro di Winterstein, l'apparecchio di Barcroft, l'apparecchio di Warburg: con tutti però vi è sempre la necessità di usare un gran numero di esemplari per ottenere uno spostamento apprezzabile nel manometro. Mi si è presentata invece la fortunata occasione di poter eseguire le mie determinazioni seguendo una tecnica molto più precisa, grazie al nuovo microrespirometro di Stefanelli, il quale presenta caratteristiche preziose per studi di tale genere, inquantochè esso può essere usato per un singolo uovo o embrione. Si potrebbe obiettare che determinazioni eseguite contemporaneamente su molti esemplari (ciò che si verifica necessariamente quando si usino apparecchi poco sensibili), e quindi fornenti un valore medio, diano più affidamento: credo invece che anche poche determinazioni eseguite su singoli esemplari (con apparecchi adatti), ma concordanti tra loro a parità di tutte le condizioni di studio, abbiano un valore molto più rilevante.

Rimando il lettore ai lavori originali dello Stefanelli ⁽¹⁾ per la descrizione dell'apparecchio: riferisco solo alcune modalità riguardanti le ricerche da me eseguite.

Gli esemplari di cui si è voluto conoscere la quantità di ossigeno normalmente assunta in un determinato periodo, sono stati scelti, come era logico, allo stadio caratterizzato dalla presenza della piastra neurale; lo stesso cioè usato precedentemente nelle esperienze di anaerobiosi. Di più anzi, e per maggior rigore sperimentale, giovani neurule provenienti dagli stessi lotti, sono state (secondo la tecnica descritta nel lavoro precedente) poste in ambiente privo di ossigeno. In tale modo — riottenendo gli stessi risultati già riferiti — si è venuto a togliere l'evenienza di un qualsiasi fattore aberrante che potesse diminuire il valore del confronto tra resistenza all'assenza di ossigeno e entità dell'assunzione di questo elemento.

Prima di porre la neurula nell'apparecchio ne è stato misurato il diametro con un calibro munito di nonio.

Per la comparazione dei risultati è stato necessario eseguire tutte le determinazioni ad eguale temperatura: pertanto si è preferita quella di 20° per il bagno del termostato dove era posto il microrespirometro. Si è notata ogni volta anche quella dell'aria e la pressione atmosferica.

Dopo aver atteso alcuni minuti, in modo da portare tutto il sistema (apparecchio-neurula) alla temperatura del bagno, si sono iniziate le letture del manometro indicante le quantità di ossigeno assorbito (nelle camerette è stata posta altresì della carta bibula imbevuta di una soluzione di KOH al 20% in modo da escludere in queste prime ricerche qualsiasi calcolo relativo alla emissione di CO₂ da parte del materiale in esame). Le letture del manometro sono state eseguite ogni 4' con un intervallo di un minuto occorrente per riportare il manometro a livello. Poichè le misurazioni sono state protratte per parecchie ore, ogni tre o quattro letture consecutive si

(1) « Journ. Exp. Biol. », vol. 14, 1937; « La Ricerca Scientifica », vol. 1, ser. II, 1937.

sono poste le camerette dell'apparecchio in comunicazione con l'esterno, rifacendo altri gruppi di letture ad intervalli variabili dai 30' ai 45'. In tal maniera si è avuta la possibilità di ottenere gli esatti valori dell'assorbimento dell'ossigeno da parte degli esemplari studiati durante tutto, o quasi tutto, il periodo della neurulazione: il fatto che durante tale periodo non abbia potuto rilevare differenze di sorta tra le varie letture mi ha permesso un più facile uso dei risultati ottenuti, che se vi fossero stati aumenti, o comunque variazioni sensibili, dell'assunzione di ossigeno.

Per ogni specie, le neurule sono state prescelte ciascuna da un lotto differente: il più delle volte quindi il materiale esaminato ha presentato differenze di grandezza. Pertanto nella tabella che segue, data l'importanza che ha questo fattore per le comparazioni successive, è indicata per ogni specie, a lato del valore dell'O₂ assorbito, la grandezza del diametro delle neurule espressa in millimetri. I volumi di ossigeno assunto sono riportati a 0° e a 760 mm. di gas secco.

TABELLA I.

Specie	Diametro della neurula in mm.	mm3. di O ₂ assunto dalla neurula in 4'
<i>Bufo viridis</i>	1.6	0.0238 *
» »	1.6	0.0238
<i>Bufo vulgaris</i>	2	0.0265 *
» »	2.4	0.0285
<i>Discoglossus pictus</i>	1.8	0.0290
» »	1.9	0.0308 *
<i>Rana esculenta</i>	1.5	0.0219
» »	1.7	0.0233
» »	1.8	0.0246 *
<i>Rana agilis</i>	2	0.0177
» »	2	0.0178 *
» »	2.2	0.0199
<i>Hyla arborea</i>	1.5	0.0125 *
» »	1.5	0.0125
<i>Axolotl</i>	2.5	0.0364
»	2.5	0.0377 *

NB. - I valori contrassegnati dall'asterisco sono stati riprodotti graficamente nella fig. 1.

Nella fig. 1 i cerchi disegnati sotto ogni valore di ossigeno assunto vogliono rappresentare i reciproci rapporti di grandezza delle neurule delle varie specie alle quali quei valori si riferiscono.



Fig. 1.

In un successivo lavoro in esteso tratterò più diffusamente di alcuni punti inerenti alla valutazione dei risultati ottenuti: fin da ora però è necessario qualche chiarimento.

Innanzitutto vi è la questione della diversa grandezza delle neurule esaminate. Questo fatto potrebbe rendere disagiata il confronto tra i diversi valori indicanti la quantità di ossigeno assorbito in specie diverse, le cui rispettive neurule presentano a volte notevole differenza di grandezza. Ma a questo proposito voglio ricordare alcune ricerche recenti di Stefanelli il quale si è preoccupato appunto di studiare negli Anfibii il rapporto tra ossigeno assunto e grandezza del germe durante i primi periodi dello sviluppo. Questo A. ha notato⁽¹⁾ che vi è un rapporto circa costante, in esemplari di *Bufo viridis* di diametro diverso, tra O₂ assunto e raggio dell'uovo: se si considerano i valori da me trascritti nella tabella I, si può dimostrare con calcolo che, anche allo stadio di neurula e nelle specie da me usate, questo rapporto è rilevabile con buona approssimazione. Pertanto nella fig. 2 sono indicate le quantità di O₂ assorbite sempre in 4' da neurule delle sotto notate specie, ma tutte riportate allo stesso diametro di 2 mm.

Ciò premesso vediamo come si possono considerare i risultati ottenuti nei riguardi del quesito posto a introduzione di queste ricerche. Un'occhiata alla tabella e alle figg. 1 e 2 ci mostrano chiaramente come si possa scartare l'idea che le resistenze massime o minime delle neurule delle varie

(1) « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », 1937; « Riv. Biol. », 1937.

specie (riscontrate nelle ricerche precedenti), di fronte all'assenza di ossigeno, debbano essere attribuite al fatto che l'entità del normale assorbimento di questo elemento sia rispettivamente piccola o grande.

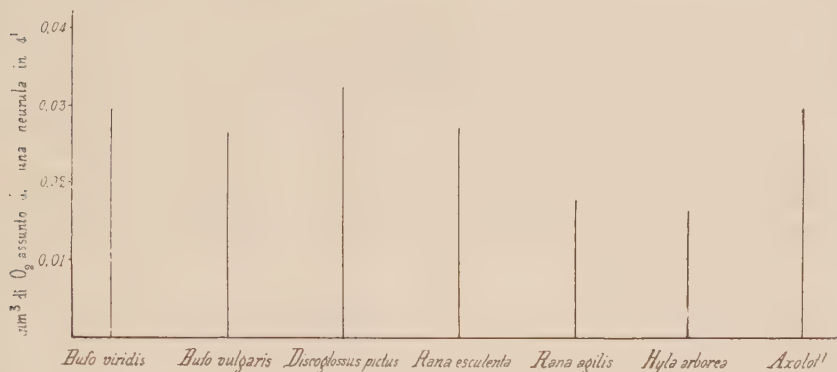


Fig. 2.

Infatti se teniamo presente i risultati riferiti nella tabella e graficamente riprodotti nella fig. 1 e compariamo, per quel che ho detto più sopra, i valori dell'O₂ assunto in un determinato tempo da neurule di specie diversa, ma con diametro uguale o presso a poco uguale, vediamo che in *Bufo vulgaris* (diametro mm. 2) e in *Discoglossus pictus* (diametro mm. 1.9), i cui esemplari a questo stadio possono più o meno svilupparsi in ambiente privo di ossigeno, la quantità di O₂ assunto, a parità di temperatura e di tutte le altre condizioni inerenti all'uso degli apparecchi, è superiore a quella notata in *Rana agilis* (diametro mm. 2), le cui neurule si arrestano subito in assenza dello stesso elemento.

Se poi ci valiamo dei risultati riferiti nella fig. 2, in cui sono più facilmente comparabili le quantità di ossigeno assunto dalle neurule delle varie specie usate, perchè riferite tutte a esemplari aventi uno stesso diametro (2 mm.), possiamo vedere per esempio che gli esemplari di *Discoglossus*, i quali hanno mostrato le maggiori possibilità di sviluppo in assenza di O₂, assumono, sempre a parità di tutte le condizioni di studio, maggior quantità di questo elemento non solo delle specie (*Bufo viridis* e *B. vulgaris*) le quali hanno pure un certo sviluppo in anaerobiosi, ma anche di quelle (*Rana esculenta*, *R. agilis*, *Hyla arborea*, *Axolotl*) le cui neurule si arrestano nello sviluppo in assenza di O₂ ⁽¹⁾.

Ma c'è un'altra questione da considerare nella valutazione dei risultati: si tratta della durata diversa della neurulazione, pur a parità di temperatura,

(1) Sarebbe stato molto interessante conoscere i dati riferentisi a neurule di *Petromyzon fluviatilis* (in assenza di O₂ si arrestano nello sviluppo), ma purtroppo mi è venuto a mancare, per cause accidentali, il materiale necessario.

nelle varie specie usate. In tal caso quindi si potrebbe avere che i valori indicanti le rispettive quantità di ossigeno assunto in uno stesso determinato periodo di tempo possono essere alterati nei reciproci rapporti se riferiti a tempi diversi: si potrebbe, per esempio, verificare il caso di una specie, le cui neurule assumessero a parità di grandezza ossigeno in quantità doppia in confronto a quella assorbita in un'altra specie, ma la cui neurulazione durasse un terzo del tempo di quello necessario per l'altra; in tal caso si avrebbe che nella prima specie il valore globale di O_2 assunto durante il processo della neurulazione è minore che nella seconda.

Ma se pur poteva avere carattere prudenziale prospettare tale questione vediamo che, per lo meno in alcune delle specie da me usate, ciò non altera le considerazioni fatte: se ci riferiamo infatti nuovamente ai risultati ottenuti in *Discoglossus pictus* (diametro mm. 1,9) e in *Rana agilis* (diametro 2 mm.) e calcoliamo rispettivamente le quantità di ossigeno assunto durante tutto il periodo della neurulazione (durata rispettivamente 3 ore e 5 ore) abbiamo i seguenti valori: mmc. 1,38; mmc. 1,33. Anche in tal caso quindi la valutazione fatta antecedentemente, pur con l'introduzione di un nuovo fattore, è rimasta inalterata: per i nostri fini ciò è più che sufficiente per dimostrare come la maggior resistenza all'assenza di O_2 delle neurule di *Discoglossus pictus* in confronto a quelle di *Rana agilis*, non possa essere in funzione del fatto che le prime assumano meno ossigeno delle seconde, essendosi dimostrato proprio il contrario.

In conclusione quindi dalle presenti ricerche è risultato che l'entità del normale assorbimento di O_2 da parte delle neurule delle varie specie usate non può essere messa in relazione con i rispettivi differenti comportamenti rilevati nell'anaerobiosi, per la spiegazione causale di essi. Le esperienze infatti hanno chiaramente dimostrato che a massime o minime resistenze delle neurule delle varie specie di fronte all'assenza di O_2 non corrispondono quantità piccole o grandi di tale elemento assorbito.

Zoologia. — *Sulla origine della membrana peritrofica dell'intestino di «Reticulitermes lucifugus» (Rossi)*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di ELENA PLATANIA, presentata dal Socio A. RUSSO.

L'origine della peritrofica degli insetti è tuttora molto controversa. Infatti essa secondo alcuni AA. è un derivato dell'intestino anteriore, secondo altri si origina dalla cosiddetta *piega anulare*, secondo altri ancora da tutto l'epitelio mesointestinale.

Dopo aver studiato⁽³⁾ la natura chimica di questa formazione in «*Reticulitermes lucifugus*» (Rossi), ho creduto opportuno indagare il processo della sua formazione nella stessa specie, tanto più che sulle Termiti non vi sono al riguardo che le ricerche di Montalenti⁽⁴⁾.

Secondo le mie osservazioni la peritrofica si origina da un anello di speciali cellule (piega anulare degli AA.), poste attorno alla base della valvola cardiaca e che, come dimostro nel lavoro *in extenso* di prossima pubblicazione, appartengono all'intestino anteriore. Queste cellule nella metà basale sono povere di citoplasma, che è invece addensato nel terzo distale, dove si presenta a volte con una struttura finemente granulare, rilevabile specialmente con la fissazione in liquidi osmici. Esse emettono una sostanza omogenea, o finemente granulare, che si rinviene spesso sulla loro superficie o nel lume, a poca distanza da esse. Tale sostanza, che si colora in violaceo con l'ematosilina, in azzurro col Mallory e in verdastro col Galeotti, rapidamente condensandosi assume l'aspetto di una sottile lamina, che si può vedere a volte aderente alla superficie delle cellule (fig. 1). Questo secreto non dà le reazioni del muco che, come ho dimostrato nella precedente Nota, entra a far parte della peritrofica assieme con la chitina. È dunque quest'ultima sostanza che esse elaborano, il muco invece proviene dalle cellule mesointestinali e si incorpora nella lamina chitinoso, man mano che questa discende lungo l'intestino. Ciò è anche in pieno accordo con quanto ammettono la massima parte degli AA., compreso il Montalenti, e cioè che la secrezione della chitina è una prerogativa delle cellule ectodermiche. Ed invero non si può ritenere ancora dimostrato che anche le

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia della R. Università di Catania.

(2) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1937.

(3) E. PLATANIA, *Sulla natura della peritrofica di «Reticulitermes lucifugus» (Rossi)*. «Atti R. Acc. Naz. Lincei», Cl. Sc. Fis. Mat. Nat., vol. XXIV, 1936.

(4) G. MONTALENTI, *L'origine e la funzione della membrana peritrofica dell'intestino degli Insetti*. «Boll. Ist. Zool. Roma», vol. 8, 1930.

cellule mesointestinali, entodermiche, possano secernere chitina, come vorrebbe Dehn ⁽¹⁾.

Anche Montalenti ⁽²⁾, in *Calotermes flavicollis* e *Termes lucifugus* fa derivare la peritrofica dalle cellule della piega anulare, ma a parte il fatto che egli considera quest'ultima come il primo tratto del mesenteron, egli trova che la secrezione da cui la peritrofica deriva « è dello stesso tipo di quella delle altre cellule del mesenteron, prevalentemente globulare, e si compie con le stesse modalità: i globuli secreti si avvicinano, si fondono e solidificano costituendo appunto la membrana ».



Fig. 1. — Sezione longitudinale dell'epitelio esterno della valvola cardiaca, *vc*, della piega anulare, *p*, e di un gruppo di cellule mesointestinali, *m* di *Reticulitermes lucifugus* (operaia). Nel lume, in corrispondenza della piega, si vede del secreto e una lamina neoformata di peritrofica, *l*. Fissaz. Zenker acetico, coloraz. Mallory. OC. 4C, obb. 8*, proiezz. piano tavolo lavoro.

In corrispondenza delle cellule della piega anulare non ho mai visto secrezione globulare, che è invece molto evidente nell'epitelio mesointestinale, del quale è esclusiva, e in cui ha una funzione enzimatica, come risulta dalle ricerche dello stesso A. ⁽³⁾. Posso pure escludere che si formi, come vorrebbe Aubertot ⁽⁴⁾, per delaminazione dell'epitelio del mesenteron. Come prova della sua tesi, l'A. porta solo la quadrettatura che egli nota sulla peritrofica all'inizio della sua formazione, e che è determinata dall'impronta delle cellule mesointestinali. Anche io ho osservato a volte questa apparenza,

(1) M. DEHN, *Untersuchungen über die Bildung der peritrophischen Membran bei den Insekten*. « Z. Zellforsch. u. micr. Anat. ». Bd. 19, 1933.

(2) Loc. cit.

(3) G. MONTALENTI, *Gli enzimi digerenti e l'assorbimento delle sostanze solubili nell'intestino delle Termiti*. « Arch. Zool. Ital. » vol. 16, 1932.

(4) M. AUBERTOT, *Recherches sur les Péritrophiques des Insectes, en particulier des Diptères*. Nancy, 1934.

ma non mi sembra sufficiente a provare l'origine mesointestinale. Infatti l'impronta può facilmente essere determinata dal semplice contatto della membrana, e più precisamente del suo strato mucoso, con la superficie delle cellule.

La peritrofica di *Reticulitermes lucifugus* è stratificata. Sulle sezioni longitudinali dell'intestino ho rilevato molto spesso che alla superficie esterna di una lamina di peritrofica, che si prolungava senza interruzione sino all'ileo, ne aderivano altre meno lunghe. Sulle sezioni trasversali e longitudinali ho visto inoltre che la membrana è più spessa nel primo tratto del mesenteron che nei successivi, appunto perchè è costituita da un maggior numero di lamine. Da queste osservazioni si può concludere che la peritrofica, al contrario di quanto asserisce Montalenti,⁽¹⁾ non è monostratificata e non si produce continuamente, ma ad intervalli. È probabile che il muco serva a cementare le diverse lamine chitinoose, man mano che si vanno formando per attività della piega anulare. Da questo punto di vista almeno possiamo asserire che la peritrofica di *Reticulitermes lucifugus* ha una doppia origine: la parte chitinoso deriva dalle cellule della piega anulare, il muco dalle cellule dell'intestino medio. Questo dunque partecipa in modo diretto alla formazione della peritrofica. Montalenti⁽¹⁾ crede invece che le cellule del mesenteron partecipano solo indirettamente alla formazione della membrana, mediante gli orli e i residui di elementi cellulari che si distaccano e vi si incorporano più o meno intimamente. Anche io ho spesso osservato questi fenomeni, ma li ritengo più che altro accidentali, e del resto l'adesione di frammenti cellulari deve essere facilitata dalla presenza del muco.

Dato che la peritrofica ha origine all'inizio del mesenteron, e si estende per tutta la sua lunghezza, sino all'ileo, bisogna porsi il quesito con quale meccanismo essa si avanzi lungo l'intestino. Montalenti⁽²⁾ ritiene che la membrana avanzi solo per la spinta esercitata dal secreto, man mano che viene emesso. Tale spiegazione ritengo sia per lo meno insufficiente, dato che, come si è già detto, la produzione della membrana non è continua, ma periodica. Osservando al microscopio parecchi intestini appena isolati, ho notato che la valvola cardiaca eseguiva ritmicamente un certo numero di caratteristici movimenti; si aveva dapprima una contrazione in senso longitudinale, seguita immediatamente da una estensione, che riportava la valvola alla sua lunghezza normale; seguivano due o tre rapide contrazioni ed espansioni circolari della parte distale, e quindi il fenomeno ricominciava. Questi movimenti, conformemente alle idee di Müller,⁽³⁾ possono avere lo scopo di costringere gli alimenti a passare in piccole quantità e gradatamente nel mesenteron. Penso però che essi ne abbiamo ancora un altro,

(1) Loc. cit., 1930.

(2) Loc. cit., 1930.

(3) M. MÜLLER, *Rhyphus und Mycetobia mit besonderer Berücksichtigung des larvalen Darmes*. «Arch. für Naturgesch.», Abt. A. 1922.

e precisamente quello di distendere la peritrofica, definendone la struttura laminare, man mano che essa si va costituendo, e di spingerla gradatamente verso il basso. La valvola, per la sua forma allungata, è molto adatta a compiere questa funzione di pressa, la quale è resa ancor più verosimile dal fatto che tra essa e la parete intestinale s'interpone solo uno strettissimo spazio. A conferma di questa funzione si può addurre ancora il fatto che, nei preparati, assai di frequente si vede la peritrofica aderire alla superficie irregolare dell'intima chitinoso della valvola. Movimenti analoghi a questi da me descritti sono stati osservati da Müller⁽¹⁾ nella valvola cardiaca di *Rhyphus* e *Mycetobia* e più recentemente da Wigglesworth⁽²⁾ in alcuni Ditteri, nei quali secondo l'A. avrebbero lo stesso ufficio di pressa, che io ammetto in *Reticulitermes lucifugus*.

Fisiologia (Chimica biologica). — *Sul contenuto in vitamina antineuritica (B¹) di grani italiani*⁽³⁾. Nota⁽⁴⁾ di A. BAGLIONI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Il contenuto in vitamina antineuritica (B¹) del grano, e le variazioni di tale contenuto in rapporto al suolo ed alle condizioni culturali, sono state studiate dagli autori americani R. Mc. Carrison e B. Viswanath⁽⁵⁾, i quali avrebbero trovato che il grano ottenuto da terreni concimati con concime animale ha un contenuto in vitamina B¹ più elevato, del 15 % circa, che non il grano ottenuto da terreni concimati chimicamente.

C. H. Hunt e W. Hosack⁽⁶⁾ avrebbero, per contro, osservato che il grano ottenuto dai terreni concimati con fosfato acido, da solo o insieme con cloruro potassico e carbonato sodico, dimostra un contenuto assai alto di vitamina antineuritica.

V. Famiani⁽⁷⁾ ha studiato anch'egli il contenuto in vitamina antineuritica del grano, rivolgendo però la sua attenzione ad alcune varietà di grani

(1) Loc. cit.

(2) V. B. WIGGLESWORTH, *The formation of the peritrophic membran in insects, with special reference to the larvae of Mosquitoes (Dipt)*, «Quart. J. Micr. Sci.», London, vol. 73, 1930.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma. A parte delle ricerche ha collaborato l'allievo N. TORTORA, facendone oggetto di tesi di laurea.

(4) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1937.

(5) R. MC. CARRISON e B. VISWANATH, *The effect of Manurial Conditions on the Nutritive an Vitamin Values of Millet and Wheat*, «Ind. Journ. Med. Res.», 14, 351, 1926.

(6) C. H. HUNT e W. HOSACK, *The influence of Fertilisers on the Vitamin B content of Wheat*, «Ohio Agric. Exp. Sta. Bull.», 3, 415, 1927.

(7) V. FAMIANI, *Sul contenuto in vitamina antineuritica (B¹) di alcune varietà di grano italiano*, «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», XXII, 93, 1935.

nostrali, provenienti tutti dalla stessa zona e ottenuti nelle medesime condizioni di cultura e di concimazione. Egli, usando come metodo di dosaggio quello fondato sul criterio del quoziente beri-berico di G. Amantea, ha, precisamente, diretto le sue esperienze a studiare le variazioni del contenuto in vitamina antineuritica di otto varietà di grani « Strampelli » ottenuti tutti nella medesima zona agraria (Rieti) e in condizioni di cultura uguali.

Di tali grani due, Aziziah e Cappelli, appartenevano alla specie dei grani duri, gli altri, Carlotta, Fieramosca, Mentana, Fiume, Damiano e Villa Glori, alla specie dei grani teneri.

A conclusione delle sue esperienze, Famiani pose in rilievo il fatto che, pur potendosi dimostrare per tutti i grani studiati un maggiore o minore contenuto in vitamina antineuritica B_1 , tale contenuto si era dimostrato più alto, in genere, per i grani teneri che non per i grani duri. Potè, infatti, così ordinare, in base al loro contenuto decrescente in vitamina B_1 , le predette varietà di grano: 1° Mentana, Carlotta e Damiano; 2° Fieramosca e Fiume; 3° Cappelli, Aziziah e Villa Glori.

L'importanza dell'argomento, specialmente per ciò che riguarda uno studio comparativo sul contenuto vitaminico dei cereali nostri, ci ha indotto a riprendere la questione, onde arrearci, prendendo in considerazione altre qualità di grani, un ulteriore contributo.

Analogamente al Famiani, abbiamo ritenuto utile sperimentare, in questa prima serie di ricerche, con grani ottenuti tutti in una medesima zona agraria, e in condizioni di cultura uguali: e abbiamo utilizzato, precisamente, dodici varietà di grani « Strampelli » provenienti dalla zona di Rieti e forniti dall'Istituto Nazionale di Genetica per la Cerealicultura. Delle dodici varietà studiate, otto appartengono alla specie dei grani duri: Aziziah, Cappelli, Cencelli, Dauno III, Dauno IV, Garigliano, Sabaudia, Ausonia, e quattro alla specie dei grani teneri: Balilla, Carlotta, Catria e Damiano.

Al pari del Famiani per lo studio comparativo del contenuto in vitamina antineuritica (B_1) delle diverse varietà di grani, abbiamo seguito il metodo che G. Amantea ha suggerito, basandosi sulla nozione del « quoziente beri-berico » (Q_b). Rimandando, per i dettagli di tecnica ai lavori originali ⁽¹⁾, rileviamo semplicemente come tale metodo possa fornire un indice sufficientemente esatto, e praticamente assai utile in tutti i casi, in cui, come nel nostro, si debbano eseguire ricerche quantitative sul fattore B_1 , con metodo comparativo.

In colombi adulti, in buono stato di salute e di nutrizione, determinammo, pertanto, in un primo tempo, il quoziente beri-berico normale,

(1) G. AMANTEA, *Sul fattore antineuritico (B_1) e sul concetto di « quoziente beri-berico » (Q_b)*. « Rend. R. Accad. Naz. dei Lincei », XVIII, 317, 1933; ID., *La determinazione del « quoziente beri-berico » (Q_b)*. « Notizie di tecnica », « Ibidem », XVIII, 393, 1933; ID., *Sul modo di dosare la vitamina antineuritica (B_1), applicando la nozione del « quoziente beri-berico » (Q_b)*. « Ibidem », 1935.

alimentandoli esclusivamente con riso brillato e lavato, sino alla comparsa dei primi disturbi beri-berici, che curammo efficacemente somministrando generose dosi (gr. 3 o più) di lievito di birra: in quasi tutti i nostri colombi tale quoziente normale fu determinato più volte, così da poter avere la massima sicurezza del valore di esso. Scegliemmo, quindi quegli animali in cui tale valore aveva oscillato, in due o tre prove, entro limiti minimi, e su di essi iniziammo una nuova esperienza, durante la quale, in sostituzione di una uguale quantità di riso brillato e lavato, somministrammo, quotidianamente, e per i primi dieci giorni di esperienza, gr. 3 di grano di ciascuna varietà. A partire dall'undicesima giornata e fino alla comparsa dei primi segni netti di beri-beri, gli animali furono alimentati quotidianamente con solo riso brillato e lavato. Nel caso in cui il periodo del vomito iniziasse prima dell'undicesima giornata e che, pertanto, qualche chicco di grano venisse rivomitato, esso era rimbeccato agli animali, in maniera che la quantità totale di gr. 30 di grano era comunque garantita.

I risultati delle nostre esperienze sono raccolti nell'unita tabella. In essa abbiamo fatto precedere i valori del quoziente beri-berico normale e successivamente i valori e gli eventuali spostamenti del quoziente stesso per aggiunta al riso brillato di gr. 30 di grano di ciascuna varietà.

Numero dell'animale	Valori normali del Q_b	Valori e spostamenti del Q_b ottenuti per aggiunta al riso di gr. 30 di grano			
		Varietà di grano	Q_b	Spostamento	Osservazioni
Colombo 1	0.84-0.89-0.91	Aziziah	1.02	+ 0.11	grano duro
» 2	0.63-0.72	Cappelli	0.96	+ 0.24	» »
» 3	0.68-0.70	Cencelli	0.96	+ 0.26	» »
» 4	0.78-0.78-0.89	Dauno III	0.89	nessuno	» »
» 5	0.77-0.74	» IV	0.70	»	» »
» 6	0.84	» III	0.86	»	» »
» 7	0.81	» IV	0.80	»	» »
» 2	0.63-0.72	Garigliano	0.75	»	» »
» 5	0.77-0.74	Sabaudia	0.78	»	» »
» 4	0.78-0.78-0.89	Ausonia	0.87	»	» »
» 6	0.84	Balilla	1.01	+ 0.17	grano tenero
» 7	0.81	Carlotta	0.99	+ 0.18	» »
» 2	0.63-0.72	Catria	0.97	+ 0.25	» »
» 8	0.67	Damiano	0.90	+ 0.23	» »

Risulta subito evidente, dall'osservazione dei dati riportati, come cinque dei grani presi da noi in considerazione, e precisamente quelli delle varietà Dauno III, Dauno IV, Garigliano, Sabaudia e Ausonia, non abbiano provocato, per lo meno nella quantità complessiva di gr. 30, ripartita in dieci giorni, alcuno spostamento del quoziente beri-berico: per due di essi (Dauno III e Dauno IV) il risultato negativo è stato confermato da duplice prova. Degno di considerazione il fatto che tutti questi cinque grani appartengono alla categoria dei grani duri. Per gli altri tre grani che figurano tra i duri (Aziziah, Cappelli e Cencelli) si ebbe, in seguito alla loro somministrazione, sempre nella quantità complessiva di gr. 30, uno spostamento in alto del quoziente beri-berico: ma esso fu assai modesto (di 0.11) per la varietà Aziziah, mentre fu di maggiore entità, e cioè di 0.24 e di 0.26, rispettivamente, per la varietà Cappelli e per la varietà Cencelli.

I quattro grani appartenenti alla categoria dei teneri (Balilla, Catria, Carlotta e Damiano) hanno, invece, tutti provocato uno spostamento in alto del quoziente beri-berico nei colombi, ai quali furono pur essi somministrati nella quantità complessiva, ripartita in dieci giorni, di gr. 30. Tale spostamento è risultato, precisamente, di 0.17 per la varietà Balilla, di 0.18 per la varietà Carlotta, di 0.25 per la varietà Catria e di 0.23 per la varietà Damiano.

Crediamo, dunque, che da queste nostre osservazioni possa considerarsi confermato il rilievo già fatto da V. Famiani, secondo cui i grani teneri si dimostrano, in genere, più ricchi in fattore antineuritico B¹ che non i grani duri: il fatto che la somministrazione di gr. 30 delle cinque varietà Dauno III, Dauno IV, Garigliano, Sabaudia e Ausonia, non abbia portato alcuno spostamento del quoziente beri-berico, è per noi indice chiaro di un minore contenuto in vitamina antineuritica che queste varietà presentano nei confronti delle varietà tenere. D'altro canto, però, va pure tenuto in considerazione il dato sperimentale, che fra le stesse varietà di grani duri ne esistono alcune (Aziziah, Cappelli e Cencelli) le quali dimostrano un contenuto in fattore antineuritico, che, specialmente per le ultime varietà, è molto vicino a quello presentato, in genere, dalle varietà tenere.

Fisiologia (Chimica biologica). — *Tiroidizzazione e beriberi sperimentale nel colombo* ⁽¹⁾ — Nota ⁽²⁾ di V. CAPRARO, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Himwich, Goldfarb e Cowgill ⁽³⁾, studiando l'effetto della somministrazione di tiroide sulla anoressia dei cani (caratteristica della avitaminosi B¹ in questi animali), constatarono che, con l'aumento del metabolismo dovuto all'ingestione di tiroide, si ha un parallelo aumento del consumo in vitamina B¹.

Questo rilievo si armonizza con il concetto di Osborne e Mendel ⁽⁴⁾, e di Cowgill e Clotz ⁽⁵⁾, secondo i quali ultimi si può esprimere con formule matematiche la relazione tra metabolismo materiale (ed energetico) e consumo di vitamina B¹; e si armonizza ancora con il concetto di G. Amantea ⁽⁶⁾, il quale, fin dal 1922, ha sostenuto, che la vitamina B¹ è indispensabile al normale svolgimento dei processi metabolici, in connessione coi quali va incontro a necessaria usura o (riduzione), e precisamente sempre in misura ben definita e proporzionale alla entità complessiva del consumo di alimenti (o di materiali di riserva).

Dalle numerose osservazioni di G. Amantea e allievi ⁽⁷⁾ è risultato, infatti, che, in colombi adulti normali, con riserva iniziale massima di vitamina B¹, i primi disturbi beriberici, di regola compaiono solo quando il consumo totale — cioè la somma di alimento effettivamente elaborato, più i materiali attinti dai normali depositi, ed espressi dalla diminuzione del peso corporeo — è divenuto corrispondente ad una determinata percentuale (70–100%) del peso iniziale dell'animale. Cosicchè indicando con C il consumo complessivo, e con P il peso iniziale dell'animale, si ha nel rapporto $\frac{C}{P}$ un valore, che l'autore ha indicato con Qb (quoziente beriberico), che è variabile tra 0,70 e 1 per colombi normali adulti, e si presenta per uno

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1937.

(3) HIMWICH, GOLDFARB e COWGILL, *The effect of Thyroid administration upon the anorexia characteristic of lack of undifferentiated vitamin B*. « Amer Journ. of Physiol. », 1931–32, vol. 99, p. 689.

(4), (5) Citati da HIMWICH, GOLDFARB e COWGILL, loc. cit.

(6) G. AMANTEA, *Ricerche sperimentali sul cosiddetto beriberi dei colombi*. « Riv. di Biol. », 1922, vol. 4, p. 662.

(7) G. AMANTEA, *Sul fattore antineuritico B¹ e sul concetto di quoziente beriberico (Qb)*. « Rendic. Acc. Naz. Lincei », 1933, vol. XVIII, ser. 6^a, sem. II, fasc. 7–8.

stesso animale, a parità di condizioni sperimentali, sempre pressochè costante in prove successive.

A noi è sembrato pertanto interessante accertare, se il valore di questo rapporto rimanga o non immutato, facendo intervenire ad arte, durante il corso delle esperienze, fattori esogeni od endogeni, capaci di modificare la normale entità del metabolismo dell'animale in esperimento.

È ovvio, da quanto abbiamo premesso, che un aumento od una diminuzione del Qb stia ad indicare, rispettivamente, un'usura più o meno rilevante e rapida della riserva di vitamina B¹ per una stessa quantità di materiali nutritivi metabolizzati.

Abbiamo incominciato coll' esplorare l' effetto della somministrazione di tiroide (tiroidizzazione).

Le esperienze sono state condotte su sette colombi adulti. Secondo quanto esige la tecnica per l' accertamento del Qb — ampiamente descritta da G. Amantea nella ricordata Nota, a cui rimandiamo per maggiori dettagli —, prima di ogni esperienza, gli animali venivano opportunamente preparati, in maniera da portare al massimo la rispettiva carica o riserva di vitamina B¹. A tale scopo, durante i cinque o sei giorni precedenti ciascuna esperienza, ad ognuno si somministravano giornalmente, insieme con trenta g di grano, due o tre g di lievito di birra di accertata attività antineuritica. Terminato il periodo di preparazione, si assumeva esattamente il peso corporeo e si iniziava l' esperienza. Nelle prime prove si somministrava unicamente riso brillato e lavato, nella dose di trenta g giornalieri, allo scopo di determinare, per ogni animale, il rispettivo Qb normale. Nelle prove successive, che si eseguivano sugli stessi animali, interponendo opportuni intervalli, alla dose giornaliera di trenta g di riso, venivano aggiunti g 0,10—0,30 di tiroide di bovini, dissecata a bagnomaria. Ogni grammo di tiroide secca corrispondeva a g 3,05 circa di tiroide fresca.

Per quanto riguarda i risultati ottenuti (tabella 1) diremo anzitutto, che è stata evidente l' attività della tiroide adoperata. I colombi infatti, durante la tiroidizzazione hanno presentato un metabolismo in genere più accentuato, che si è rivelato con una perdita di peso corporeo maggiore di quella presentata dagli stessi animali nelle prove di accertamento del Qb normale. Inoltre, pochi giorni dopo l' inizio della somministrazione di tiroide, gli animali hanno presentato spiumaggio più o meno abbondante: anche questo può considerarsi come un segno sicuro dell' attività della tiroide somministrata (1).

Per ciò che concerne il rapporto $\frac{C}{P}$ espresso da Qb, questo non ha subito, per effetto della tiroidizzazione, sensibili variazioni nei casi, in cui la

(1) GIACOMINI (citato da M. BENAZZI). *Osservazioni sulla istofisiologia della ghiandola tiroide*. « Arch. Zoolog. », 1929, vol. XIII, p. 475.

TABELLA I.

Colombo numero	Senza tiroide					Con tiroide					Quantità di tiroide sommini- strata al giorno g
	Peso iniziale g	N. giorni alimenta- zione ori- zanica	Peso corporeo perduto g	Riso elaborato g	Q_b	Peso iniziale g	N. giorni alimenta- zione ori- zanica	Peso corporeo perduto g	Riso elaborato g	Q_b	
1°	480	26	100	350	0.94	465	23	178	290	1.0	0.10 - 0.15
2°	460	25	50	390	0.96	425	18	140	247	0.91	
3°	405	15	60	225	0.70	400	13	100	182	0.70	
4°	410	18	30	338	0.90	415	14	100	275	0.90	
5°	350	15	45	250	0.84	355	17	80	265	0.97	0.20 - 0.30
6°	475	15	35	300	0.70	410	17	110	273	0.93	
7°	520	15	45	290	0.64	440	17	160	266	0.96	
4°	440	24	15	545	1.27	450	27	140	488	1.39	

quantità di tiroide somministrata è stata di g 0,10–0,15 per giorno. Nei casi invece, in cui la quantità di tiroide è stata di g 0,20–0,30 per giorno, si è notato un evidente aumento del Qb, ossia del rapporto $\frac{C}{P}$.

In base alle esperienze finora eseguite non siamo però in grado di precisare, se quest'ultimo risultato sia da ascrivere effettivamente all'azione specifica della tiroide, o piuttosto alla eventuale presenza di una certa quantità di vitamina B¹ nella tiroide stessa somministrata.

Ci limitiamo perciò a fissare intanto il fatto, proponendoci di meglio discuterne il significato, sulla base di nuove indagini, in cui sarà utilizzata la tiroxina in luogo della tiroide.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1937 (Anno XV).

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Matematica (Geometria). — *Osservazioni su alcune « geometrie finite »*. Nota I ⁽¹⁾ del Corrisp. G. FANO.

1. Nella mia Memoria: *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva*... ⁽²⁾ ho considerato fra altro alcune configurazioni di un numero finito di elementi (punti, rette, ...) che soddisfano alle consuete proprietà di appartenenza (o incidenza) degli elementi omonimi di un piano o spazio proiettivo; in particolare « piani » contenenti $n^2 + n + 1$ punti e un egual numero di rette, tali che ad ogni retta appartengono $n + 1$ di questi punti e ad ogni punto $n + 1$ rette, e due elementi omonimi ne individuano sempre, senza eccezioni, uno di nome diverso che ad essi appartiene. In questo piano (o spazio) sono perciò applicabili e univoche le consuete operazioni di proiezione e sezione; vi si possono definire i gruppi armonici (mediante quadrangoli o quadrilateri costruttori), e due gruppi armonici sono sempre proiettivi.

Lo studio di queste ed altre « geometrie finite » è stato ripreso con più ampio programma e sviluppo, inclusi rappresentazione analitica, studio di gruppi proiettivi, e anche talune questioni di ordinamento e congruenza, nel 1904-07 da O. VEBLEN e altri geometri ⁽³⁾, e in questi ultimi anni da

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1937.

(2) « Giornale di Matematiche », vol. 30, 1892, p. 106.

(3) VEBLEN, « Amer. Math. Soc. Trans. », vol. 5, 1904, p. 343; VEBLEN-BUSSEY, « ibid. », vol. 7, 1906, p. 241; VEBLEN, « ibid. », vol. 8, 1907, p. 366; VEBLEN e MACLAGAN-WEDDERBURN, « ibid. », vol. 8, p. 379. Ved. anche la Nota di B. LEVI a p. 356 di questo ultimo volume; nonchè il precedente lavoro di E. H. MOORE in « Amer. Journ. of Mathem. », vol. 18, 1906, p. 264.

geometri tedeschi (R. BALDUS, H. LIEBMANN, M. STECK⁽¹⁾). I « sistemi di Veblen » $S(v^2 - v + 1 | 2 | v)$, così chiamati da STECK, coincidono appunto, per $v = n + 1$, coi miei « piani » sopra indicati⁽²⁾.

Nella mia Memoria citata ho pure rilevato (per la prima volta) che l'ipotesi che il coniugato armonico di un punto rispetto ad altri due allineati con esso coincida col primo di questi è compatibile coi soliti postulati di appartenenza, ed equivale ad ammettere che i 3 punti diagonali di un quadrangolo piano completo (e quindi di ogni quadrangolo) siano allineati. L'insieme di un quadrangolo piano completo coi 3 punti diagonali allineati è il più semplice dei miei « piani » e in pari tempo il « sistema di Veblen » $S(7 | 2 | 3)$. Ad eliminare questa possibilità io avevo introdotto il postulato: « Esiste un gruppo armonico costituito da 4 elementi distinti »; ed è il « Fano'sche Axiom » o F_1 , di alcuni dei geometri tedeschi citati⁽³⁾.

Ho ancora chiamata *serie armonica, di origine O* (denominazione che risale a R. DE PAOLIS) ogni insieme di punti allineati O, A_1, A_2, \dots, A_k tale che le quaderne $OA_k A_{k-1} A_{k+1}$ siano tutte armoniche; e tali sono allora anche tutte quelle del tipo $OA_k A_{k-i} A_{k+i}$. Le serie armoniche sono tutte proiettive; e l'ipotesi che una di esse rientri in sè stessa dopo p elementi e non prima, che sia cioè $A_{p+1} \equiv A_1$ senza che ciò avvenga per un indice $p' < p$, implica che altrettanto avvenga per tutte queste serie e, per lo stesso valore di p , il quale deve essere inoltre numero primo. Ciò è effettivamente possibile (cioè compatibile coi postulati di appartenenza) per ogni valore primo di p : e ne nascono configurazioni coincidenti coi « sistemi di Veblen » $S(p^2 + p + 1 | 2 | p + 1)$ (p primo), per le quali io ho indicata la distribuzione dei $p^2 + p + 1$ punti fra le varie rette.

Era naturalmente ammissibile anche l'ipotesi, da me allora non approfondita, di un sistema o « piano » $S(n^2 + n + 1 | 2 | n + 1)$ nel quale le serie armoniche rientrassero in sè dopo un numero p di elementi primo e $< n$. L'esempio più semplice era da attendersi per $n = 4, p = 2$; ed è dato infatti da un sistema $S(21 | 2 | 5)$ nel quale la distribuzione dei 21 punti fra le 21 rette è stata indicata in lavori citati di VEBLEN, BALDUS, STECK⁽⁴⁾. In questo sistema, di nuovo (come per $n = 2$) i punti diagonali di ogni qua-

(1) R. BALDUS, « Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. », mathem.-naturw. Abt., 1932, p. 149; 1934, p. 145; H. LIEBMANN, *Synthetische Geometrie*, Teubner, 1934, in part. § 2; M. STECK, « Deutsche Mathem. », vol. 1, 1936, pp. 578, 588; vol. 2, 1937, p. 242; « Monatsh. Math. Phys. », vol. 45, 1937, p. 320; « Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. », 1937.

(2) I tre numeri entro parentesi indicano rispettivamente il numero totale dei punti e delle rette di un piano, il numero dei punti occorrenti a individuare una retta, e il numero dei punti contenuti in una retta, nonchè delle rette di un fascio.

(3) In VEBLEN-YOUNG, *Projective Geometry*, vol. I, 1910, p. 45, è l'« Assumption H_0 », enunciato sotto la forma: « I tre punti diagonali di un quadrangolo piano completo non sono allineati ».

(4) Rispett. « A. M. Soc. Trans. », vol. 5, p. 350; « Bayer. Ber. », 1934; « Monatsh. Math. Phys. », 45, p. 322.

drangolo sono allineati⁽¹⁾; proprietà notevole, rilevata da VEBLEN, mentre pare sia sfuggita a LIEBMANN⁽²⁾, e STECK, da me avvertito per lettera, ne fece cenno nell'appendice (Nachtrag) all'ultima sua Nota citata, allora (maggio u. s.) in corso di stampa⁽³⁾.

La presente Nota, e un'altra che vi farà seguito, portano a tale questione qualche complemento e qualche chiarimento geometrico.

2. I sistemi di Veblen $S(n^2 + n + 1 | 2 | n + 1)$ esistono soltanto per n primo o potenza di numero primo ($n = p^m$; p numero primo, m intero positivo). Ed è $p > 2$ oppure $p = 2$, secondo che i gruppi armonici sono o non sono composti di elementi tutti distinti. Questo risultato, che emerge dalle ricerche citate di VEBLEN-BUSSEY⁽⁴⁾ in base alla rappresentazione analitica dei punti del sistema con coordinate tratte da opportuni campi di razionalità, si può anche stabilire facilmente per via geometrica⁽⁵⁾.

Mi riferisco a un sistema $S(n^2 + n + 1 | 2 | n + 1)$ — e scriverò per brevità $S(n)$ — nel quale ogni serie armonica rientri in sè stessa dopo p elementi, p essendo pertanto numero primo, $\leq n$ e per ora ≥ 3 (i gruppi armonici dunque costituiti da elementi tutti distinti). Ogni serie armonica è definita dall'origine e da due (qualunque) dei suoi elementi.

Siano O un punto qualunque del sistema, a, b due rette per esso; e su queste consideriamo rispettivamente due gruppi di p punti distinti $A_1 A_2 \dots A_p, B_1 B_2 \dots B_p$ formanti (in quest'ordine) serie armoniche di origine O . Le congiungenti $A_1 B_1, A_2 B_2$ avranno a comune un punto X , dal quale la serie armonica $A_1 A_2 \dots A_p$ si proietterà ordinatamente nella $B_1 B_2 \dots B_p$, e pel quale passeranno pertanto anche tutte le congiungenti $A_i B_i$. D'altra parte gli stessi punti $A_1 A_2 \dots A_p$ formano pure una serie armonica di origine O quando si prendano in un qualsiasi ordine $A_b A_{b+k} A_{b+2k} \dots$, cogli indici in progressione aritmetica e considerando come identici due qualsiasi indici congrui mod. p ; e altrettanto dicasi per i punti B . Le p^2 congiungenti $A_i B_{i'}$, tutte evidentemente distinte, sono dunque tali che per l'intersezione di due qualunque fra esse $A_b B_{b'}$, $A_{b+k} B_{b'+k'}$ ne passano altre $p - 2$, in tutto dunque p (più la retta che da questo punto proietta O), e su ciascuna di esse risultano così determinati $p + 1$ punti (compresi i pri-

(1) Il sistema $S(21 | 2 | 5)$ contiene perciò sistemi $S(7 | 2 | 3)$, che parzialmente si sovrappongono. Ne contiene in tutto 360, e ogni suo punto appartiene a 120 fra questi.

(2) Loc. cit., p. 8: «Uebrigens ist das Axiom F_1 hier erfüllt...».

(3) «Deutsche Mathem.», vol. 2, pp. 250-51.

(4) «A. M. Soc. Trans.», vol. 7, p. 258. Nessun caso $n = p^m$ con $m > 1$ era stato studiato in precedenza (§ 3) per escludere il caso $p = 2$ occorre supporre che i punti diagonali di un quadrangolo piano completo non siano allineati.

(5) Il primo caso di impossibilità si ha perciò per $n = 6$; cioè non esiste una geometria proiettiva finita nella quale ogni retta contenga 7 punti. Cfr. la nota a pie' di pagina in «A. M. Soc. Trans.», vol. 8, p. 388.

mitivi A, B). Complessivamente, computando anche le rette per O che ne risultano, abbiamo un sistema $S(p^2 + p + 1 | 2 | p + 1) \equiv S(p)$, contenuto nel dato $S(n)$.

Supponiamo ora che il sistema dato $S(n)$, oltre a questo $S(p)$, contenga altri punti. Poichè le rette di $S(p)$ passanti per O sono incontrate dalle p^2 congiungenti AB a p per volta nei p loro punti di $S(p)$ distinti da O , prendiamo sopra una di queste rette, distinte da a, b , uno dei nuovi punti, Y , il quale non starà pertanto su alcuna delle AB . Da esso, la serie armonica $B_1 B_2 \dots B_p$ sarà proiettata su a in una nuova analoga serie $A'_1 A'_2 \dots A'_p$ anche di origine O e composta di punti tutti distinti dai punti A . Consideriamo ora sopra a le serie armoniche di origine O e determinate rispettivamente dalle coppie di punti $A_1 A'_1, A_2 A'_2, \dots, A_p A'_p$; serie evidentemente tutte distinte dalle $A_1 A_2 \dots A_p$ e $A'_1 A'_2 \dots A'_p$ (perchè contenenti punti che non appartengono a queste), e fra loro (perchè due di esse non possono coincidere senza coincidere colla $A_1 A_2 \dots A_p$). Ciascuna di queste serie armoniche comprenderà $p - 2$ punti ulteriori, tutti quanti distinti, avendo esse già l'elemento comune A'_1 ; e complessivamente la retta a , e così ogni altra retta del sistema, verrà a contenere almeno $(p + 1) + p + (p - 2)p$ ossia $p^2 + 1$ punti. I p^2 punti di a e di b distinti da O così ottenuti daranno luogo a p^4 congiungenti che taglieranno le ulteriori rette del fascio O , a p^2 per volta, in p^2 punti distinti. Comprese le rette passanti per O avremo in tutto $p^4 + p^2 + 1$ rette. E se $n > p^2$ il ragionamento può ripetersi, fino a esaurimento del sistema $S(n)$. Si vede così che il numero n sarà sempre una potenza di p , c. d. d.

Supponiamo ora invece che sia $p = 2$, cioè che il coniugato armonico di un punto rispetto ad altri due allineati con esso coincida sempre con quel primo punto, e siano perciò allineati i 3 punti diagonali di ogni quadrangolo piano completo. Sia O un punto qualunque del sistema; a, b due rette distinte di questo passanti per O , ciascuna delle quali conterrà almeno altri due punti A_1, A_2 rispettivamente B_1, B_2 : il quadrangolo $A_1 A_2 B_1 B_2$ avrà un punto diagonale in O e gli altri due C_1, C_2 su una terza retta c passante per O . Se il sistema contiene altri punti, e ogni sua retta perciò più di 3 punti, sia C' un punto ulteriore di c . Proiettando da esso i punti A_1, A_2 sopra b e i punti B_1, B_2 sopra a , avremo già su ciascuna delle rette a e b almeno $5 = 2^2 + 1$ punti distinti, e nel sistema almeno $4^2 + 4 + 1 = 21$. Se il sistema non è ancora esaurito, prenderemo su c un nuovo punto, e proietteremo da esso i 4 punti di a o rispettivamente b distinti da O su b o rispettivamente a . Avremo così sopra ogni retta almeno $9 = 2^3 + 1$ punti, e in tutto il sistema almeno $2^6 + 2^3 + 1 = 73$; e così via. In ogni caso il numero totale n dei punti di una retta sarà $= 2^m + 1$.

In quest'ultimo caso, per costruire entro $S(n)$ un sistema $S(7 | 2 | 3)$ contenente un punto assegnato O , potremo prendere ad arbitrio una coppia

a, b fra le $\binom{n+1}{2}$ coppie di rette passanti per O , e su ciascuna di queste, come vertici del quadrangolo, pure ad arbitrio, una delle $\binom{n}{2}$ coppie di punti distinti da O . Il sistema $S(7|2|3)$ risulterà così individuato; ma potrà ottenersi altresì scambiando la retta dei punti diagonali del detto quadrangolo con una delle due a, b . I sistemi $S(7|2|3)$ contenenti O sono perciò in numero di $\frac{1}{3} \binom{n+1}{2} \binom{n}{2}^2 = \frac{(n+1)n^3(n-1)^2}{24}$; mentre il numero complessivo dei sistemi $S(7|2|3)$ entro $S(n)$ è:

$$\frac{(n+1) \cdot n^3 \cdot (n-1)^2}{24} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{7} = \frac{n^3(n^3-1)(n^2-1)}{7 \cdot 24}.$$

Si osservi che, essendo n potenza di 2, perciò congruo mod. 7 a uno dei numeri 1, 2, 4, è certo $n^3 \equiv 1$, e perciò $n^3 - 1$ divisibile per 7.

3. Per il sistema $S(21|2|5)$ la distribuzione dei punti fra le varie rette, già indicata nei lavori dianzi citati, può presentarsi (come qui appresso) in forma più concisa e atta a facilitare la ricerca della legge di costruzione per i casi successivi $n = 2^m, m > 2$.

Una prima retta del sistema $S(21|2|5)$ contenga 5 punti, che designiamo rispettivamente con A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 . Gli ulteriori 16 punti del sistema si potranno ottenere intersecando mutuamente le altre 4 rette uscenti da A_0 e le 4 uscenti da A_1 . Indicando sia le une che le altre coi numeri 1, 2, 3, 4, potremo designare questi ulteriori 16 punti cogli elementi della matrice quadrata:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix}$$

intendendo che le orizzontali e le verticali corrispondano rispettivamente alle 4 rette suindicate uscenti da A_0 e da A_1 . Le quaderne di punti, fra i 16, appartenenti alle rimanenti rette uscenti da A_2, A_3, A_4 saranno date da quaderne di termini del determinante (1) tali che ogni quaderna contenga complessivamente tutti i 16 elementi, conforme pertanto alle orizzontali dei quadri qui sotto indicati⁽¹⁾:

(1) Scelto uno qualunque dei termini del determinante (1), p. es. il termine principale, come una prima quaderna di punti allineati con A_2 , vi sono precisamente otto termini aventi a comune col primo uno e un solo elemento. Questi daranno le 8 rette passanti per A_3 e A_4 ; e l'intera configurazione risulta allora determinata.

$$\begin{array}{c}
 A_2 \left\{ \begin{array}{cccc} 11 & 22 & 33 & 44 \\ 12 & 21 & 34 & 43 \\ 13 & 24 & 31 & 42 \\ 14 & 23 & 32 & 41 \end{array} \right.
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 A_3 \left\{ \begin{array}{cccc} 11 & 24 & 32 & 43 \\ 14 & 21 & 33 & 42 \\ 12 & 23 & 31 & 44 \\ 13 & 22 & 34 & 41 \end{array} \right.
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 A_4 \left\{ \begin{array}{cccc} 11 & 23 & 34 & 42 \\ 13 & 21 & 32 & 44 \\ 14 & 22 & 31 & 43 \\ 12 & 24 & 33 & 41 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Dalla prima orizzontale del quadro A_2 (elementi principali del determinante (1)) si ottengono le prime orizzontali di A_3, A_4 tenendo fermo il punto 11, e permutando circolarmente negli altri tre i secondi elementi (2, 3, 4). Entro ciascun quadro, dalla prima orizzontale si ottengono le altre scambiando i secondi elementi, a coppie, nei vari modi (due qualunque, e in pari tempo gli altri due).

Suddivise le 4 rette (1) uscenti ad es. da A_0 in due coppie fisse, p. es. in corrispondenza agli indici 12-34 (prime due, e ultime due orizzontali della matrice (1)), e le 4 uscenti da A_1 (verticali) anche in coppie nei *tre* modi possibili (12-34; 14-23; 13-42), nascono, per ciascuno di questi modi (come intersezioni di due coppie di rette di un fascio con altre due, pure di un fascio), 4 quadrangoli semplici aventi le coppie di rette anzidette come lati opposti; questi quadrangoli hanno pure a due a due le medesime diagonali, che sono nei 3 casi precisamente le rette suindicate uscenti rispettivamente da A_2, A_3, A_4 . Per es., se le rette uscenti da A_1 si ripartiscono anch'esse nelle coppie 12-34, abbiamo i 4 quadrangoli risultanti nella matrice (1) dall'intersezione delle due prime e due ultime orizzontali colle prime due e ultime due verticali; e le loro diagonali sono le 4 rette passanti per A_2 .

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Geometria proiettiva). — *Rigate di ordine n , dello spazio a n dimensioni, aventi ∞^n omografie in sè.* Nota ⁽¹⁾ di P. BUZANO, presentata dal Corrisp. G. FANO.

In un altro mio lavoro ⁽²⁾, estendendo agli iperspazi una generazione della rigata cubica di Cayley, sono pervenuto ad una rigata di ordine n dello spazio S_n la quale possiede una *retta doppia* che è ad un tempo direttrice (semplice) e generatrice (semplice). Tale rigata, che chiamo Γ_2^n , è pertanto proiezione della rigata razionale normale di ordine n con direttrice minima rettilinea, fatta su S_n da un punto della V_3 luogo dei piani che congiungono le generatrici alla retta direttrice. La rigata Γ_2^n , come risulta dal mio lavoro citato, gode della proprietà di *ammettere un gruppo ∞^n (e non più ampio) di omografie in sè.*

Si pone ora naturalmente la domanda se vi siano altre rigate di ordine n di S_n (proiettivamente distinte da Γ_2^n) aventi un gruppo transitivo di dimensione $\geq n$ di omografie in sè. Scopo della presente Nota è di rispondere a tale domanda facendo vedere che, *a prescindere dai coni* ⁽³⁾, Γ_2^n è già *il modello più generale* di rigate nelle condizioni richieste. Faremo vedere inoltre che Γ_2^{n-1} si può ottenere *proiettando Γ_2^n da un suo punto.*

1. Poichè le rigate di ordine n di S_n , non coni, sono tutte razionali ⁽⁴⁾ e quindi proiezioni (da punti) di rigate normali di S_{n+1} , si presume l'esistenza di un legame fra le omografie che mutano in sè una rigata normale, le quali sono conosciute ⁽⁵⁾, e quelle eventuali che mutano in sè la rigata-proiezione. Vogliamo anzitutto mettere in chiaro tale legame.

Consideriamo una rigata razionale normale di ordine n , che indichiamo con \mathcal{R} . Sia poi \mathcal{R}_0 la proiezione di \mathcal{R} fatta sopra uno S_n da un

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1937.

(2) In corso di pubblicazione sul « Bollettino della U. M. I. ».

(3) I coni ammettono già tutti ∞^{n+1} trasformazioni omologiche in sè.

(4) Una rigata di S_n di ordine n e genere p , non cono, è normale nello spazio $[n - 2p + 1]$. Cfr. *Encyklopädie der Math. Wissensch.*; III, C, 7, pp. 911-912. (C. SEGRE, *Mehrdimensionale Räume*). Independentemente da ciò le rigate da noi cercate sono certo razionali poichè: « le superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in se stesse sono tutte razionali ». (G. FANO, *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in se stesse*, « Atti R. Acc. Lincei », vol. IV, 1° sem., fasc. 4°, ser. 5^a (1895)).

(5) Cfr. *Encyklopädie der Math. Wiss.*, art. cit., nota prec., p. 910.

punto P_0 di S_{n+1} non appartenente ad \mathcal{R} . È noto che, se μ è l'ordine della sua direttrice minima, la rigata normale \mathcal{R} ammette un gruppo \mathcal{G} di omografie ⁽¹⁾ avente in generale la dimensione $n - 2\mu + 5$ e avente dimensione 6 se $\mu = \frac{n}{2}$. Supponiamo ora che in \mathcal{G} vi sia un sottogruppo \mathcal{G}_0

di omografie che lascino fisso il punto P_0 . Le omografie di \mathcal{G}_0 subordinano *entro la stella* di centro P_0 un gruppo di omografie \mathcal{G}_0^* ⁽²⁾, il quale, segando la stella con l'iperpiano S_n , dà luogo a sua volta a un gruppo di omografie di S_n che mutano in sè la rigata \mathcal{R}_0 .

Per vedere che in tal modo si ottengono già *tutte* le (eventuali) omografie che mutano in sè \mathcal{R}_0 conviene ricorrere alla *rappresentazione piana* delle rigate razionali \mathcal{R} ed \mathcal{R}_0 . Le sezioni iperpiane di \mathcal{R} si rappresentano con le curve di un sistema lineare *completo* Σ , mentre quelle di \mathcal{R}_0 si rappresentano con le curve di un sistema subordinato Σ_0 che si stacca da Σ con una condizione lineare senza però imporre passaggi per ulteriori punti fissi ⁽³⁾. Inoltre le omografie che mutano in sè le rigate corrispondono nella rappresentazione piana a trasformazioni cremoniane che mutano in sè i sistemi lineari rappresentativi ⁽⁴⁾. Basterà dunque far vedere che le trasformazioni cremoniane che mutano in sè Σ_0 mutano in sè anche Σ : ma ciò è immediato poichè le trasformazioni cremoniane che mutano in sè Σ_0 , dovendo anzitutto mutare in sè il gruppo dei punti base delle curve di Σ_0 , lasceranno invariato il sistema completo delle curve di quello stesso ordine passanti per tali punti, il quale non è altro che Σ .

Stabilito questo risultato possiamo già affermare che le rigate di ordine n di S_n aventi almeno ∞^n omografie in sè sono da cercarsi fra le proiezioni di rigate normali di ordine n aventi anch'esse almeno ∞^n omografie in sè cioè tali che sia:

$$\begin{array}{ll} n - 2\mu + 5 \geq n & \text{se } n \neq 2\mu \\ 6 \geq n & \text{se } n = 2\mu; \end{array}$$

e quindi (escludendo i coni) dovremo prendere in esame *solo i seguenti casi*:

- I) $\mu = 1$, $n > 2$ (rigata normale con ∞^{n+3} omografie in sè)
- II) $\mu = 2$; $n > 4$ (» » » ∞^{n+1} » »)
- III) $\mu = 2$, $n = 4$ (» » » ∞^6 » »)
- IV) $\mu = 3$, $n = 6$ (» » » ∞^6 » ») .

(1) Vedi nota precedente e inoltre: H. MOHRMANN, *Bestimmung aller Normalflächen mit transitiven automorphen Gruppen von projectiven Transformationen*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », vol. XXXII, pp. 158-187 (1911).

(2) *A priori* non si esclude che la dimensione di \mathcal{G}_0^* possa essere inferiore a quella di \mathcal{G}_0 .

(3) Poichè \mathcal{R} ed \mathcal{R}_0 hanno lo stesso ordine. Cfr. E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*. (Messina, Principato, 1923), pp. 367-368.

(4) Cfr. E. BERTINI, op. cit., p. 388.

2. Incominciamo a prendere in esame una rigata \mathcal{R} del caso I) facendo vedere che *esistono sue proiezioni con un gruppo ∞^n (e non più ampio) di omografie in sé e che tali proiezioni sono tutte proiettivamente identiche con la Γ_2^n .*

\mathcal{R} ammette un gruppo \mathcal{G} di omografie in sé e da un punto P_0 essa si proietta in una rigata \mathcal{R}_0 avente almeno ∞^n omografie in sé, il sottogruppo \mathcal{G}_0 delle omografie di \mathcal{G} che lasciano fisso P_0 , cioè il *sottogruppo di stabilità* relativo al punto P_0 , deve avere dimensione $\geq n$. Ora è noto che, essendo $n+3$ la dimensione di \mathcal{G} , se la *varietà minima invariante* descritta da P_0 ha la dimensione s , il sottogruppo di stabilità di ogni suo punto avrà la dimensione $n+3-s$ ⁽¹⁾, cosicchè dovremo avere $n+3-s \geq n$ cioè $s \leq 3$. Dunque i punti da cui la rigata \mathcal{R} può proiettarsi in rigate del tipo richiesto sono quelli, fuori di \mathcal{R} , appartenenti a varietà minime invarianti di dimensione ≤ 3 .

Una V_3 ovviamente invariante per il gruppo \mathcal{G} è quella luogo dei piani che congiungono le generatrici di \mathcal{R} alla sua direttrice rettilinea d . Vogliamo dimostrare che (fuori di \mathcal{R}) non vi sono altre varietà invarianti di dimensione ≤ 3 e che la V_3 indicata è una varietà *minima* invariante, cioè che sui punti di essa, non appartenenti ad \mathcal{R} , le omografie di \mathcal{G} operano *transitivamente*.

Anzitutto una varietà invariante non contenuta in \mathcal{R} (nè coincidente con \mathcal{R}), se esiste, è invariante anche per il sottogruppo delle omografie di \mathcal{G} che subordinano l'identità su d , le quali lasciano fissi i singoli piani passanti per d , operando transitivamente sui punti di questi piani, non appartenenti ad \mathcal{R} ⁽²⁾. Preso allora un punto P sulla varietà invariante e fuori della rigata \mathcal{R} , le omografie del sottogruppo gli fanno già descrivere l'intero piano (Pd) che deve quindi far parte della varietà invariante la quale è dunque costituita da piani passanti per d . Ma i piani per d possono considerarsi come punti di uno S_{n-1} in cui le omografie di \mathcal{G} determinano un gruppo ∞^3 avente come unica curva invariante una C^{n-1} che rappresenta il sistema dei piani congiungenti d alle generatrici di \mathcal{R} . Perciò solo la V_3 costituita da tali piani è una V_3 invariante. Inoltre le omografie del gruppo \mathcal{G} operano transitivamente sui piani della V_3 e siccome si è già visto che quelle che lasciano fisso ciascuno di questi piani operano transitivamente sui suoi punti, si deduce che le omografie di \mathcal{G} operano transitivamente sui punti della V_3 che è quindi l'unica V_3 *minima* invariante.

(1) Cfr. L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, cap. V, § 62.

(2) Subordinando se il piano è generico il G_3 di omologie di asse d e se il piano contiene una generatrice g di \mathcal{R} il G_2 di omologie di asse d , aventi i centri su g . Questa ed altre proprietà risultano subito dalla rappresentazione analitica del gruppo \mathcal{G} quale si trova nel lavoro citato del MOHRMANN (equazioni (6) e (11) dove α, β, N, n , vanno sostituiti nel nostro caso da $1, 1, n+1, n-2$).

Raggiunto questo risultato dimostriamo ora che *proiettando la rigata \mathcal{R} da punti della V_3 invariante* sopra degli iperpiani si ottengono delle rigate che sono tutte proiettive fra loro. E poichè, come già sappiamo, fra tali rigate ci sarà pure la nostra Γ_2^n , *le rigate ottenute per proiezione saranno tutte proiettivamente identiche alla Γ_2^n ed avranno quindi proprio ∞^n omografie in sè.* Consideriamo dunque due diverse proiezioni della \mathcal{R} fatte da due punti P_0 e P_1 della V_3 rispettivamente sugli iperpiani π e π' : siano esse \mathcal{R}_0 e \mathcal{R}_1 . Poichè le omografie di \mathcal{S} operano transitivamente sulla V_3 , esisterà una omografia che muta P_0 in P_1 , lasciando fissa \mathcal{R} : tale omografia muta π in un iperpiano π'' ed \mathcal{R}_0 nella rigata \mathcal{R}_1' proiezione di \mathcal{R} da P_1 su π'' . D'altro lato gli iperpiani π' e π'' risultano riferiti proiettivamente come sezioni della stella di centro P_1 e quindi anche fra \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_1' intercede una corrispondenza omografica. Cosicchè in conclusione vi sarà un'omografia che trasforma \mathcal{R}_0 in \mathcal{R}_1 .

3. Esaurito così l'esame del caso I) passiamo alla considerazione di rigate normali relative ai casi II), III), IV): faremo vedere che in *nessuno* di questi casi la rigata normale può dar luogo per proiezione a rigate aventi almeno ∞^n omografie in sè.

Nel caso II) poichè la rigata oggettiva ha ∞^{n+1} omografie in sè, se la rigata proiezione deve averne almeno ∞^n , il centro di proiezione deve stare su una varietà minima invariante di dimensione ≤ 1 , non appartenente però alla rigata normale. Si riconosce facilmente⁽¹⁾ che le omografie del gruppo che lasciano fissi tutti i punti del piano α della conica-direttrice (cioè subordinando l'identità sulla conica) lasciano fissi anche i singoli S_3 passanti per α e fanno descrivere ai loro punti, non appartenenti alla rigata, varietà di dimensione > 1 . Siccome per ogni punto passa uno di tali S_3 si deduce che fuori della rigata e di α non ci sono curve nè punti invarianti. Ma neppure in α (esclusa la conica direttrice) ce nè possono essere poichè le omografie del gruppo subordinano in α le ∞^3 omografie che mutano in sè la C^2 direttrice ed operano quindi transitivamente sui punti di α .

Nel caso III) se la rigata-proiezione deve avere almeno ∞^4 omografie in sè il centro di proiezione deve stare su una varietà invariante di dimensione ≤ 2 non appartenente alla rigata normale \mathcal{R} . Si può escludere subito che la varietà invariante sia un punto o una retta poichè nessuno dei due, come si vede facilmente⁽²⁾ può esser fisso per tutte le omografie del gruppo. Per riconoscere che non ci possono essere altre linee o superficie invarianti premettiamo che le omografie del gruppo, essendo ripartite in due serie ∞^3

(1) Basta ricorrere alla rappresentazione analitica del gruppo quale si trova nel lavoro citato del MOHRMANN (equazioni (6) e (11) dove α , β , n , N , vanno sostituiti in questo caso con 1 , 2 , $n-4$, $n+1$).

(2) Dalle equazioni (17) del MOHRMANN.

che operano transitivamente l'una sulle generatrici di \mathcal{R} e l'altra sui piani delle ∞^1 coniche direttrici, operano transitivamente anche sui punti della V_3 luogo di quei piani. Dunque se vi fosse una superficie invariante $\neq \mathcal{R}$ essa non potrebbe appartenere a V_3 : ma allora stando entrambe in S_5 essa e V_3 avrebbero in comune un punto od eventualmente una linea, che dovrebbero essere invarianti, cosa impossibile (in quanto sia sui punti generici di V_3 che su quelli di \mathcal{R} le omografie del gruppo operano transitivamente). Nè ci può essere una curva invariante poichè altrimenti sarebbe tale anche la rigata delle sue tangenti e si ricadrebbe nel caso precedente.

Infine nel caso IV) se la rigata-proiezione deve avere anch'essa ∞^6 omografie in sè come quella normale, il centro di proiezione deve essere unito per tutte le omografie che mutano in sè la rigata normale: ma si riconosce facilmente che un punto in tali condizioni non esiste.

Resta così dimostrato che l'unico tipo di rigata di ordine n di S_n con ∞^n omografie in sè è quello, Γ_2^n , che si ottiene proiettando la rigata razionale normale di ordine n con direttrice rettilinea da punti della V_3 luogo dei piani congiungenti le generatrici alla direttrice, sopra iperpiani generici.

4. Data l'importanza che vengono ad assumere le rigate del tipo Γ_2^n in seguito ai risultati precedenti, dimostriamo un'altra loro proprietà facendo vedere che Γ_2^{n-1} può ottenersi proiettando Γ_2^n da un suo punto sopra uno S_{n-1} .

Consideriamo in S_{n+1} la rigata razionale normale \mathcal{R}^n con direttrice rettilinea d e proiettiamola su uno stesso iperpiano S_n da un suo punto generico Q e da un punto P preso fuori di essa ma nel piano di d e di una generatrice g . La proiezione fatta da Q è la rigata normale \mathcal{R}^{n-1} e quella fatta da P è la Γ_2^n . Gli elementi complanari (d, g, P) si proiettano da Q su S_n in d', g', O anch'essi complanari. Dico che proiettando da O sopra uno S_{n-1} la Γ_2^n si ottiene una Γ_2^{n-1} . Poichè d' e g' sono rispettivamente direttrice e generatrice di \mathcal{R}^{n-1} e O sta nel loro piano (nè appartiene ad esse), proiettando \mathcal{R}^{n-1} da O su uno S_{n-1} si ottiene certo una Γ_2^{n-1} : basterà dunque dimostrare che questa Γ_2^{n-1} è anche proiezione di Γ_2^n dallo stesso centro O (il quale stà su Γ_2^n poichè è proiezione del punto Q di \mathcal{R}^n fatta da P su S_n). Consideriamo allora un punto generico L di \mathcal{R}^n e siano L' e L'' le sue proiezioni da P e Q su S_{n-1} : una sta su Γ_2^n e l'altra su \mathcal{R}^{n-1} , basta quindi far vedere che esse sono allineate con O cioè che da O si proiettano in uno stesso punto. Ma ciò è ovvio poichè proiettando da L i punti OPQ , allineati, si ottengono proprio $OL'L''$ che saranno quindi allineati.

Matematica (Analisi). — *Sul calcolo degli integrali contenuti nella formula di Villat relativa ad una corona circolare.* Nota⁽¹⁾ di A. CONSIGLIO, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Nel 1912 il Villat⁽²⁾ ha stabilito una formula ormai classica che dà la funzione di variabile complessa, in una corona circolare, avente per parte reale una funzione soddisfacente la condizione di assumere valori assegnati su i due cerchi della corona. Tale formula contiene integrali definiti di funzioni delle funzioni $\zeta(v)$ e $\zeta_3(v)$ di Weierstrass che possono dare serie preoccupazioni a chi voglia praticamente calcolarli per avere la funzione cercata anche sotto forma di serie. Poichè l'applicazione della detta formula di Villat è spesso utile anche per la risoluzione di problemi di aerodinamica dei quali mi sto occupando, non parmi privo di qualche interesse indicare nella presente Nota un metodo generale che permette di calcolare praticamente i detti integrali, e di ottenere, in qualche caso immediatamente, la funzione data dalla formula di Villat sotto forma di serie convergente.

Il metodo di calcolo esposto in generale qui, è stato recentemente applicato da me in un caso particolare⁽³⁾ con notevole vantaggio e lo sarà ulteriormente in altri lavori, alcuni dei quali sono stati già annunciati⁽⁴⁾.

I. LA FORMULA DI VILLAT RELATIVA AD UNA CORONA CIRCOLARE. — Siano γ_1 e Γ_1 due cerchi concentrici del piano complesso $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ che individuano la corona circolare Σ_1 , il primo di raggio $q < 1$ ed il secondo di raggio unitario (ved. fig. 1). Fissiamo nel piano ζ_1 un sistema cartesiano ortogonale con origine nel punto B, centro comune dei due cerchi γ_1 e Γ_1 ed un sistema polare avente per polo il punto B e come asse polare il semiasse delle ξ_1 positive del sistema cartesiano.

Diciamo, poi, $\varphi_q(\theta)$ e $\varphi_1(\theta)$ due assegnate funzioni dell'anomalia θ , nel sistema polare fissato, ed $f(\zeta_1)$ la funzione della variabile complessa ζ_1 ,

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1937.

(2) H. VILLAT, *Le problème de Dirichlet dans une aire annulaire*. «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», to. XXXIII, pp. 134-174, 1912.

(3) A. CONSIGLIO, *Cilindro circolare mobile comunque in un fluido indefinito limitato da una parete piana*. «Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», parte seconda; Nota I, to. XCV, pp. 625-661, 1936. Cfr. il n. 12, p. 655 e sgg.

(4) A. CONSIGLIO, loc. cit. «Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», parte seconda; Nota II, to. XCVI, in corso di stampa. Cfr. il n. 21.

definita entro la corona circolare Σ_r ed avente la parte reale, $R\{f(\zeta_r)\}$, soddisfacente le condizioni

$$R\{f(\zeta_r)\} = \begin{cases} \varphi_q(\theta) & , \quad \text{su } \gamma_r \\ \varphi_r(\theta) & , \quad \text{su } \Gamma_r . \end{cases}$$

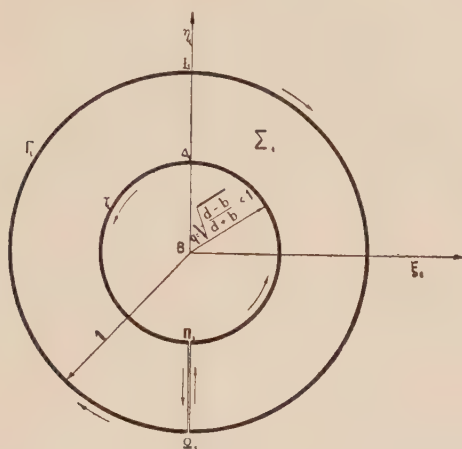


Fig. 1

Le assegnate funzioni (di θ) $\varphi_q(\theta)$ e $\varphi_r(\theta)$ siano tali da soddisfare la condizione necessaria perchè la funzione $f(\zeta_r)$ sia regolare entro la corona Σ_r cioè la condizione (1):

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_q(\theta) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(\theta) d\theta = 0.$$

Ciò posto, la formula di Villat che dà la funzione $f(\zeta_r)$ si scrive:

$$(2) \quad f(\zeta_r) = \frac{i\omega'_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \varphi_r(\theta) \zeta'_r \left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log \zeta_r - \frac{\omega'_1}{\pi} \theta \right) d\theta - \\ - \frac{i\omega'_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \varphi_q(\theta) \zeta'_q \left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log \zeta_r - \frac{\omega'_1}{\pi} \theta \right) d\theta,$$

(1) Come è noto (cfr., ad es., H. VILLAT, loc. cit., cap. II, § 3, p. 147 e sgg.) se anzichè la (1), risulta:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_q(\theta) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(\theta) d\theta = a$$

con a costante rispetto a θ , anzichè la $f(\zeta_r)$ si determina la funzione $F(\zeta_r)$ che assuma su i due cerchi γ_r e Γ_r rispettivamente gli assegnati valori $\varphi_q(\theta) - a$ e $\varphi_r(\theta)$. La funzione $f(\zeta_r) = F(\zeta_r) + a \log \zeta_r / \log q$ sarà allora quella cercata.

dove ω'_1 ed ω'_3 sono due numeri, reale il primo ed immaginario il secondo, tali che:

$$(3) \quad q = e^{-\frac{\pi \omega_3}{i \omega_1}}$$

ed essendo $\zeta'(v')$ e $\zeta_3'(v')$ le funzioni di Weierstrass di argomento $v' = \frac{\omega_1}{\pi i} \log \zeta_1 - \frac{\omega_1}{\pi} \theta$ e relative ai semiperiodi ω'_1 ed ω'_3 .

Come è chiaro, la (2) fornisce la $f(\zeta_1)$ mediante integrali definiti per i quali è bene conoscere un metodo di pratica integrazione utile per le applicazioni che di frequente si possono presentare in questioni di Fisica matematica.

2. LA TRASFORMAZIONE DELLA FORMULA DI VILLAT IN UNA FORMULA ANALITICA. — Senza ledere la generalità della (2) possiamo assumere $\omega'_1 = \pi$; $\omega'_3 = -i\alpha$, con

$$(4) \quad \alpha = \log q \quad ; \quad \alpha < 0,$$

in maniera che risulti soddisfatta la (3).

Diciamo anche Z_1 la variabile complessa nel piano della corona circolare. Sui due cerchi risulta allora:

$$\begin{aligned} Z_1 &= q e^{i\theta} \quad ; \quad \theta = -i \log Z_1 + i\alpha \quad ; \quad d\theta = -i dZ_1 / Z_1 \quad , \quad \text{su } \gamma_1 \\ Z_1 &= e^{i\theta} \quad ; \quad \theta = -i \log Z_1 \quad ; \quad d\theta = -i dZ_1 / Z_1 \quad , \quad \text{su } \Gamma_1. \end{aligned}$$

Poichè le due assegnate funzioni $\varphi_q(\theta)$ e $\varphi_1(\theta)$ dell'anomalia θ debbono naturalmente essere periodiche con il periodo reale 2π , qualunque sia la determinazione che si consideri per $\log Z_1$, restano ben definite le due funzioni della variabile complessa Z_1 nel piano della corona circolare:

$$\varphi_q(-i \log Z_1 + i\alpha) \quad ; \quad \varphi_1(-i \log Z_1),$$

le quali risultano, ciascuna rispetto al suo argomento, periodiche con il periodo reale 2π e su i punti dei due cerchi γ_1 e Γ_1 assumono rispettivamente i valori reali $\varphi_q(\theta)$ e $\varphi_1(\theta)$.

Introducendo la variabile Z_1 nell'argomento delle funzioni di Weierstrass contenute nelle funzioni integrande del secondo membro della (2) e calcolando quello della $\zeta'(v')$ su Γ_1 e quello della $\zeta_3'(v')$ su γ_1 , allora, la (2) si può scrivere:

$$\begin{aligned} (5) \quad f(\zeta_1) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_1} \varphi_1(-i \log Z_1) \zeta' \left(i \log \frac{Z_1}{\zeta_1} \right) \frac{dZ_1}{Z_1} - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1} \varphi_q(-i \log Z_1 + i\alpha) \zeta_3' \left(i \log \frac{Z_1}{\zeta_1} - i\alpha \right) \frac{dZ_1}{Z_1}. \end{aligned}$$

Rammentiamo adesso che la $\zeta_3(v')$ di Weierstrass è legata alla $\zeta'(v')$ pure di Weierstrass dallo stesso argomento e relativa agli stessi periodi dalla relazione (1):

$$\zeta_3'(v' \pm \omega_r) = \zeta'(v') \pm \zeta'(\omega_r), \quad r = 1, 3$$

ed inoltre che la $\zeta'(v'/\omega'_1, \omega'_3)$ di argomento v' e relativa ai semiperiodi $\omega'_1 = \pi$; $\omega'_3 = -i\alpha$ è esprimibile mediante la $\zeta(v/\omega_1, \omega_3)$ di argomento $v = \frac{v'}{-i}$ e relativa ai semiperiodi $\omega_1 = \frac{\omega'_1}{-i} = \pi i$; $\omega_3 = \frac{\omega'_3}{-i} = \alpha$ utilizzando la formula che traduce la omogeneità per la $\zeta(v)$ di Weierstrass (2):

$$\zeta'(v'/\omega'_1, \omega'_3) = \frac{1}{-i} \zeta\left(\frac{v'}{-i} / \frac{\omega'_1}{-i}, \frac{\omega'_3}{-i}\right) = i \zeta(v/\omega_1, \omega_3).$$

Pertanto la (5) si scrive:

$$(6) \quad f(\zeta_1) = \frac{i}{\pi} \int_{\Gamma_1} \varphi_1(-i \log Z_1) \zeta\left(-\log \frac{Z_1}{\zeta_1}\right) \frac{dZ_1}{Z_1} - \\ - \frac{i}{\pi} \int_{\gamma_1} \varphi_1(-i \log Z_1 + i\alpha) \left\{ \zeta\left(-\log \frac{Z_1}{\zeta_1}\right) + \zeta(\alpha) \right\} \frac{dZ_1}{Z_1}.$$

Agli integrali contenuti nel secondo membro di questa espressione della $f(\zeta_1)$ non è applicabile il teorema di Cauchy su i residui perchè ciascuna delle loro funzioni integrande ha nell'interno del suo campo di integrazione infinite singolarità. Per eliminare questo inconveniente, passiamo dal piano ζ_1 a quello ζ mediante la trasformazione:

$$(7) \quad \zeta_1 = ie^{\zeta} \quad \text{cioè} \quad \zeta = \log(-i\zeta_1),$$

la quale porta, notoriamente (3), la corona circolare Σ_1 del piano ζ_1 tagliata lungo il segmento $\Omega_1 \Pi_1$ (fig. 1) in un rettangolo, per es., quello Σ del piano ζ (fig. 2) e precisamente: il cerchio γ_1 nel segmento γ ; il cerchio Γ_1 nel segmento Γ dell'asse immaginario, i due bordi del taglio $\Omega_1 \Pi_1$ negli altri due lati $\Omega \Pi$ a $\Omega' \Pi'$ di Σ .

Su questo piano rappresentativo ζ , la variabile Z_1 ha come trasformata una variabile complessa che diciamo Z per la quale si ha:

$$Z_1 = ie^Z; \quad dZ_1 = ie^Z dZ; \quad \log Z_1 = \log i + Z;$$

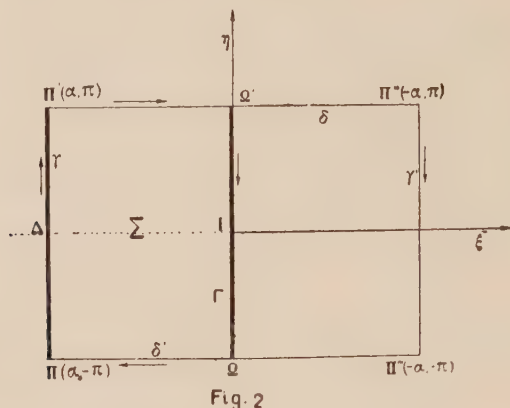
i due integrali del secondo membro della (6) si trasformano ordinatamente in due integrali, il primo esteso al segmento Γ ed il secondo esteso al

(1) J. TANNERY et J. MOLK, *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques*. Gauthier Villars, Paris, to. II, p. 238, form. XII (5), 1896.

(2) J. TANNERY et J. MOLK, loc. cit., p. 240, form. XVIII (1), (2).

(3) A. CONSIGLIO, loc. cit., Nota I, n. 2, p. 630 e sg. In questa Nota il lettore troverà le ulteriori notizie che potrebbero interessare su questa trasformazione.

segmento γ , mentre la variabile ζ , che si trasforma in una variabile ζ avente per immagine un punto interno al rettangolo Σ , risulta costante rispetto alle integrazioni su dette.



Con riferimento a questo nuovo piano ζ e per essere la $\zeta(v)$ di Weierstrass una funzione dispari del suo argomento, la (6) allora si scrive:

$$(8) \quad f(i e^{\zeta}) = \frac{i}{\pi} \int_{\gamma} \varphi_q \left(i \alpha + \frac{\pi}{2} - i Z \right) \{ \zeta(Z - \zeta) - \zeta(\alpha) \} dZ - \\ - \frac{i}{\pi} \int_{\Gamma} \varphi_r \left(\frac{\pi}{2} - i Z \right) \zeta(Z - \zeta) dZ,$$

dove, per essere le funzioni φ_q e φ_r periodiche rispetto al loro argomento (cfr. il n. 2) e però potendosi assumere per $-\log i$ una qualunque delle sue determinazioni; si è assunto $-i \log i = \pi/2$.

La (8) è una *formula analitica* che risolve il problema di Dirichlet nella corona circolare. Gli integrali indicati nel suo secondo membro si possono talvolta agevolmente calcolare mediante applicazione del teorema di Cauchy su i residui quando si segua, per es., il metodo di integrazione lungo il perimetro di un opportuno rettangolo, che sarà esposto al numero seguente.

3. UN METODO DI PRATICA INTEGRAZIONE PER GLI INTEGRALI DELLA (8). — Il primo degli integrali del secondo membro della (8) si può scindere nella somma dell'integrale

$$- \frac{i}{\pi} \zeta(\alpha) \int_{\gamma} \varphi_q \left(i \alpha + \frac{\pi}{2} - i Z \right) dZ = \frac{i}{\pi} \zeta(\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_q \left(\frac{\pi}{2} + \eta \right) d\eta$$

che si calcola, essendo un ordinario integrale semplice reale di funzione reale⁽¹⁾ e, a meno di un fattore costante, dell'integrale

$$(9) \quad \int_{\gamma} \varphi_q \left(i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right) \zeta(Z - \zeta) dZ,$$

in cui la funzione φ_q dovendo essere, come è stato altrove osservato, periodica rispetto al suo argomento $i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ$ con il periodo 2π , risulta periodica rispetto alla variabile Z con il periodo $2\pi i$.

Riesce utile considerare adesso il rettangolo (\mathbf{R}) somma di quello Σ e del suo simmetrico rispetto all'asse immaginario (fig. 2) del quale diciamo ordinatamente, e circolando nel senso orario, $\gamma, \delta, \gamma', \delta'$, i lati. Circolando nel senso detto ed in base alle (4) i vertici di (\mathbf{R}) sono i punti di coordinate

$$(\alpha, -\pi) \quad ; \quad (\alpha, \pi) \quad ; \quad (-\alpha, \pi) \quad ; \quad (-\alpha, -\pi)$$

mentre il suo centro è l'origine I del piano ζ .

Da quanto precede segue che la funzione $\varphi_q \left(i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right)$ risulta a valori eguali su i lati di (\mathbf{R}) paralleli all'asse reale e regolare sul lato γ . Poniamo inoltre che essa sia regolare⁽²⁾ su gli altri tre lati di (\mathbf{R}) , potendo eventualmente avere delle singolarità isolate ed in numero finito (nei casi più comuni dei poli) dentro (\mathbf{R}) . La funzione $\zeta(Z - \zeta)$ di Weierstrass ha invece, una sola singolarità costituita da un polo del primo ordine nel punto $Z = \zeta$ interno al rettangolo Σ e però interno ad (\mathbf{R}) .

La somma dei residui nell'interno del rettangolo (\mathbf{R}) della funzione integranda dell'integrale (9) risulterà naturalmente una funzione che diciamo $g_0(\zeta)$, della variabile complessa ζ , perciò, integrando lungo il perimetro del rettangolo (\mathbf{R}) nel senso orario, cioè negativo, ed applicando il teorema di Cauchy su i residui si ottiene:

(1) A meno di un fattore costante, questo integrale è il primo del 1° membro della (1); perciò esso è stato già calcolato. Del resto per il calcolo di questo integrale si può pure impiegare il metodo di integrazione che esporremo per gli altri due integrali del 2° membro della (8).

(2) Se la φ_q non risulta regolare in qualche punto del lato γ' , poniamo che essa risulti regolare sul lato parallelo a γ del rettangolo $2(\mathbf{R})$, che si ottiene addizionando ad (\mathbf{R}) il suo simmetrico rispetto a γ' , o sul lato analogo di uno dei rettangoli $3(\mathbf{R})$; $4(\mathbf{R})$; ...; ottenuti ciascuno dal precedente addizionandovi un rettangolo eguale ad (\mathbf{R}) come quello $2(\mathbf{R})$ si è ottenuto da (\mathbf{R}) . Se poi la funzione φ_q non risulta regolare in qualche punto di uno dei due lati δ e δ' , poniamo che sia possibile cambiare opportunamente nella corona circolare Σ , il taglio Ω , Π , in maniera che la φ_q risulti regolare su i due nuovi lati δ e δ' immagini del nuovo taglio.

$$(10) \quad \int_{\gamma} \varphi_q \zeta(Z - \zeta) dZ + \int_{\delta} \varphi_q \zeta(Z - \zeta) dZ + \int_{\gamma'} \varphi_q \zeta(Z - \zeta) dZ + \\ + \int_{\delta'} \varphi_q \zeta(Z - \zeta) dZ = -2\pi i g_0(\zeta).$$

Trasformiamo l'integrale esteso a γ' in uno esteso a γ ed analogamente, l'integrale esteso a δ' in uno esteso a δ , rammentando che la φ_q è, rispetto alla variabile Z , periodica con il periodo $2\pi i$:

$$\int_{\gamma'} \varphi_q \left(i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right) \zeta(Z - \zeta) dZ = 2\zeta(\alpha) \int_{\gamma} \varphi_q \left(3i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right) dZ - \\ - \int_{\gamma} \varphi_q \left(3i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right) \zeta(Z - \zeta) dZ. \\ \int_{\delta'} \varphi_q \left(i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right) \zeta(Z - \zeta) dZ = 2\zeta(\pi i) \int_{\delta} \varphi_q \left(i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right) dZ - \\ - \int_{\delta} \varphi_q \left(i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right) \zeta(Z - \zeta) dZ.$$

Alla (10) allora si può dare la forma seguente:

$$(11) \quad \int_{\gamma} \varphi_q \left(i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right) \zeta(Z - \zeta) dZ = -2\pi i g_0(\zeta) - \\ - 2\zeta(\alpha) \int_{\gamma} \varphi_q \left(3i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right) dZ - 2\zeta(\pi i) \int_{\delta} \varphi_q \left(i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right) dZ + \\ + \int_{\gamma} \varphi_q \left(3i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right) \zeta(Z - \zeta) dZ.$$

Se la assegnata funzione $\varphi_q(\theta)$ è una costante k , risultando $g_0(\zeta) = k$; $\int_{\gamma} dZ = 2\pi i$; $\int_{\delta} dZ = -2\alpha$, la (11) diviene una identità in base alla ben nota relazione che lega la $\zeta(\pi i)$ alla $\zeta(\alpha)$; relazione che nel nostro caso si scrive⁽¹⁾

$$\alpha \zeta(\pi i) - \pi i \zeta(\alpha) = \frac{\pi i}{2}.$$

(1) J. TANNERY et J. MOLK, loc. cit., to. II, p. 249, form. XXVIII (1), 1896.

Pertanto in questo caso particolare, il metodo di integrazione che esponiamo non è applicabile. L'integrale (9), che a meno di un fattore costante si riduce all'integrale

$$(9') \quad \int_{\gamma} \zeta(Z - \zeta) dZ$$

si può allora calcolare, per es., direttamente rammentando che la $\zeta(Z - \zeta)$ di Weierstrass è la derivata logaritmica della $\sigma(Z - \zeta)$ pure di Weierstrass. Si ottiene così per l'integrale (9) uno sviluppo in serie alquanto complicato e però poco agevole per i calcoli numerici. Questo è il metodo che hanno utilizzato, per es., Tomotika ed altri ⁽¹⁾. Per ottenere sotto forma estremamente semplice l'integrale (9') si può impiegare lo sviluppo in serie assegnato altrove alla $\zeta(v)$ di Weierstrass, sviluppo che, riferito alla variabile $Z - \zeta$ e posto $v = i\zeta(\pi i)$, si scrive ⁽²⁾

$$\zeta(Z - \zeta) = \frac{1}{2} - \frac{v}{\pi} (Z - \zeta) + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{q^{2r}}{e^{Z-\zeta} - q^{2r}} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{Z-\zeta}}{e^{Z-\zeta} - q^{-2r}};$$

integrare ambo i membri lungo γ ed utilizzare, qualora occorra, il metodo di integrazione che esponiamo in questa Nota, per il calcolo degli integrali che si ottengono. Risulta così:

$$\int_{\gamma} \zeta(Z - \zeta) dZ = i \{ 2v(\zeta - \alpha) - \pi \}.$$

Supposto ora che la assegnata funzione $\varphi_q(\theta)$ **non** sia una costante, e detto n un numero naturale non nullo, consideriamo l'integrale generico

$$\int_{\gamma} \varphi_q \left[(2n + 1) i \alpha + \frac{\pi}{2} - i Z \right] \zeta(Z - \zeta) dZ$$

ed applichiamo ad esso il metodo di integrazione attorno ad **(R)** già applicato all'integrale (9). Denotando con $g_n(\zeta)$ la somma dei residui dentro **(R)** della funzione integranda si ha:

(1) S. TOMOTIKA, T. NAGAMIYA and Y. TAKENOUTI, *The Lift on a Flat Plate placed near a Plane Wall, with Special Reference to the Effect of the Ground upon the Lift of a Monoplane Aerofoil*. « Report Aeron. Res. Inst. », Tokyo, Imp. Univ., N. 97, 1933. S. TOMOTIKA, *The Lift acting on a Flat Plate in a Stream bounded by an Infinite Plane Wall*. « Report Aeron. Res. Inst. », Tokyo, Imp. Univ., N. 100, 1934.

(2) A. CONSIGLIO, loc. cit., Nota II, *Introduzione*, form. (IV).

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \varphi_q \left[(2n+1)i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right] \zeta(Z-\zeta) dZ &= -2\pi i g_n(\zeta) - \\
 &- 2\zeta(\alpha) \int_{\gamma} \varphi_q \left[(2n+3)i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right] dZ - \\
 &- 2\zeta(\pi i) \int_{\delta} \varphi_q \left[(2n+1)i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right] dZ + \\
 &+ \int_{\gamma} \varphi_q \left[(2n+3)i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right] \zeta(Z-\zeta) dZ.
 \end{aligned}$$

Addizionando a membro a membro le n relazioni che si ottengono da questa cambiandovi successivamente n in $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ e riducendo segue:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \varphi_q \left[(3i\alpha) + \frac{\pi}{2} - iZ \right] \zeta(Z-\zeta) dZ &= -2\pi i \sum_{r=1}^n g_r(\zeta) \\
 &- 2\zeta(\alpha) \sum_{r=1}^n \int_{\gamma} \varphi_q \left[(2r+1)i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right] dZ - \\
 &- 2\zeta(\pi i) \sum_{r=1}^n \int_{\delta} \varphi_q \left[(2r+1)i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right] dZ + \\
 &+ \int_{\gamma} \varphi_q \left[(2n+1)i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right] \zeta(Z-\zeta) dZ.
 \end{aligned}$$

Sostituendo nella (11) si ottiene infine:

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \int_{\gamma} \varphi_q \left(i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right) \zeta(Z-\zeta) dZ &= -2\pi i \sum_{r=0}^n g_r(\zeta) - \\
 &- 2\zeta(\alpha) \sum_{r=0}^n \int_{\gamma} \varphi_q \left[(2r+1)i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right] dZ - \\
 &- 2\zeta(\pi i) \sum_{r=0}^n \int_{\delta} \varphi_q \left[(2r+1)i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right] dZ + \\
 &+ \int_{\gamma} \varphi_q \left[(2n+3)i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right] \zeta(Z-\zeta) dZ.
 \end{aligned}$$

Quando le $\varphi_i \left[(2r+1)i\alpha + \frac{\pi}{2} - iZ \right]$ siano esplicitamente integrabili su γ e δ , questa formula riduce il calcolo del primo membro all'ultimo integrale del secondo membro. Se — come difatti è avvenuto in casi già da me considerati — quest'ultimo integrale per $n \rightarrow \infty$ tende a zero, o ad un limite determinabile, la (12), magari dopo opportuna organizzazione del secondo membro, fornisce uno sviluppo in serie convergente dell'integrale considerato.

Il secondo degli integrali del secondo membro della (8) cioè, a meno di un fattore costante, l'integrale

$$(13) \quad \int_{\Gamma} \varphi_i \left(\frac{\pi}{2} - iZ \right) \zeta(Z - \zeta) dZ$$

si può calcolare con lo stesso metodo utilizzato per il calcolo dell'integrale (9), integrando lungo il perimetro del rettangolo (\mathbf{R}_1) somma di quello Σ e del suo simmetrico rispetto al segmento γ . Si ottiene così per l'integrale (13) una espressione analoga a quella (12) ottenuta per l'integrale (9).

Matematica. — *Sur les matrices de Dirac au sens large.*
Nota ⁽¹⁾ di R. L. GOMES, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Avant le développement analytique de cette Note, qu'il me soit permis d'en faire la justification en quelques mots.

Dans la *Contribution mathématique aux matrices de Dirac* de M. Pauli (fasc. II, vol. VI des « Annales de l'Institut Henri Poincaré ») on peut lire, pages 109: « on sait que toutes les propriétés importantes de ces matrices sont indépendantes de leur spécialisation numérique et découlent uniquement des relations $\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2 \delta_{ij}$ et du fait qu'elles ont quatre lignes et quatre colonnes. Il existe pourtant certains théorèmes dont les seules démonstrations connues jusqu'à présent sont précisément appel à cette spécialisation numérique, par exemple, le théorème fondamental (le théorème de pages 3 de notre Note dans le cas particulier de Dirac).

Et après avoir fait une référence à la démonstration de M. Van der Waerden basée sur la théorie des groupes, M. Pauli nous dit: « Il nous a semblé utile d'en donner une démonstration élémentaire à l'usage des physiciens, et nous avons trouvé qu'une méthode de M. J. Schur permet de la faire très facilement.

« Dans ce qui suit, nous exposerons cette démonstration en détail ».

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1937.

Or, nous basant *tout simplement* dans les propriétés des valeurs et vecteurs propres des matrices A_i d'un système vérifiant les relations fondamentales $A_i A_j + A_j A_i = 2 \delta_{ij}$, il nous fut possible d'en déduire le théorème fondamental et bien d'autres résultats.

Et c'est précisément cette méthode et quelques unes de leur applications que je vais de suite développer.

1. Soit

$$(1) \quad A_1, A_2, \dots, A_{2p}$$

un système d'un nombre pair $- 2p -$ de matrices de n^e ordre vérifiant entre elles les relations fondamentales de Dirac

$$(2) \quad A_i A_j + A_j A_i = 2 \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2p).$$

Si l'on procède avec ces matrices comme l'on a procédé antérieurement⁽¹⁾ avec les matrices d'un système de Dirac (quatre matrices de quatrième ordre $- \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 -$ vérifiant les relations (2)), vu que les deux systèmes $- \gamma_i, A_i -$ ont en commun le contenu logique de (2), on a le droit d'écrire (sous la forme de supermatrices),

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad A_j = \begin{vmatrix} 0 & -A_j^{(1)} \\ A_j^{(1)} & 0 \end{vmatrix}$$

$$j = 3, 4, \dots, 2p,$$

$A_j^{(1)}$ étant $2p - 2$ matrices de Dirac d'ordre réduite,

$$n_1 = \frac{n}{2}.$$

Il s'ensuit donc que

$$n = 2 n_1 \geq 2.$$

Cette nouvelle représentation des A_i suppose, comme l'on sait, une base

$$(3) \quad e_1 e_2 \dots e_{n_1}; \quad e_{n_1+1} = A_2 e_1 \dots e_n = A_2 e_{n_1}$$

constituée par des vecteurs propres de A_1 :

$$\begin{array}{ll} e_1 & e_2 \quad \dots e_{n_1} \quad \text{pour} \quad \lambda = +1 \\ e_{n_1+1} e_{n_1+2} \dots e_n & \quad \quad \quad \text{»} \quad \lambda = -1. \end{array}$$

Dans l'hypothèse

$$m = 2 \quad \text{ou} \quad p = 1,$$

(1) Note antérieure dans ces « Rendiconti ».

c'est à dire, deux matrices A_1, A_2 de l'ordre

$$n \geq 2,$$

on aura tout simplement

$$A_1 = A_1^{(0)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad A_2 = A_2^{(0)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dans l'hypothèse suivante

$$m = 4 \quad p = 2,$$

on aura en

$$A_j^{(1)} \quad (j = 3, 4)$$

deux matrices, d'ordre

$$n_1 = \frac{n}{2} \geq 2$$

qui se comportent comme $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}$ (hypothèse antérieure), et l'ordre de A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sera

$$n \geq 4 = 2^2.$$

Pour

$$m = 6, \quad p = 3,$$

les $A_j^{(1)}$ ($j = 3, 4, 5, 6$) forment elles aussi un nouveau système de Dirac avec quatre matrices de l'ordre commune

$$\frac{n}{2}.$$

En les réduisant par le procédé général, on arrivera aux matrices

$$A_j^{(2)} : A_3^{(2)}, A_6^{(2)}$$

de l'ordre

$$\frac{n}{2^2}.$$

Et en répétant ce raisonnement ($p - 1$) fois on arrivera finalement aux deux matrices (de Dirac)

$$A_{2^{p-1}}^{(p-1)}, \quad A_{2^{p-1}}^{(p-1)},$$

de l'ordre

$$n_{p-1} = \frac{n}{2^{p-1}} \geq 2.$$

L'ordre minimum d'un système de Dirac qui contient $m = 2p$ matrices sera donc

$$n' = 2^p \quad ; \quad n \geq 2^p .$$

En particulier, pour

$$m = 4 \quad , \quad p = 2$$

il vient

$$n' = 4 :$$

système de Dirac $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$!

THÉOREME. — Soient

$$A_1 A_2 \dots A_{2p}$$

$$B_1 B_2 \dots B_{2p}$$

deux systèmes de $m = 2p$ matrices de Dirac (au sens large) d'un ordre commune

$$n = 2^p n_1 \quad (n_1 \geq 1) .$$

Il est toujours possible de construire une matrice non dégénérée S telle que

$$S^{-1} A_i S = B_i \quad (i = 1 \dots 2p) .$$

En effet, les

$$A_{2p-1}^{(p-2)} \quad , \quad A_{2p}^{(p-1)}$$

$$B_{2p-1}^{(p-1)} \quad , \quad B_{2p}^{(p-1)}$$

- dernières sub-matrices le long du procédé de réduction antérieurement développé - ayant la même forme réduite, on a le droit d'écrire

$$S_A^{-1} A_i S = N_i$$

$$S_B^{-1} B_i S = N_i$$

d'où

$$S_A^{-1} A_i S_A = S_B^{-1} B_i S_B$$

ou

$$S^{-1} A_i S = B_i$$

avec

$$S = S_A S_B^{-1} .$$

THÉOREME. — Si l'on représente par T une matrice commutable avec les A_i ($i = 1 \dots 2p$) d'un système de Dirac (au sens large) sa transformée au moyen de S_A :

$$S_A^{-1} T S_A = T_1 ,$$

sera de la forme

$$T_i = \left\| \begin{array}{c} T_i^{(p)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_i^{(p)} \end{array} \right\|.$$

$T_i^{(p)}$ étant une matrice de l'ordre

$$n_p = \frac{n}{2^p}.$$

Corollaire. — Les seules matrices commutables avec les A_i d'un système de Dirac qui en a $m = 2^p$ d'une même ordre

$$n = 2^p$$

ce sont les matrices-scalaires.

C'est ce qui arrive, par exemple, dans le cas de Dirac : quatre matrices — $m = 4$, $p = 2$, de quatrième ordre — $n = 2^2$. $n/2^p = 1$.

La démonstration (du théorème) se fait comme dans l'hypothèse d'un système de Dirac (γ_i), en ayant égard au résultat bien connu : si la matrice $A(a_{ik})$ est commutable avec une autre D — qui est diagonale — on a

$$a_{ik} = 0 \quad \text{pour} \quad d_i \neq d_k.$$

Corollaire. — L'ordre minimum d'un système de Dirac B_i ($i = 1 \dots 2^p$) — n .^e ordre — dont chaque matrice B_i est commutable avec toute les A_i ($i = 1 \dots 2^p$) d'un autre système (de Dirac) — n .^e ordre aussi — est

$$n' = 2^{2^p}.$$

En effet, les B_i étant commutables d'avec $A_1 \dots A_{m=2^p}$ on sait déjà que

$$S_A^{-1} B_i S_A = \left\| \begin{array}{c} B_i^{(p)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_i^{(p)} \end{array} \right\|.$$

les $B_i^{(p)}$ ($i = 1 \dots 2^p$) donnant aussi un système de Dirac de l'ordre

$$n_p = \frac{n}{2^p}.$$

Mais en étant de Dirac on sait déjà que

$$n_p \geq 2^p.$$

Donc

$$n \geq 2^{2^p},$$

q. e. d.

M. Louis de Broglie, donne, dans ses *Nouvelles Recherches sur la Lumière*, p. 7, deux systèmes

$$A_i \quad , \quad B_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

dont les matrices, de 16^e ordre, se comportent justement selon corol. 2.

En effet, on a - V. N. R. ⁽¹⁾ -

$$A_i A_j + A_j A_i = 2 \delta_{ij} \quad B_i B_j + B_j B_i = 2 \delta_{ji}$$

et

$$A_i B_j - B_j A_i = 0.$$

Or, en partant de $m = 4$ matrices - deux systèmes de quatre matrices de Dirac - A_i et B_i - on était déjà obligé de prendre

$$n \text{ (ordre commune des } A_i \text{ et } B_j)$$

$$\geq 2^4 = 16.$$

M. Louis de Broglie a donc choisi le minimum

$$n_1 = 16.$$

L'équation fondamentale de M. Louis de Broglie.

En faisant

$$H = H^{(a)} + H^{(b)}$$

et

$$H^{(a)} = \frac{c}{2\chi} \left(A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial}{\partial y} + A_3 \frac{\partial}{\partial z} + \chi \mu_0 c A_4 \right)$$

$$H^{(b)} = \frac{c}{2\chi} \left(B_1 \frac{\partial}{\partial x} + B_2 \frac{\partial}{\partial y} + B_3 \frac{\partial}{\partial z} + \chi \mu_0 c B_4 \right),$$

selon N. R. - (41) pag. 25 - sans rien ajouter pour le moment sur les matrices, A_i, B_i ($i = 1, 2, 3, 4$), il suffit d'exiger que

$$H^{(a)} = H^{(b)} = \frac{c^2}{4\chi^2} (\Delta + \mu_0^2 \psi^2 c^2)$$

et

$$H^{(a)} H^{(b)} = H^{(b)} H^{(a)},$$

pour avoir à écrire

$$A_i A_j + A_j A_i = 2 \delta_{ij} \quad ; \quad B_i B_j + B_j B_i = 2 \delta_{ij}$$

et

$$A_i B_j - B_j A_i = 0.$$

(1) *Nouvelles Recherches sur la Lumière.*

L'ordre minimum des A_i, B_j ne pourra donc être différente de

$$n = 16.$$

En prenant justement ce minimum, on obtient l'équation de M. Louis de Broglie avec « huit matrices, A_1, A_2, A_3, A_4 et B_1, B_2, B_3, B_4 rassemblées en deux systèmes de Dirac » (au sens large).

Matematica. — *Sulla funzione $\delta(x)$ di Dirac.* Nota ⁽¹⁾ di M. SCHÖNBERG, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Ci proponiamo di mostrare che coll'integrale di Stieltjes è possibile rappresentare nel campo reale l'operatore unità e l'operatore derivata. Nel caso della derivata compaiono due integrali di Stieltjes. In questo modo si può evitare l'impiego della funzione impropria di Dirac e della sua derivata.

Ricordiamo che l'integrale di Stieltjes $\int_a^b f(x) dF(x)$ è il limite della somma:

$$(1) \quad f(a) [F(x_1) - F(a)] + f(x_1) [F(x_2) - F(x_1)] + \dots + \\ + f(x_{n-1}) [F(b) - F(x_{n-1})]$$

(ove x_1, x_2, \dots, x_{n-1} sono dei numeri crescenti dell'intervallo $a - b$) quando n tende a infinito in modo che tutti gli intervalli tendono a zero; questo limite esiste certamente se $f(x)$ è continua e $F(x)$ a variazione limitata.

Se $F(x)$ è derivabile, l'integrale di Stieltjes $\int_a^b f(x) dF(x)$ si riduce all'integrale comune $\int_a^b f(x) F'(x) dx$.

OPERATORE UNITÀ.

Introduciamo una funzione $\Phi(x)$ eguale a $-\frac{1}{2}$ per x negativo eguale a 0 per $x = 0$, e eguale a $\frac{1}{2}$ per x positivo. La convenzione $\Phi(0) = 0$ è vantaggiosa perchè permette di considerare la rappresentazione per mezzo dell'integrale di Fourier:

$$(2) \quad \Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin tx}{t} dt.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1937.

Si può anche definire la $\Phi(x)$ nel modo seguente:

$$(3) \quad \Phi(x) = \begin{cases} \frac{x}{2\sqrt{x^2}} & \text{per } x \neq 0 \\ \text{arbitraria} & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

In ambo i casi abbiamo:

$$(4) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\Phi(\xi - x).$$

L'equazione (4) risulta immediatamente dalla definizione dell'integrale di Stieltjes, dato che solo gli intervalli contenenti il punto x contribuiscono al valore della somma che definisce l'integrale.

Si può confrontare la (4) colla formola simbolica di Dirac:

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \delta(\xi - x) dx = f(x).$$

Sussiste la seguente relazione simbolica

$$(6) \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Il termine $= \frac{1}{2}$ può scomparire se si modifica convenientemente la definizione di $\Phi(x)$.

L'OPERATORE DERIVATA (1).

Per una funzione continua $f(x)$, che ha una derivata continua nel punto x , abbiamo:

$$(7) \quad f'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x + \xi) - f(x)}{\xi} d\Phi(\xi).$$

Basta osservare che

$$\frac{f(x + \xi) - f(\xi)}{\xi} = f'(x + \theta \xi) \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

(1) Questo operatore fu già considerato nel suo aspetto matematico dal PEANO, e, con riguardo ad applicazioni fisiche dal GIORGI. Cfr., per es., la Conferenza, ricca di accenni storici, tenuta dal GIORGI al Seminario Matematico e Fisico di Milano [«Rendiconti» di tale Seminario], vol. VIII, 1934, p. 203].

Il rapporto incrementale, che figura in (7) può essere ottenuto con una quadratura di Stieltjes applicata a $f(x)$. Infatti abbiamo:

$$(8) \quad \frac{f(x + \xi) - f(x)}{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) d\Psi(\eta - x, \xi)$$

ove:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Psi(\eta, \xi) = 0 & \text{per } \eta < 0 \text{ e } \eta > \xi \\ \Psi(\eta, \xi) = -\frac{1}{\xi} & \text{per } 0 < \eta < \xi \\ \Psi(\eta, \xi) = -\frac{1}{2\xi} & \text{per } \eta = 0 \text{ e } \eta = \xi. \end{array} \right.$$

Sostituendo (8) in (7) si trova:

$$(10) \quad f'(x) = \int d\Phi(\xi) \int f(\eta) d\Psi(\eta - x, \xi).$$

Notiamo inoltre che $\Psi(\eta, \xi)$ può essere espressa per mezzo della Φ :

$$(11) \quad \Psi(\eta, \xi) = \frac{\Phi(\eta - \xi) - \Phi(\eta)}{\xi}.$$

La relazione simbolica di Dirac equivalente alla (10) sarebbe:

$$(12) \quad f'(x) = \int f(\eta) \delta'(x - \eta) d\eta.$$

Il parallelismo tra (10) e (12) non è tanto perfetto come quello tra (4) e (5), a causa della presenza di due integrazioni nell'espressione della derivata. Ma si può stabilire una certa analogia ricordando la seguente formola simbolica di Dirac:

$$(13) \quad x\delta'(x) = -\delta(x).$$

Si ha:

$$\int d\Phi(\xi) \int f(\eta) (\eta - x) d\eta \Psi(\eta - x, \xi) = \left[\frac{d}{d\eta} \left\{ f(\eta) (\eta - x) \right\} \right]_{\eta=x} = f'(x).$$

Quindi:

$$(14) \quad f(x) = \int d\Phi(\xi) \int f(\eta) (\eta - x) d\eta \Phi(\eta - x, \xi).$$

Matematica. — *Su una possibile particolarità delle linee principali di una superficie.* Nota I ⁽¹⁾ di A. TERRACINI, presentata dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Dopo che il Blaschke ⁽²⁾ ebbe cercato di dimostrare che un 5-tessuto di curve piane di rango massimo è topologicamente rappresentabile nel sistema delle tangenti di una linea piana algebrica di quinta classe, il Bol ⁽³⁾ diede un esempio in contrario. Mediante una nota rappresentazione iperspaziale, l'esempio del Bol fa conoscere una superficie (trascendente) S dello spazio a cinque dimensioni dotata di cinque sistemi ∞^1 di linee (necessariamente principali), lungo ciascuna delle quali la superficie S ammette un iperpiano tangente fisso (così come avviene per la superficie di Veronese lungo ciascuna delle sue ∞^2 coniche). Il Bompiani, ritornando sull'argomento ⁽⁴⁾, ha indicato una costruzione generale di tutte le superficie dello S_5 che ammettono *tre* sistemi ∞^1 di linee con iperpiano tangente fisso; e ha posto il problema se, quando si richieda tale proprietà per il massimo numero possibile (*cinque*) di sistemi ∞^1 di linee, si trovi unicamente (all'infuori della superficie di Veronese) la superficie di Bol.

Orbene, in questa Nota e in una successiva proverò che alla domanda posta dal Bompiani è da rispondere negativamente, vale a dire che vi sono superficie proiettivamente distinte dalla superficie di Bol, che godono della medesima proprietà.

Accennerò anzitutto, nei nn. 1, 2, alcune generalità sul procedimento analitico che si può seguire per la determinazione delle superficie che possiedono cinque sistemi ∞^1 di linee con iperpiano tangente fisso. Dopo che avevo portata la trattazione a questo punto, alcuni ulteriori assaggi del problema da me effettuati mi fecero acquisire la convinzione che esso dovesse ammettere una notevole varietà di soluzioni. Pensai allora di circoscrivere *a priori* il problema stesso in base a qualche altra condizione geometrica ⁽⁵⁾: precisamente prefissai la seguente condizione: che tre dei sistemi ∞^1 di linee richiesti siano sistemi, come dirò brevemente, *conici* (intendendo con

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1937.

(2) *Ueber die Tangenten einer ebenen Kurve fünfter Klasse* (T 50), « Abh. aus der Seminar der Hamburgischen Univ. », Band 9, 1933.

(3) *Ueber ein bemerkenswertes Fünfgewebe in der Ebene* (T 64), « Ibid. », Band 11, 1936.

(4) BOMPIANI e BORTOLOTTI, *Ricerche sulle superficie dello spazio a cinque dimensioni e nuove caratterizzazioni della superficie di Veronese*. « Math. Zeitschr. », Band 42, 1937.

(5) Altri casi sono in corso di studio da parte del dott. Buzano.

ciò che ciascuno sia segato sulla superficie da $\infty^1 S_3$ passanti per un piano fisso), coi tre piani vertici dei coni appartenenti a un medesimo iperpiano Σ_4 . A' prefissare una tale particolarizzazione fui condotto oltre che dalla circostanza che la superficie di Bol soddisfa a tali condizioni (e anzi per essa tutti i cinque sistemi di linee principali sono conici coi piani vertici appartenenti a uno stesso iperpiano), anche dal fatto che essa porta dal punto di vista analitico a notevoli semplificazioni (nn. 3-7). *Così delimitato il problema*, ho trovato (cfr. i nn. 9 e sgg.) che esso ammette in tutto quattro superficie soluzioni distinte, e cioè, oltre alla superficie di Bol, tre altre superficie — designate più avanti come superficie H_1 , D e \bar{H} —, due delle quali offrono la notevole particolarità di essere *algebriche*, e anzi addirittura razionali: oltre alle superficie stesse sono poi algebriche razionali tutte le loro linee principali dei cinque sistemi. Anche dal punto di vista algebrico tali soluzioni offrono un certo interesse in quanto (con la rappresentazione piana della superficie) forniscono *esempi di un sistema lineare ∞^5 di curve piane algebriche, cremonianamente distinto da quello delle coniche, tale che per ogni punto del piano passa il massimo numero a priori possibile (cinque) di curve del sistema lineare, dotate ciascuna di una componente doppia uscente dal punto stesso.*

Per le quattro superficie ora accennate i sistemi di linee principali sono tutti distinti. Non ho però creduto opportuno escludere *a priori* dalle mie considerazioni altre superficie che — sempre possedendo tre sistemi conici distinti — soddisfano al nostro problema senza che siano distinti tutti cinque i sistemi di linee principali: si ottengono così le superficie di cui al n. 8.

Tornando al caso di sistemi di linee principali tutti distinti, le quattro soluzioni da me trovate danno luogo — dal punto di vista topologico differenziale — ad altrettanti 5-tessuti che ho indicati al n. 13. Essi si differenziano fra loro, p. es., per la circostanza che presentano sempre un numero diverso di terne a configurazione esagonale: mentre tali sono tutte le terne nel caso di Bol, se ne hanno rispettivamente quattro, sei e otto per le superficie H_1 , \bar{H} e D .

Avvertiamo una volta per tutte che nel seguito sottintendiamo senz'altro escluse le superficie rappresentanti equazioni di Laplace, e anche la superficie di Veronese.

1. Sia S una superficie dello S_5 per la quale almeno due sistemi (distinti) di linee principali siano a iperpiano tangente fisso. Adottando le linee di questi sistemi come linee u e v , l'ipotesi fatta si traduce in quella che ciascuno dei due punti x_{uuu} e x_{uuv} sia combinazione lineare dei punti x , x_u , x_v , x_{uu} , x_{uv} , e analogamente scambiando u con v . Perciò la superficie S appare come integrale di un sistema lineare alle derivate parziali del terz'ordine, del tipo

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{uuu} = \alpha x_{uu} + \beta x_{uv} + \dots \\ x_{uuv} = \gamma x_{uu} + \delta x_{uv} + \dots \\ x_{uvv} = \lambda x_{uv} + \mu x_{vv} + \dots \\ x_{vvv} = \omega x_{uv} + \rho x_{vv} + \dots \end{array} \right.$$

dove $\alpha, \beta, \dots, \omega, \rho$ sono funzioni di u, v : non scriviamo esplicitamente i termini in x e nelle derivate prime. Posto $\tau = \frac{dv}{du}$, gli ulteriori tre sistemi di linee principali delle S si hanno ⁽¹⁾ integrando l'equazione differenziale

$$(2) \quad \beta + (3\delta - 3\mu - \alpha)\tau + (3\lambda - 3\gamma - \rho)\tau^2 + \omega\tau^3 = 0.$$

Con posizioni ovvie, scriveremo la (2) anche sotto la forma

$$(2') \quad A + B\tau + C\tau^2 + D\tau^3 = 0.$$

Notiamo subito che, affinchè i tre nuovi sistemi di linee principali siano distinti dai due precedenti, deve essere

$$(3) \quad \beta \neq 0, \quad \omega \neq 0,$$

e che il discriminante G della (2') come equazione cubica in τ , è dato da

$$(4) \quad 27G = 18ABCD - 4AC^3 - 4DB^3 - 27A^2D^2 + B^2C^2;$$

cosicchè la condizione affinchè quei tre sistemi di linee principali siano distinti fra loro è

$$(5) \quad G \neq 0.$$

2. Imponiamo ora che le linee principali dei tre ulteriori sistemi definiti dalla (2) siano esse pure a iperpiano tangente fisso: si deve scrivere che per uno qualunque dei valori di τ individuati dalla (2) ciascuno dei due punti

$$\begin{aligned} (\tau_u + \tau\tau_v)x_{uv} + x_{uuu} + 2\tau x_{uuv} + \tau^2 x_{uvv}, \\ (\tau_u + \tau\tau_v)x_{vv} + x_{uuv} + 2\tau x_{uvv} + \tau^2 x_{vvv} \end{aligned}$$

è combinazione lineare dei punti

$$x, x_u, x_v, x_{uu} + \tau x_{uv}, x_{uv} + \tau x_{vv},$$

(1) Come si desume subito, p. es., da BOMPIANI e BORTOLOTTI, op. cit., n. 12.

vale a dire, ove si tenga conto delle (1), che per uno qualunque di quei valori di τ sono soddisfatte le equazioni

$$(6_1) \quad -(\tau_u + \tau\tau_v) - \beta + (\mu + \alpha - 2\delta)\tau + (2\gamma - \lambda)\tau^2 = 0,$$

$$(6_2) \quad (\tau_u + \tau\tau_v) + (2\mu - \delta)\tau + (\gamma + \rho - 2\lambda)\tau^2 - \omega\tau^3 = 0.$$

E poichè le (6_1) , (6_2) sommate danno la (2), basta tener conto della (6_1) . Questa poi, ricavando per derivazione τ_u e τ_v dalla (2), si scrive sotto la forma di un'equazione di quarto grado in τ :

$$(7) \quad l_0 \tau^4 + l_1 \tau^3 + l_2 \tau^2 + l_3 \tau + l_4 = 0,$$

dove

$$(8) \quad \begin{cases} l_0 = & + D_v & + 3 D (2 \gamma - \lambda) \\ l_1 = D_u + C_v & + 3 D (\mu + \alpha - 2 \delta) + 2 C (2 \gamma - \lambda) \\ l_2 = C_u + B_v - 3 D \beta + 2 C (\mu + \alpha - 2 \delta) + B (2 \gamma - \lambda) \\ l_3 = B_u + A_v - 2 C \beta + B (\mu + \alpha - 2 \delta) \\ l_4 = A_u & - B \beta. \end{cases}$$

Perciò in definitiva, affinchè i tre sistemi di linee principali (2) siano essi pure a iperpiano tangente fisso, occorre e basta che il primo membro della (7) sia divisibile per il primo membro della (2), vale a dire che sussistano le tre relazioni

$$(9) \quad AD l_1 = AC l_0 + D^2 l_4,$$

$$(10) \quad AD l_2 = AB l_0 + CD l_4,$$

$$(11) \quad AD l_3 = A^2 l_0 + BD l_4,$$

dove A, B, C, D (a meno di un eventuale fattore) sono i coefficienti della (2), mentre le l_0, l_1, \dots, l_4 sono definite dalle (8).

3. Introduciamo ora — come si è detto — l'ipotesi che tre fra i sistemi di linee principali della superficie S siano contenuti in S_3 passanti per tre piani fissi π_1, π_2, π_3 , situati in uno stesso iperpiano Σ_4 (ma aventi a due a due in comune un solo punto e non passanti tutti tre per uno stesso punto). Assumiamo per le coordinate proiettive omogenee di punto x_1, x_2, \dots, x_6 un sistema di riferimento tale che l'iperpiano Σ_4 abbia per equazione $x_1 = 0$, e più precisamente che (come è lecito supporre) i tre piani considerati siano rappresentati dai tre sistemi

$$(\pi_1) \ x_1 = x_3 = x_5 = 0 \ ; \ (\pi_2) \ x_1 = x_2 = x_4 = 0 \ ; \ (\pi_3) \ x_1 = x_2 + x_3 = x_6 = 0.$$

Basta a tale scopo assumere i vertici A_1, A_2, \dots, A_6 della piramide di riferimento in modo che $A_6 \equiv \pi_1 \pi_2$, $A_5 \equiv \pi_2 \pi_3$, $A_4 \equiv \pi_3 \pi_1$ e che A_2 e A_3

coincidano con le traccie, rispettivamente su π_1 e su π_2 di una generica fra le ∞^3 rette appoggiate a π_1, π_2, π_3 , determinando poi opportunamente il punto unità. Se le linee principali u e v sono rispettivamente quelle contenute in S_3 per i piani π_1 e π_2 , si può — sostituendo ai parametri u e v loro opportune funzioni — adottare per la S la rappresentazione parametrica

$$(12) \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = 1 : u : v : U : V : \varphi(u + v),$$

dove U, V sono funzioni rispettivamente della sola u e della sola v ⁽¹⁾: le linee principali situate in S_3 per π_3 risultano allora le linee $u + v = \text{cost.}$ I valori attuali di $\alpha, \beta, \dots, \omega, \rho$ (n. 1) si calcolano agevolmente in base alla rappresentazione parametrica (12) e risultano

$$(13) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{U'''}{U''} & , & \beta = \frac{\varphi'''}{\varphi''} - \frac{U'''}{U''} & , & \gamma = \mu = 0, \\ \delta = \lambda = \frac{\varphi'''}{\varphi''} & , & \omega = \frac{\varphi'''}{\varphi''} - \frac{V'''}{V''} & , & \rho = \frac{V'''}{V''}. \end{cases}$$

Continuando a indicare con α e ρ i rapporti U'''/U'' e V'''/V'' , e ponendo $\vartheta = \varphi'''/\varphi''$, si ha dunque attualmente nella (2'), che supponiamo di aver ricavata dalla (2) mediante moltiplicazione per $-\varphi''$:

$$(14) \quad A = \alpha - \vartheta \quad , \quad B = \alpha - 3\vartheta \quad , \quad C = \rho - 3\vartheta \quad , \quad D = \rho - \vartheta.$$

Utilizzando questi valori nel calcolo delle (8), le condizioni (9), (10), (11) trovate al numero precedente affinché in ogni sistema le linee principali siano a iperpiano tangente fisso risultano trasformabili nelle due seguenti⁽²⁾

$$(15) \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha' & \alpha^2 \\ 1 & \rho' & \rho^2 \\ 1 & \vartheta' & \vartheta^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(16) \quad \begin{aligned} & -2\alpha^2\rho^2 + \alpha^2\rho' + [4\alpha\rho(\alpha + \rho) - 2\alpha'\rho - 2\alpha\rho']\vartheta + \\ & + [-2\alpha^2 - 6\alpha\rho - 2\rho^2 + 2\alpha' + \rho']\vartheta^2 + 2(\alpha + \rho)\vartheta^3 + \\ & + (3\rho - \alpha)\alpha\vartheta' - (\alpha + \rho)\vartheta\vartheta' = 0. \end{aligned}$$

(1) Nessuna tra le funzioni U, V, φ deve essere lineare, affinché la S non stia in uno S_4 ; e allora è anche certo che la S non rappresenta alcuna equazione di Laplace. Indichiamo poi con accenti, per ciascuna di quelle funzioni, le derivazioni rispetto al suo argomento.

(2) Una riduzione nel numero delle condizioni era presumibile *a priori*, dato che attualmente per uno dei tre sistemi di linee principali definiti dalla (2) era già assicurata la validità della proprietà in esame.

Si tratta dunque in definitiva di soddisfare al sistema formato dalle (15) e (16) mediante opportune funzioni $\alpha(u)$, $\beta(v)$, $\vartheta(u+v)$, e di risalire poi alle corrispondenti superficie S .

4. Studiamo anzitutto le due seguenti eventualità:

a) le due funzioni $\alpha(u)$, $\rho(v)$ siano eguali fra loro, e quindi eguali a una stessa costante. Se questa è nulla, le (15), (16) sono soddisfatte qualunque sia la funzione ϑ . Si ha così:

$$(A) \quad \alpha = 0 \quad , \quad \rho = 0 \quad , \quad \vartheta = \vartheta(u+v) \quad (\vartheta \text{ funzione arbitraria}).$$

Se invece quella costante non è nulla, essa — alterando u e v per fattori costanti — si può rendere eguale a 1: la (15) è già soddisfatta e resta la sola (16) che assume la forma

$$(\theta - 1)[\theta' - (\theta - 1)(2\theta - 1)] = 0.$$

Perciò $\theta = 1$, oppure $\theta = 1/2$, oppure $\theta = \frac{1 - 2ce^{u+v}}{1 - 4ce^{u+v}}$ dove c è una costante arbitraria non nulla: aggiungendo a ciascuno dei parametri u , v un'opportuna costante si può rendere $c = 1/2$, e si ottengono così le soluzioni

$$(B) \quad \alpha = 1 \quad , \quad \rho = 1 \quad , \quad \vartheta = 1;$$

$$(C) \quad \alpha = 1 \quad , \quad \rho = 1 \quad , \quad \vartheta = 1/2;$$

$$(D) \quad \alpha = 1 \quad , \quad \rho = 1 \quad , \quad \vartheta = \frac{1 - e^{u+v}}{1 - 2e^{u+v}};$$

b) sia invece $\rho(v) = -\alpha(u)$, cosicchè si può supporre $\alpha = 1$, $\rho = -1$. Anche qui, essendo già soddisfatta la (15), resta la sola (16), che diventa $2\vartheta' = \vartheta^2 - 1$. Perciò $\vartheta = 1$, oppure $\vartheta = -1$, oppure $\vartheta = \frac{1 - ce^{u+v}}{1 + ce^{u+v}}$, dove si può adottare $c = 1$. Si hanno così le soluzioni

$$(E) \quad \alpha = 1 \quad , \quad \rho = -1 \quad , \quad \vartheta = 1;$$

$$(F) \quad \alpha = 1 \quad , \quad \rho = -1 \quad , \quad \vartheta = -1;$$

$$(G) \quad \alpha = 1 \quad , \quad \rho = -1 \quad , \quad \vartheta = \frac{1 - e^{u+v}}{1 + e^{u+v}}.$$

5. Passando ora a studiare le ipotesi opposte a quelle fatte nel numero precedente, possiamo anche supporre $\vartheta = \pm \alpha$; $\vartheta = \pm \rho$; perchè se fosse p. es. $\vartheta = \alpha$, introducendo nuove coordinate curvilinee $u' = u$, $v' = u + v$ si ricadrebbe sul caso b) del n. 4.

L'eliminazione di ρ' fra le due relazioni (15) e (16) conduce ad annullare un'espressione che si scinde in due fattori: l'uno è $\rho - \vartheta$, dal quale

ora possiamo prescindere, e in conseguenza il risultato di quella eliminazione si presenta sotto la forma

$$(17) \quad (\alpha\rho - \alpha\vartheta - \rho\vartheta)(\alpha' - \vartheta' - 2\alpha^2 + 2\vartheta^2) + 3\alpha^2\vartheta' - 3\vartheta^2\alpha' = 0.$$

D'altro lato, avuto riguardo al fatto che attualmente la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha^2 & \rho^2 & \vartheta^2 \end{vmatrix}$$

non è nulla, la (15) permette di introdurre due funzioni $p(u, v)$, $q(u, v)$ tali che

$$(18_1) \quad \alpha' = p\alpha^2 + q,$$

$$(18_2) \quad \rho' = p\rho^2 + q,$$

$$(18_3) \quad \vartheta' = p\vartheta^2 + q.$$

Ricavando di qui α' e ϑ' , la (17), previa divisione per $\alpha^2 - \vartheta^2$, si trasforma nella

$$(19) \quad (p - 2)(\alpha\rho - \alpha\vartheta - \rho\vartheta) + 3q = 0.$$

Resta dunque da studiare il sistema formato dalle (18) e (19), le quali sono anche sufficienti affinchè valgano le (15) e (16). Ora, ricavando q dalla (19) e poi eliminando p_u e p_v fra le tre equazioni che si ottengono dalla (18₁) derivata rispetto a v , dalla (18₂) derivata rispetto a u , e dalla differenza fra la (18₃) derivata rispetto a u oppure rispetto a v , si ottiene

$$(p - 2)(2p - 1)T \begin{vmatrix} 0 & 3\alpha^2 - T & \rho + \vartheta \\ 3\rho^2 - T & 0 & \alpha + \vartheta \\ 3\vartheta^2 - T & -3\vartheta^2 + T & \alpha - \rho \end{vmatrix} = 0,$$

dove è posto $T = \alpha\rho - \alpha\vartheta - \rho\vartheta$. Perciò, siccome $(\alpha - \rho)(\alpha + \vartheta)(\rho + \vartheta) \neq 0$, ne segue facilmente $(p - 2)(2p - 1)T = 0$. Si hanno dunque le possibilità:

a) $p = 2$, e perciò $q = 0$, cioè

$$(H) \quad \alpha' = 2\alpha^2, \quad \rho' = 2\rho^2, \quad \vartheta' = 2\vartheta^2.$$

b) $p = 1/2$; allora la q che compare nelle (18₁), (18₂), (18₃) non può essere che una costante k , e la (19) dà allora $\alpha\rho - \alpha\vartheta - \rho\vartheta = 2k$. Possiamo supporre $k \neq 0$ per non ricadere nel successivo caso c): si ha dunque

$$(I) \quad \alpha' = \frac{1}{2}\alpha^2 + k, \quad \rho' = \frac{1}{2}\rho^2 + k, \quad \vartheta' = \frac{1}{2}\vartheta^2 + k,$$

$$\alpha\rho - \alpha\vartheta - \rho\vartheta = 2k.$$

c) Se $\alpha\rho - \alpha\vartheta - \rho\vartheta = 0$, è $q = 0$, cosicchè le (18_1) , (18_2) , (18_3) dicono che p è una costante:

$$(L) \quad \alpha' = p\alpha^2, \quad \rho' = p\rho^2, \quad \vartheta' = p\vartheta^2 \quad (p = \text{cost.})$$

$$\alpha\rho - \alpha\vartheta - \rho\vartheta = 0.$$

Nel seguito questo caso verrà distinto in due sottocasi (L_1) e (L_2) secondo che $p = 0$, oppure $p \neq 0$.

Matematica. — *Studio di una particolare funzione definita da un integrale improprio.* Nota ⁽¹⁾ di G. N. WATSON, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Memoria ⁽²⁾ pubblicata nel 1930, il sig. G. della Moglie ha esaminato l'integrale improprio

$$(1) \quad \varphi(\lambda) = \int_0^\infty \left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 + x} \right) \sin \lambda x \, dx,$$

essendo λ una variabile (positiva) reale. In codesta Memoria ha ottenuto un'approssimazione ai valori di $\varphi(\lambda)$ per i grandi valori di λ . Inoltre mediante questa approssimazione e mediante il metodo delle quadrature di Cavalieri-Simpson ha composto una succinta tabella dei valori di $\varphi(\lambda)$ con tre cifre decimali. Sfortunatamente il calcolo con questo metodo delle quadrature è molto faticoso, ed i risultati che si ottengono per questa via non forniscono valutazioni esattissime di $\varphi(\lambda)$ per piccoli valori di λ .

Ho osservato recentemente che la funzione $\varphi(\lambda)$ può rappresentarsi per mezzo delle funzioni di Bessel (funzioni cilindriche) e delle funzioni circolari. Poichè tabelle numeriche tanto delle funzioni di Bessel quanto delle funzioni circolari sono state calcolate ⁽³⁾ in un campo esteso di valori dell'argomento, si può comporre facilmente una tabella più esatta dei valori di $\varphi(\lambda)$.

Nella presente Nota mostrerò la trasformazione che compie il passaggio dall'integrale (1) a un altro integrale (3), per cui si ottiene subito la formula richiesta. Per la dimostrazione del mio risultato procederò come segue.

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1937.

(2) Questi « Rendiconti », XI (1930), pp. 951-959.

(3) Cfr. per es. WATSON, *The Theory of Bessel Functions*. Cambridge, 1922, cap. XX. Questo lavoro sarà indicato nel seguito coll'abbreviatura « W. B. F. ». Una tabella eccellente delle funzioni circolari è contenuta nel *Report of the British Association*, 1916, pp. 60-91.

Con $R(\lambda)$ si indica qui, come d'abitudine, la parte reale del numero complesso λ . Si ha allora

$$(2) \quad \varphi(\lambda) = R \left(-i \int_0^{\infty} \left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 + x} \right) e^{i\lambda x} dx \right).$$

Consideriamo ora l'integrale

$$\int_{ABCD} F(\lambda) d\lambda,$$

dove $F(\lambda)$ denota la funzione

$$\left(\lambda + \frac{1}{2} - \sqrt{\lambda^2 + \lambda} \right) e^{i\lambda}$$

della variabile complessa λ ; e supponiamo che il cammino dell'integrazione nel piano della variabile complessa λ sia definito nel seguente modo. Sia posto che δ e ρ siano due numeri positivi rispettivamente piccolo e grande, si indichi con A, B, C, D i punti angolari del cammino le cui affisse sono rispettivamente $\delta, \rho, \rho i, \delta i$. Il tratto AB è la porzione dell'asse reale compresa fra i punti δ e ρ ; il tratto CD è la porzione dell'asse degli immaginari compresa fra i punti ρi e δi ; i tratti BC e DA sono archi dei cerchi $|\lambda| = \rho$ e $|\lambda| = \delta$ rispettivamente, compresi fra le porzioni positive delle asse. Si indichi inoltre con Δ il dominio chiuso limitato dalla frontiera ABCDA. Il radicale $\sqrt{\lambda^2 + \lambda}$ va determinato in modo che risulti continuo in tutti i punti λ di questo dominio Δ e positivo nei punti λ del cammino AB.

Osservando che la funzione $F(\lambda)$ sotto il segno d'integrale è analitica in tutti i punti di Δ ed applicando all'integrale il teorema di Cauchy, si ha evidentemente

$$\int_{ABCD} F(\lambda) d\lambda = 0.$$

Scindiamo ora il contorno ABCDA nei suoi tratti AB, BC, CD, DA e consideriamo dapprima i due integrali relativi agli archi DA e BC.

Si ha facilmente

$$\lambda \left(\lambda + \frac{1}{2} - \sqrt{\lambda^2 + \lambda} \right) \rightarrow 0$$

sull'arco DA per $\delta \rightarrow 0$, e quindi immediatamente

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{DA} F(\lambda) d\lambda = 0.$$

Si ha pure

$$\begin{aligned} \tilde{\chi} \left(\tilde{\chi} + \frac{1}{2} - \sqrt{\tilde{\chi}^2 + \tilde{\chi}} \right) &= \frac{\tilde{\chi}}{\tilde{\chi} + \frac{1}{2} + \sqrt{\tilde{\chi}^2 + \tilde{\chi}}} \\ &\rightarrow \frac{1}{8} = o(\rho) \end{aligned}$$

sull'arco BC per $\rho \rightarrow \infty$, e quindi

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{BC} F(\chi) d\chi = 0,$$

come conseguenza del notevole teorema del Jordan⁽¹⁾.

Ciò premesso, passando ai limiti ($\delta \rightarrow 0$ e $\rho \rightarrow \infty$) si ottiene

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{AB} F(\chi) d\chi + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{CD} F(\chi) d\chi = 0.$$

Ora si verifica facilmente che, per $\chi = x$ su AB,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{AB} F(\chi) d\chi = \int_0^\infty \left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 + x} \right) e^{i\lambda x} dx,$$

e che, per $\chi = iy$ su CD,

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{CD} F(\chi) d\chi &= \int_0^\infty \left(iy + \frac{1}{2} - e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{y + iy^2} \right) e^{-\lambda y} i dy \\ &= -i \int_0^\infty \left(iy + \frac{1}{2} - e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{y + iy^2} \right) e^{-\lambda y} dy, \end{aligned}$$

dalle quali equazioni si deduce subito per mezzo di (2)

$$\varphi(\lambda) = R \left(\int_0^\infty e^{-\lambda y} \left(iy + \frac{1}{2} - e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{y + iy^2} \right) dy \right).$$

Si ponga per comodità 2λ invece di λ ; e da questa formola si ricava immediatamente

$$(3) \quad \varphi(2\lambda) = R \left(\int_0^\infty e^{-2\lambda y} \left(\frac{1}{2} - e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{y + iy^2} \right) dy \right),$$

(1) Vedi C. JORDAN, *Cours d'Analyse*, II, Parigi, 1894, pp. 285-286.

donde, con facili trasformazioni, segue l'equazione

$$\varphi(2\lambda) = \frac{1}{4\lambda} - R \left(\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{(2\lambda)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{ix}{2\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} dx \right).$$

Consideriamo poi la formola notevole ⁽¹⁾

$$(4) \quad J_\nu(\lambda) + i Y_\nu(\lambda) = \left(\frac{2}{\pi\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{i\left(\lambda - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{ix}{2\lambda} \right)^{\nu - \frac{1}{2}} dx,$$

sotto la condizione $R\left(\nu + \frac{1}{2}\right) > 0$, di cui si servi già il Hankel per ottenere gli sviluppi asintotici delle funzioni di Bessel. In questa formola (4) $J_\nu(\lambda)$ indica la funzione classica di Bessel, e $Y_\nu(\lambda)$ indica la funzione della seconda specie definita dal Weber ⁽²⁾.

Nel nostro caso, per ottenere $\varphi(2\lambda)$, basta porre $\nu = 1$, e si ricava

$$\varphi(2\lambda) = \frac{1}{4\lambda} + R \left(\frac{\pi e^{-i\lambda} (J_1(\lambda) + i Y_1(\lambda))}{8\lambda} \right),$$

e per conseguenza

$$(5) \quad \varphi(2\lambda) = \frac{1}{4\lambda} + \frac{\pi (J_1(\lambda) \cos \lambda + Y_1(\lambda) \sin \lambda)}{8\lambda}.$$

Questa formola semplicissima fornisce la cercata espressione della funzione $\varphi(2\lambda)$.

Confrontiamo ora la nostra formola cogli sviluppi asintotici ⁽³⁾ delle funzioni di Bessel; ne ricaviamo subito lo sviluppo asintotico di $\varphi(2\lambda)$, cioè

$$(6) \quad \varphi(2\lambda) = \frac{1}{4\lambda} - \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 3^2 \cdot 5^2 \cdots (4m-3)^2 (16m^2-1)}{(2m)! (8\lambda)^{2m}} \right) \\ + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}} \left(\frac{3}{8\lambda} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 3^2 \cdot 5^2 \cdots (4m-1)^2 (16m^2+16m+3)}{(2m+1)! (8\lambda)^{2m+1}} \right).$$

In questa formola l'errore che si commetterebbe, prendendo la somma dei primi n termini dell'uno o dell'altro degli sviluppi asintotici nel secondo membro è compreso tra zero ed il termine seguente dello sviluppo in questione, qualunque sia il valore dell'intero positivo n . In particolare osservo

(1) Cfr. per es. « W. B. F. », pp. 168 e 196.

(2) Vedi « W. B. F. », p. 64.

(3) Cfr. per es. « W. B. F. », pp. 196-200.

che, eseguendo alcune integrazioni per parti dell'integrale (1), il sig. della Moglie ha ottenuto i primi quattro termini nel secondo membro dello stesso sviluppo (6) ordinato per le potenze decrescenti di λ .

Passiamo ora a considerare lo sviluppo di $\varphi(2\lambda)$ ordinato per le potenze crescenti di λ e di $\ln \lambda$. Gli sviluppi corrispettivi dei prodotti $J_\mu(\lambda) J_\nu(\lambda)$ e $J_\mu(\lambda) Y_\nu(\lambda)$ sono stati ottenuti dallo Schönholzer e dal Nicholson⁽¹⁾.

Ciò posto i loro sviluppi forniscono come caso particolare $\left(\mu = \pm \frac{1}{2} \text{ e } \nu = 1\right)$ lo sviluppo cercato di $\varphi(2\lambda)$, cioè

$$(7) \quad \varphi(2\lambda) = \frac{\pi}{16} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (4m+2)!}{(2m)!(2m+1)!(2m+2)!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m} \\ + \frac{1}{8} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (4m+4)!}{(2m+1)!(2m+2)!(2m+3)!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m+1} \\ \times \left(\ln \frac{\lambda}{2} + 2\psi(4m+4) - 2\psi(2m+2) - \psi(2m+4) \right),$$

dove $\psi(x)$ indica la derivata logaritmica $\Gamma'(x)/\Gamma(x)$ della funzione Γ . Ricordiamo che $-\psi(1) = 0.57721\ 56649 \dots$ è la costante di Eulero-Mascheroni.

Da ciò si ottiene il risultato che, com'è noto⁽²⁾, è

$$\varphi(+0) = \frac{\pi}{16}.$$

Termineremo dimostrando che la funzione $\varphi(2\lambda)$ è monotonamente decrescente. Infatti con un cambiamento di variabile ($y, \operatorname{tg} 2\theta$) nell'equazione (3) si ottiene

$$\varphi(2\lambda) = R \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-2\lambda \operatorname{tg} 2\theta} \left(\cos 2\theta - 2e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\sin 2\theta} \right) \frac{d\theta}{\cos^3 2\theta} \right) \\ = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-2\lambda \operatorname{tg} 2\theta} \left(\cos 2\theta - 2 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\sin 2\theta} \right) \frac{d\theta}{\cos^3 2\theta},$$

e quindi

$$\frac{d\varphi(2\lambda)}{d\lambda} = -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-2\lambda \operatorname{tg} 2\theta} \left(\cos 2\theta - 2 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\sin 2\theta} \right) \frac{\sin 2\theta \, d\theta}{\cos^4 2\theta}.$$

(1) Cfr. « W. B. F. », pp. 145-150.

(2) Vedi G. DELLA MOGLIE, loc. cit., p. 953.

Si ha allora con facili trasformazioni

$$\cos^2 2\theta - 4 \cos^2 \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \sin 2\theta = (1 - \sin 2\theta)^2 \geq 0,$$

e perciò

$$\cos 2\theta \geq 2 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\sin 2\theta}$$

sotto le condizioni $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

Confrontando le due formole, si ricava

$$\frac{d\varphi(2\lambda)}{d\lambda} \leq 0.$$

La proprietà in questione è così dimostrata. Più generalmente avremo

$$(-1)^n \frac{d^n \varphi(2\lambda)}{d\lambda^n} \geq 0,$$

qualunque sia il valore dell'intero positivo n .

Mi propongo, in una prossima Nota, di comunicare una tabella della funzione $\varphi(\lambda)$ in un campo esteso dei valori di λ .

Meccanica (Aerodinamica). — *Sul moto non stazionario di un'ala di allungamento finito*. Nota ⁽¹⁾ di P. CICALA, presentata dal Corrisp. M. PANETTI.

1. Le semplificazioni che l'ordinaria teoria dell'ala di allungamento finito (teoria del filo vorticoso di Prandtl) introduce nel calcolo della velocità indotta dal sistema di vortici aderenti e marginali, hanno permesso di ridurre da tridimensionale a monodimensionale il problema e di ricondurlo alla nota equazione integrodifferenziale. I risultati della teoria si sono dimostrati soddisfacenti in tutte le applicazioni, ciò che rivela la scelta felice delle semplificazioni ammesse. Mostreremo che se analoghe posizioni vengono introdotte nell'analisi del moto a regime non permanente, il problema si riconduce ad una equazione integrodifferenziale di forma analoga a quella che si ha per il moto stazionario.

2. Nella teoria dell'ala di allungamento finito in moto permanente, il sistema vorticoso induttore si considera contenuto in un piano xz (fig. 1 a) nel quale giace la direzione della velocità V della corrente che investe l'ala. Sia f un filo vorticoso generico ⁽²⁾, c il contorno in pianta dell'ala. Si ammette che la velocità indotta da f in un punto P sia quella che si avrebbe:

- se il tratto normale a V si estendesse indefinitamente dalle due parti;
- se i tratti paralleli a V fossero interrotti all'altezza di P .

Ciò equivale in sostanza ad aggiungere all'elemento induttore reale i due vortici trasversali a staffa g , segnati con linea a tratto in figura, aventi un lato allineato col vortice aderente e uno sulla parallela ad esso passante per P . Se il punto P è esterno al tronco di ala che contiene il vortice f (fig. 1 b), i vortici trasversali che vanno aggiunti per passare dal sistema effettivo allo schema della teoria, sono disposti ambedue dalla stessa parte. Le posizioni che si possono considerare come base della teoria del filo vorticoso e che estenderemo al moto non permanente, consistono dunque nel supporre il sistema vorticoso contenuto in un piano e nel considerare trascurabili le velocità indotte dai vortici a staffa trasversali sopra definiti, sui punti esterni alla striscia che essi delimitano.

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1937.

(2) Le frecce danno il verso della velocità indotta sulla faccia superiore: i fili vorticosi che non si chiudono in figura si intendono indefinitamente estesi.

3. Il problema piano del moto non stazionario di un profilo alare, secondo il procedimento di Birnbaum, si può studiare supponendo distribuito con densità γ sulla corda un velo vorticoso aderente, soggetto alle azioni aerodinamiche, dal quale si libera, secondo la legge della persistenza dei vortici un secondo strato, distribuito con densità ε , che si prosegue nella scia dietro l'ala. Con ovvie estensioni, la medesima concezione si può applicare per l'ala di apertura finita.

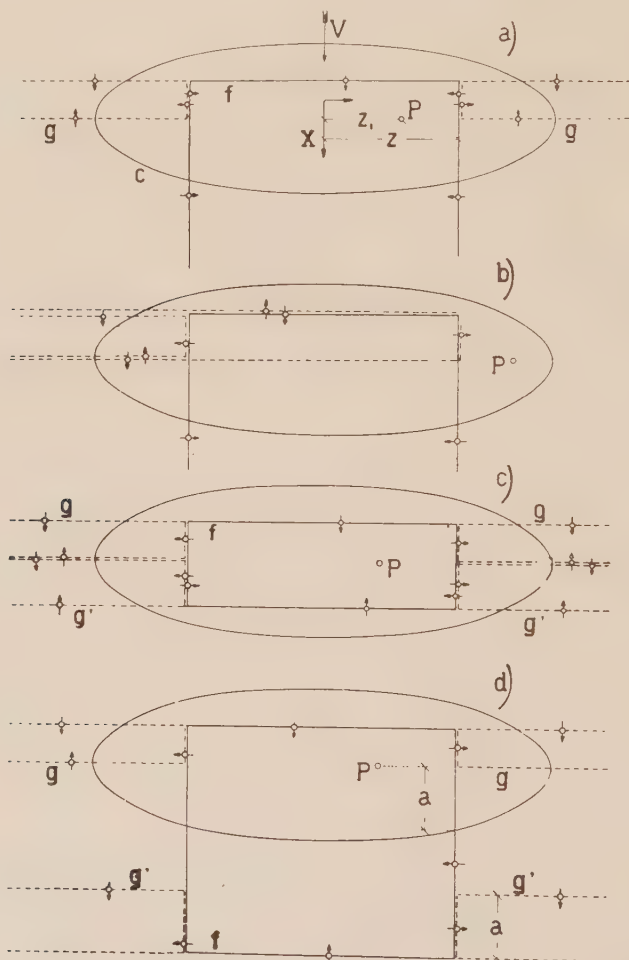


Fig. 1.

Considerando il caso di moto armonico del sistema, conviene adottare la notazione complessa e scrivere:

$$y = Y e^{i\Omega t}$$

$$\gamma = \Gamma e^{i\Omega t}$$

$$w = W e^{i\Omega t}$$

$$\varepsilon = E e^{i\Omega t}$$

essendo Ω la pulsazione del moto, y lo spostamento verticale di un punto dell'ala, w la velocità verticale della corrente, definita dalla relazione

$$w = V \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Le quantità Y, W, Γ, E sono funzioni complesse di x e z .

Per l'ala di allungamento infinito è noto ⁽¹⁾ che se la distribuzione della circuitazione aderente è rappresentata da una delle funzioni

$$\Gamma_1 = 2 \sin \vartheta - \cotang \frac{\vartheta}{2} - i\omega \sin \vartheta \cos \vartheta - i\omega \sin \vartheta$$

$$\Gamma_n = 2 \sin n\vartheta - \frac{i\omega}{n+1} \sin(n+1)\vartheta + \frac{i\omega}{n-1} \sin(n-1)\vartheta$$

($n = 2, 3, \dots$)

le velocità verticali indotte da tali vorticità aderenti e dai corrispondenti vortici liberi sono date rispettivamente da

$$(I) \quad \begin{cases} W_1 = 1/2 + \cos \vartheta \\ W_n = \cos n\vartheta \end{cases}$$

essendo $\bar{x} = -l \cos \vartheta$ la distanza di un punto del profilo dal punto di mezzo, l la semicorda e ω il parametro adimensionale $\Omega l/V$. Indichiamo con $Ke^{i\Omega t}$ la circuitazione totale connessa col profilo, ossia

$$K = \int_{-l}^{+l} (\Gamma + E) dx.$$

Le Γ_n sopra indicate godono tutte della proprietà che le K ad esse corrispondenti sono sempre nulle.

4. Se nel moto dell'ala di apertura finita si realizza la condizione che il valore di K resti per ogni sezione costante nel tempo (e quindi nullo poichè si considerano solo gli scarti delle varie grandezze dai valori medi), dietro l'ala non esistono vortici. Il sistema induttore sarà costituito da filetti chiusi entro la pianta dell'ala (fig. 1 c). Poichè possiamo aggiungere ad ognuno di questi i vortici trasversali tratteggiati in figura, ogni sezione si può considerare come in moto piano. Risulta quindi che se le velocità verticali nelle diverse sezioni dell'ala si possono esprimere mediante uno sviluppo nella serie delle funzioni (i), la distribuzione della vorticità aderente si può calcolare sezione per sezione colle relazioni stesse del moto piano.

(1) P. CICALA, *Le azioni aerodinamiche sul profilo oscillante*. «L'Aerotecnica», 1936.

Nel caso di ala indeformabile, se la w nell'estremo anteriore del quarto posteriore di ogni sezione resta identicamente nulla, le azioni si possono calcolare col metodo della striscia, applicando ad ogni sezione i risultati dell'ala indefinita.

5. Il sistema (1) delle W_n non è completo. Una funzione W sviluppabile in serie di Fourier del parametro ϑ , si può esprimere mediante la serie delle W_n se vale la relazione

$$\int_{-l}^l W \operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2} dx = 0.$$

Come per l'ala di allungamento infinito, consideriamo quindi la distribuzione di vorticità aderente

$$\gamma_0 = \Gamma_0 e^{i\Omega t} = A(\chi) e^{i\Omega t} \left(\frac{2H_1^{(2)}}{H_1^{(2)} + iH_0^{(2)}} \cotang \frac{\vartheta}{2} + 2i\omega \operatorname{sen} \vartheta \right)$$

essendo H le funzioni di Hankel del parametro ω .

Con facili passaggi si trova

$$K = \int_{-l}^l (\Gamma_0 + E_0) dx = \pi AL$$

essendo $L = 4e^{-i\omega} l / \pi\omega (H_0^{(2)} - iH_1^{(2)})$.

Per $\omega \rightarrow 0$, L tende al valore della corda del profilo.

La densità di distribuzione dei vortici liberi nella scia, in direzione normale a V , ad una distanza x_1 dal punto di distacco vale

$$\varepsilon_s = -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial l} K e^{i\Omega(t-x_1/V)} = -\omega' e^{-\omega' x_1} K e^{i\Omega t}$$

essendo $\omega' = i\Omega/V$.

Un filetto induttore f generico ha in questo caso la configurazione indicata in fig. 1 d. A tale elemento aggiungiamo i vortici trasversali indicati con linea a tratti. I vortici aggiunti g' si trovano a contatto col filetto g finchè il lato inferiore resta interno all'ala: successivamente essi si spostano, trascinati dalla corrente, conservando la larghezza corrispondente all'istante del distacco. Si giunge così al sistema vorticoso equivalente indicato in fig. 2. Generalizzando la riduzione indicata, nel calcolo della velocità in P si dovranno considerare:

a) i vortici aderenti e liberi corrispondenti alla sezione per P , considerati come indefiniti;

b) i vortici marginali che dai punti della normale a V per P si staccano con densità di distribuzione $-e^{i\Omega t} dK/d\zeta$;

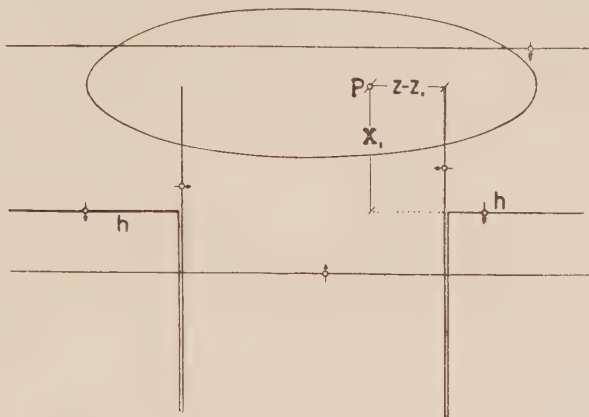


Fig. 2.

c) i vortici angolari, analoghi a h . Nella scia dietro l'ala i vertici di tali elementi sono distribuiti con densità

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \zeta} = -\omega' e^{-\omega' x_1} \frac{dK}{d\zeta} e^{i\Omega t}.$$

Dal caso di moto piano è noto che il sistema a) induce una velocità verticale costante lungo la corda, data da ⁽¹⁾

$$-A = -K/\pi L.$$

Il sistema b) dà le velocità

$$\int_a \frac{dK}{d\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_1}$$

l'integrale essendo esteso all'apertura alare.

La velocità indotta da un vortice angolare di circuitazione unitaria, vale

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_1} + \frac{1}{x_1} - \sqrt{\frac{1}{(\zeta - \zeta_1)^2} + \frac{1}{x_1^2}} \right)$$

se con x_1 e $\zeta - \zeta_1$ si indicano le coordinate del vertice di h rispetto a P. Introduciamo la funzione

$$(2) \quad F = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_1} + \frac{1}{x_1} - \sqrt{\frac{1}{(\zeta - \zeta_1)^2} + \frac{1}{x_1^2}} \right) e^{-\omega' x_1} dx_1.$$

(1) Tralasciamo il fattore comune $e^{i\Omega t}$.

La F , funzione del parametro adimensionale $\Omega(\chi - \chi_1)/V$ va calcolata per valori positivi dell'argomento, secondo la (2). Per argomenti negativi vanno assunti valori uguali ed opposti. Con tale posizione la velocità indotta dal sistema c) risulta data da

$$-\frac{\omega'}{4\pi} \int_a F \frac{dK}{d\chi} d\chi.$$

Per una data distribuzione $W_0(\chi_1)$ delle velocità lungo l'apertura, si ottiene quindi l'equazione integrodifferenziale che definisce la funzione K :

$$(3) \quad -\pi W_0 = K/L - \frac{1}{4} \int_a \left(\frac{1}{\chi - \chi_1} - \omega' F \right) \frac{dK}{d\chi} d\chi.$$

Per la risoluzione approssimata di questa equazione si possono adottare i metodi suggeriti per il moto stazionario: il sistema di equazioni da risolvere ha in questo caso i coefficienti complessi.

6. Quando sia assegnata la legge che definisce il moto armonico di un'ala di apertura finita, le considerazioni precedenti permettono di dedurre la distribuzione della vorticità aderente e quindi le azioni aerodinamiche. Dalla W , funzione nota di x e χ , si calcola la W_0 secondo la relazione

$$W_0(\chi) = \int_{-l}^l W(x, \chi) \tan \frac{\theta}{2} d\chi$$

e per mezzo della (3) si determina la funzione $K(\chi)$. Si calcola quindi la nuova distribuzione di velocità verticali

$$\bar{W} = W - \frac{1}{4\pi} \int_a \left(\frac{1}{\chi - \chi_1} - \omega' F \right) \frac{dK}{d\chi} d\chi.$$

Con tali \bar{W} , il moto si può studiare sezione per sezione, applicando i risultati validi per l'ala di allungamento infinito. Se non si tratta di moto armonico, si giunge alla soluzione mediante l'analisi armonica del moto o, se questo non è periodico, mediante l'integrale di Fourier.

Seguendo il procedimento indicato si trascura parte delle velocità verticali indotte dal sistema vorticoso; una volta risolto il problema in prima approssimazione come sopra è detto, si possono determinare le velocità trascurate e operare su queste come si è fatto per le W . Si può quindi ricercare la soluzione esatta attraverso un procedimento di iterazione. Il fatto che la prima approssimazione si sia in generale dimostrata soddisfacente per il moto permanente, fa presumere la convergenza del metodo per gli ordinari allungamenti.

Mineralogia. — *Analisi chimica del granito di Montorfano e del granito e della tormalina di Alzo*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di P. GALLITELLI, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

In una serie di lavori abbastanza recenti sul Canavese e sul granito del Lago Maggiore, il Novarese, dopo aver confermato ancora una volta l'unità dell'intrusione granitica che si estende da Biella al Verbano⁽³⁾, ha messo in evidenza la grande somiglianza d'aspetto dei graniti di Baveno, Montorfano ed Alzo, ed ha supposto l'esistenza di una « consanguineità petrografica » fra queste tre rocce⁽⁴⁾.

Per parte mia, nel corso di un recente studio litologico sul granito di Baveno⁽⁵⁾ ho avuto occasione di estendere le indagini anche ai graniti bianchi di Montorfano e di Alzo, e di constatare la somiglianza macroscopica fra le rocce di questi tre affioramenti. E appunto per vedere se alla somiglianza si accompagnava una identità di composizione, già da qualche tempo ho eseguito su di esse l'analisi chimica. Pur non volendo discutere la consanguineità petrografica supposta dal Novarese — perchè desidero attendere la fine delle ricerche in corso onde avere i dati per un confronto più completo e persuasivo — rendo note intanto le mie analisi, non essendo ancora conosciuta la composizione della roccia di Alzo, mentre è nota quella del granito di Montorfano dalle analisi eseguite nel 1866 e 1887 rispettivamente dallo Scheerer e dal Gerhard.

I campioni di granito bianco sottoposti all'analisi sono stati raccolti personalmente sul terreno, e rappresentano il tipo medio della roccia che viene anche estratta dalle cave e utilizzata come materiale ornamentale nelle costruzioni. I risultati ottenuti sono riportati nella seguente tabella ove ho trascritto per confronto anche le analisi dei graniti roseo e bianco di Baveno.

Queste analisi permettono di fare alcune considerazioni. Anzitutto i graniti di Montorfano e di Alzo derivano da un magma relativamente povero di magnesio, e presentano composizione chimica fra loro assai vicina,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1937.

(3) V. NOVARESE, *L'età del granito del Lago Maggiore*. « Boll. R. Ufficio Geologico d'Italia », vol. LVIII, fasc. 11-12, Roma, 1933.

(4) V. NOVARESE, *La zona del Canavese e le formazioni adiacenti*. « Memorie descrittive della carta geologica d'Italia », vol. XXII, p. 98, Roma, 1929.

(5) P. GALLITELLI, *Ricerche petrografiche sul granito di Baveno*. « Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. Memorie », vol. XLVI, Pisa, 1937.

	Granito bianco di			Granito roseo di Baveno (2)
	Montorfano	Alzo	Baveno (1)	
Si O ₂	69,52	70,62	74,02	74,32
Ti O ₂	0,42	0,24	—	0,05
Al ₂ O ₃	15,45	15,66	14,84	13,43
Fe ₂ O ₃	1,29	1,85	1,41	1,37
Fe O	1,52	1,10	0,69	0,71
Mn O	0,03	0,02	0,01	tr.
Ca O	1,80	1,72	0,64	0,72
Mg O	0,19	0,26	0,06	0,14
Na ₂ O	4,54	4,25	3,49	4,26
K ₂ O	4,31	4,76	4,55	4,55
H ₂ O —	0,04	—	0,02	0,08
H ₂ O +	0,67	0,13	0,52	0,48
P ₂ O ₅	0,28	tr. min.	tr.	0,12
F	tr. min.	tr. min.	tr. min.	0,05
	100,06	100,61	100,25	100,28

Formule di Nigghi.

	si	al	fm	c	alc	k	mg	c/fm
Granito bianco di Montorfano	335	44,0	12,3	9,2	34,5	0,38	0,11	0,75
Granito bianco di Alzo . .	338	44,0	13,0	8,8	34,2	0,42	0,14	0,68
Granito bianco di Baveno .	418	49,0	11,6	3,9	35,5	0,46	0,04	0,33
Granito roseo di Baveno . .	423	45,1	10,4	4,4	40,1	0,41	0,11	0,42

quando si considerino le percentuali di Al₂O₃, Fe₂O₃, FeO, CaO, MgO, Na₂O, K₂O. La roccia di Alzo è però lievemente più acida di quella di Montorfano.

Rispetto al granito di Baveno le due rocce in parola presentano un contenuto minore di silice, dato che in esse SiO₂ raggiunge il 69,5 % e

(1) P. GALLITELLI, loc. cit., p. 18.

(2) P. GALLITELLI, loc. cit., p. 21.

70,6 %, mentre in quella di Baveno supera il 74 %. Nonostante questa diversa acidità, è però evidente fra esse una somiglianza di composizione che può realmente giustificare l'esistenza di una certa « aria di famiglia ».

A questo proposito desidero fare notare che una differenza sensibile fra queste tre rocce è data dalla relativa scarsezza, a Montorfano ed Alzo, di geodi con belle cristallizzazioni e di porzioni di roccia a struttura grossolana, così frequenti, come è noto, nel granito roseo di Baveno. Nel quale sono invece scarissime pirite, pirrotina e arsenopirite, osservate dallo Struever e dal Tacconi ad Alzo ⁽¹⁾ e Montorfano ⁽²⁾ ove anche oggi sono ritrovabili senza grandi difficoltà.

Un minerale segnalato a Baveno e a Montorfano e che, finora, sembrava mancare ad Alzo — benchè lo Struever lo avesse notato nei graniti che affiorano presso Isolella nella bassa Valsesia ⁽³⁾ — è la tormalina. In una recente gita ho potuto raccoglierne alcuni campioni, cosicchè oggi essa può venire annoverata fra le specie presenti in questa località.

La tormalina non è rara nei blocchi granitici della cava Simonetti in concentrazioni che raggiungono anche 4-5 cm. di diametro, racchiuse entro porzioni di roccia a struttura grossolana. Talvolta è in fasci di cristalli a struttura raggiata, talaltra in masserelle compatte prive di contorno geometrico definito. Il colore è nero verdastro nei cristalli maggiori, mentre in quelli più piccoli esilissimi è debolmente roseo.

I cristalli meglio conservati, sempre rotti alle estremità, raggiungono anche 7-8 millimetri di lunghezza e risultano limitati dal prisma di secondo ordine $\{\bar{1}01\}$ e dal prisma trigonale $\{2\bar{1}\bar{1}\}$, ambedue con facce brillanti, profondamente striate che non consentono ottime misure angolari.

Al microscopio gli individui più piccoli appaiono zonati nel senso della lunghezza, cosicchè mentre una parte di essi presenta il pleocroismo caratteristico

ϵ = rosa marroncino

ω = azzurro verdastro intenso

l'altra dà invece

ϵ = giallo olio con una punta nel verdiccio

ω = azzurro verdastro intenso.

L'indice ω di rifrazione della tormalina pleocroica dal rosa all'azzurro verdastro, determinato su schegge basali, dalle quali emerge centrato l'asse ottico, è risultato, per la luce del sodio, compreso fra 1,668 e 1,671.

(1) G. STRUEVER, *Sui minerali del granito di Alzo*. «Rend. R. Acc. Lincei», vol. I, 2° sem., p. 361, Roma, 1892.

(2) E. TACCONI, *Sopra alcuni minerali del granito di Montorfano*. «Rend. R. Acc. Lincei», vol. XII, 1° sem., p. 355, Roma, 1903.

(3) G. STRUEVER, *Contribuzioni allo studio dei graniti della bassa Valsesia*. «Memorie R. Acc. Lincei», ser. IV, vol. VI, p. 426, Roma, 1889.

Il peso specifico, utilizzando il metodo della sospensione in liquidi pesanti, oscilla fra 3,21 e 3,23, e corrisponde a quello di una tormalina ferrifera.

Per controllare queste determinazioni ho raccolto una sufficiente quantità di materiale puro per eseguire l'analisi chimica. La quale mi ha dato i seguenti risultati⁽¹⁾:

SiO ₂	34,88
TiO ₂	ass.
B ₂ O ₃	8,82
Al ₂ O ₃	35,00
FeO	16,06
MnO	0,11
CaO	0,28
MgO	1,01
Na ₂ O	2,44
K ₂ O	0,09
Li ₂ O	ass.
H ₂ O +	1,50
F	0,49
	<hr/>
	100,68
— O = F ₂	0,24
	<hr/>
	100,44

La tormalina del granito di Alzo risulta perciò abbastanza prossima per composizione ad una schorlite, ed è notevole, sia per il contenuto in fluoro e manganese, sia per la relativa scarsezza in B₂O₃. Nelle tormaline scure presenti nelle pegmatiti la percentuale di B₂O₃ si aggira di solito intorno al 9-11 %, come risulta dalle numerose analisi riportate dal Doeiter nel «Handbuch der Mineralchemie» e come recentemente è apparso da una analisi della tormalina delle pegmatiti di Olgiasca nella quale si è trovato il 10,90 % di B₂O₃⁽²⁾.

Confrontando la nostra tormalina con quella presente nel granito di Montorfano, risulta che questa è un poco meno ferrifera, se si giudica dal valore dell'indice di rifrazione ω , determinato dal Tacconi per la luce gialla del sodio, nel valore di 1,658, mentre nella nostra è risultato di 1,670 circa.

(1) In questa analisi il ferro è stato determinato tutto allo stato ferroso. Per gli alcali, essendo questa tormalina molto difficilmente attaccabile dall'acido solforico e fluoridrico anche dopo ripetuti trattamenti, ho eseguito una fusione con fluoruro ammonico. L'acqua è stata dosata col metodo di Penfield.

(2) Valore ricavato da una analisi eseguita nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Milano, e che il prof. E. Grill ha voluto mettere gentilmente a mia disposizione.

Biologia. — *Notizie su una malattia della vite poco conosciuta*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di G. GOIDÀNICH, presentata dal Corrisp. L. PETRI.

Il prof. N. Cuscianna, direttore del R. Osservatorio fitopatologico di Trieste, ha riscontrato nella corrente annata la mortalità di alcune giovani piante di vite che crescevano a S. Croce presso Trieste. Si trattava di soggetti di una varietà di uva bianca, non meglio identificata, innestati da un anno su *Kober 5 BB*, i caratteri patologici più notevoli che si osservano sulle piante ammalate sono - oltre ad un graduale e notevole deperimento di tutta la parte aerea - la necrosi parziale o totale dei tessuti del fusto e la formazione di fenditure, specie di cancri allungati e non molto larghi, localizzate specialmente negli internodi inferiori. Non si conosce invece se esistano alterazioni caratteristiche nelle foglie, nei grappoli o nelle gettate dell'anno.

All'esame microscopico i tessuti necrotizzati appaiono tutti invasi da un micelio settato, ialino le cui ife sono in modo particolare visibili nel lume degli elementi vascolari. La struttura anatomica del legno e del libro non è alterata; si nota unicamente l'imbrunimento delle pareti cellulari, la presenza di qualche tillo nelle trachee e la formazione di una sostanza rosso-bruna gommosa che occlude alcune cellule del parenchima, più di rado i vasi.

Le semine dei tessuti ammalati su substrati artificiali portano ad una facile determinazione della malattia; si tratta dell'infezione di un fungo il cui micelio si sviluppa rigogliosamente sull'agar e forma delle colonie biancastre che divengono col tempo di un colore giallo-ferruginoso, fino a bruno, almeno nella parte centrale; e che, nel corso di 10-15 giorni, differenziano un numero variabile di corpicciuoli rotondeggianti, mamellonati e scuri sparsi irregolarmente alla superficie della colonia. Questi corpicciuoli emettono col tempo una o più gocce di liquido mucoso giallo (v. fig. 1). Tutti gli isolamenti fatti dal materiale inviato in esame hanno dato lo sviluppo di colonie miceliche con tali caratteristiche.

Lo studio microscopico del fungo isolato rivela che esso appartiene agli sferossidali, essendo i corpicciuoli scuri, di cui ho fatto parola, delle fruttificazioni picnidiche. Essi risultano infatti costituiti di un tessuto stromatico nel cui interno sono ricavate una o più concamerazioni di forma irregolare

(1) Lavoro eseguito nella R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1937.

tutte tappezzate di conidiofori coi relativi conidi; le concamerazioni comunicano all'esterno mediante un ostiolo situato nella parte superiore del picnidio attraverso il quale fuoriescono i conidi assieme a una sostanza mucillaginosa giallastra (v. fig. 2). I conidiofori sono semplici o ramificati, provvisti o no di un setto nella parte mediana, ialini e appuntiti verso l'apice ove si formano le spore; nascono dalle cellule interne della parete del picnidio ricche di contenuto protoplasmatico che si distinguono da quelle degli strati più profondi quasi completamente svuotate. I conidiofori e le cellule che danno loro origine costituiscono uno strato chiaro ben distinto che riveste tutta la camera picnidifera (v. fig. 3).

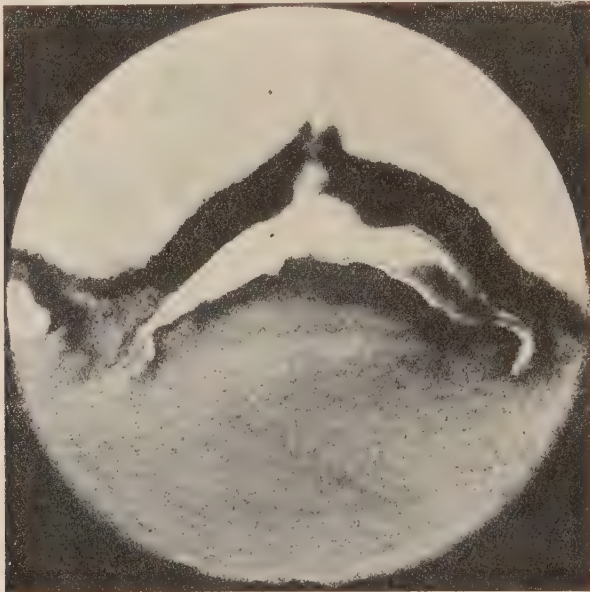


Fig. 1. — Colonia di *Phomopsis* — formatasi attorno ad un pezzo di legno di vite animalato messo in cultura — che ha differenziato le fruttificazioni picnidiche.

Nelle picnospore si ha la caratteristica più notevole di questo fungo della vite. Esse sono di due specie: le une ovali, appuntite alla base, misuranti per lo più $6-10.1 \mu$ in lunghezza e $2.4-3 \mu$ in larghezza; le altre invece hanno forma molto allungata, assottigliantesi in modo particolare alle due estremità, sono ialine e di norma curvate nella parte distale a modo di semicerchio o di uncino. Spesse volte presentano anche curvature verso la base od il centro in modo di assumere un aspetto flessuoso. Le dimensioni di questo tipo di spore si aggira intorno a $18-23 \times 1-1.5 \mu$; esse vanno considerate perciò come scolecospore (v. fig. 3).

Per le caratteristiche morfologiche sopra enunciate il fungo rientra nel genere di sferossidali *Phomopsis*, l'unico per il quale sia nota l'esistenza di

due tipi di spore così distinti nella medesima fruttificazione. A questo genere appartengono numerose specie, già comprese in altri gruppi sistematici, fra cui anche alcune a carattere parassitario; ad esempio la *Phomopsis abietina* (Hart.) Wils. et Hahn sull'abete, la *Ph. citri* Faw. sugli agrumi, la *Ph. cinerascens* (Sacc.) Trav. sul fico, la *Ph. mali* Rob. sul pero e sul melo, la *Ph. pseudotsugae* Wils. su diverse conifere, ma specialmente su *Pseudotsuga Douglasii*.

Una specie di *Phomopsis* è nota anche per la vite, la *Ph. cordifolia* (Brunn.) Died. (*Phoma cordifolia* Brun.) per la quale in Diedicke⁽¹⁾ si trova l'annotazione che lo Jaap l'ha riscontrata capace di produrre la morte delle piante su cui vive. Per quanto si può dedurre dalle descrizioni contenute nella diagnosi, la *Ph. cordifolia* appare assai prossima a quella del mio isolamento, quantunque non sia detto se essa è dotata o meno delle scolescospore.

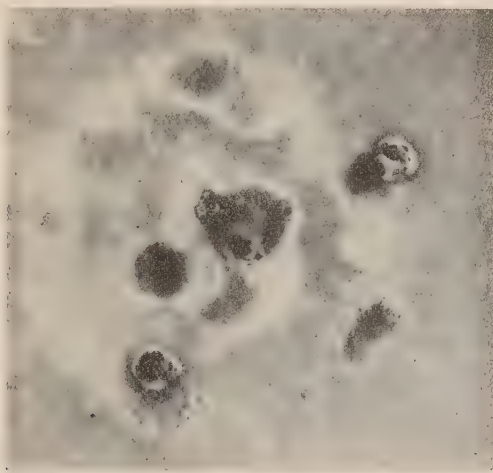


Fig. 2. - Sezione di un picnidio della *Phomopsis* sviluppatosi in cultura.

Ma è con un altro sterossidale, a cui è attribuita una notevole importanza fitopatologica, che il fungo delle viti di Trieste ha ben più stretta rassomiglianza. Voglio alludere al parassita che va sotto il nome di *Fusicoccum viticolum*, descritto per la prima volta dal Reddick⁽²⁾ nel 1909. Esso è provvisto di picnidi pluriloculari, con spore ovoidali e filiformi e le cui dimensioni sono $6.3-11.2 \times 1.7-2.8 \mu$ per le spore ovali e di $18-30 \times 1-1.5 \mu$ per le altre. Dei caratteri morfologici del *Fusicoccum viticolum* esistono pre-

(1) H. DIEDICKE, *Kryptogamenflora der Mark Brandenburg, Pilze VII*, «Sphaeropsidaceae, Melanconiaceae», V, 9, Leipzig, 1915.

(2) D. REDDICK, *Necrosis of the grape vine*, «Cornell Univ. Agr. Exp. Sta.», Bul. 263, 1909, pp. 323-343.

cise illustrazioni del Reddick stesso ⁽¹⁾, di Gregory ⁽²⁾ e di Shear ⁽³⁾. Quest'ultimo autore ha individuato la forma perfetta ascofora, appartenente al genere di sferiacei *Cryptosporella* (*Cr. viticola*).

A proposito di questo *Fusicoccum* si deve notare che il Reddick ha interpretato, erroneamente, le scolecospore come parafisi; da qui il riferimento generico, accettato anche dagli altri fitopatologi, che io non ritengo esatto. Una volta dimostrata la vera natura di tali formazioni filiformi, risulta come logica conseguenza la inappartenenza del fungo a *Fusicoccum*, genere in cui mancano le scolecospore e comunque una sporificazione duplice di qualsiasi tipo; in alcuni *Fusicoccum* esistono solo vere e proprie parafisi che nascono frammiste agli sporofori, e che rimangono sempre integre senza cioè scindersi in elementi conidiformi. Per tali ragioni io ritengo più aderente alle nostre cognizioni attuali nella sistematica degli sferossidali indicare il parassita scoperto dal Reddick come *Phomopsis viticola* (Redd.) G. Goid. n. comb. ⁽⁴⁾.

La *Phomopsis viticola* produce in America una malattia ben conosciuta a cui si danno vari nomi — « dead-arm » « side-arm » « necrosis » — diffusa in quasi tutti gli Stati Uniti e sulle più importanti varietà di viti coltivate; le piante colpite possono morire improvvisamente oppure per gradi a seconda che l'infezione invade subito tutto il tronco o si limita ad uccidere di anno in anno qualche ramo. I sintomi più caratteristici del « dead-arm » sono, oltre al disseccamento dei rami o della pianta intera: l'ingiallimento, l'arricciamento e lo scarso sviluppo del fogliame, la formazione di escrescenze longitudinali lungo il fusto e la comparsa di piccole lesioni di color rosso-bruno o nero sui tralci ancor verdi, sui piccioli, sui peduncoli e sulle nervature delle foglie. Spesso queste ultime lesioni si trasformano in veri cancri ed allora sui germogli compaiono delle fessure abbastanza profonde; le ferite sono evidenti specialmente nella primavera seguente a quella in cui è avvenuta l'infezione.

Gregory ha trovato nel 1911 (loc. cit.) che la *Ph. viticola* può attaccare gli acini inducendovi un marciume simile a quello da *Guignardia*.

La *Phomopsis viticola* è probabile che esista, oltre che in America, anche in Giappone. Hiura infatti ha segnalato la comparsa a Sapporo nel 1911 di

(1) D. REDDICK, *Dead-arm disease of grapes*. « New York Agr. Exp. Sta. », Bul. 389, 1914, pp. 463-490.

(2) C. T. GREGORY, *A rot of grapes caused by « Cryptosporella viticola »*. « Phytopath. », 3, 1915, pp. 20-23.

(3) C. L. SHEAR, *The ascogenous form of the fungus causing dead-arm of the grape*. « Phytopath. », 1, 1911, pp. 116-119.

(4) Eseguo questo passaggio di genere pur sapendo che la forma perfetta del fungo è stata individuata in una *Cryptosporella*, mentre di norma le *Phomopsis* sono in relazione metagenetica con gli sferiacei del genere *Diaporthe*. Può essere che allorchè gli studi di micologia saranno più avanzati risulti non valido anche il mio riferimento generico; ma allora il fungo della vite apparterrà ad un gruppo di sferossidali, forse di nuova creazione, di posizione sistematica assai più vicina a *Phomopsis* che a *Fusicoccum*.

una malattia (che egli chiama « root-neck blight ») attribuibile al parassitismo di una *Phomopsis*, molto simile a *Ph. viticola*; in tal caso le piante



Fig. 3. - Particolare di un picnidio in cui si vedono i conidiofori e i due tipi di conidi: ovali e filiformi.

morivano per un attacco del fungo nella parte inferiore del fusto ove poi comparivano le fruttificazioni picnidiche ⁽¹⁾.

Attualmente è impossibile dire se la *Phomopsis* italiana abbia un comportamento analogo a quella americana e se cioè nelle piante di Trieste si manifestino i sintomi patologici caratteristici del « dead-arm ». E neppure si può giudicare con sicurezza dell'identità dei due funghi, poichè non ho potuto avere a disposizione culture del ceppo isolato in America, con cui fare un raffronto diretto. Con questa Nota ho voluto soltanto segnalare l'esistenza in Italia di un fungo che finora non si conosceva come parassita della vite nel nostro Paese. Il richiamo fatto all'agente della malattia nota come « dead-arm », « side-arm » o « necrosis » ed anche al « root-neck blight » servirà come una conferma che organismi molto simili, fino a che non si possa dire identici, sono già stati riscontrati dannosi a questa preziosa pianta e che quindi meritano di essere presi in considerazione dal fitopatologo allorchè si manifesti un loro attacco di qualsiasi, anche lieve, intensità.

Biologia. — *La preipofisi di Rana non provoca l'estro nella femmina impubere di topo.* ⁽²⁾ Nota ⁽³⁾ di M. BENAZZI, presentata dal Socio E. GIACOMINI.

In un lavoro precedente ⁽⁴⁾ ho riferito i risultati negativi da me ottenuti trattando topoline impuberi di 20-23 giorni con preipofisi di Uccelli (*Columba livia*) e di Anfibi (Axolotl): l'impianto di un numero anche notevole di ghiandole (fino ad 11) non manifesta effetto gonadotropo, mentre l'ipofisi dei Mammiferi determina, come è ben noto, fenomeni di pubertà precoce.

I miei risultati negativi non sembrano tuttavia in accordo con quelli di vari altri ricercatori ⁽⁵⁾, i quali hanno invece dimostrato che anche nei Vertebrati inferiori lo sviluppo e l'attività delle gonadi sono sottoposti all'azione di ormoni preipofisari e che gli stessi estratti di preipofisi di Mammiferi possono agire (in molti casi almeno) sulle gonadi di Sauropsidi e di Ittiopsidi. Nel precedente lavoro io ho creduto di poter affacciare, per

(1) M. HIURA, *On the root-neck blight of the vines near Sapporo*, « Journ. Agric. Forest. Soc. Sapporo », 16, 1924, pp. 67-78. (Riassunto in « Review of Applied Mycology », 4, 1925, p. 650).

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Biologia e Zoologia generale della R. Università di Siena.

(3) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1937.

(4) M. BENAZZI, *Contributo alla fisiologia comparata della preipofisi*. « Arch. Sc. Biol. », vol. 23, 1937.

(5) Per le indicazioni bibliografiche rimando al mio precedente lavoro.

un tentativo di interpretazione dei miei reperti negativi, qualche ipotesi, invocando sia la specificità zoologica degli ormoni gonadotropi (che se appare insussistente in certi casi, non sembrerebbe tuttavia doversi escludere in alcuni altri), sia una alternanza di fasi di attività e di inattività della preipofisi nei riguardi del suo potere gonadotropo. Ed appunto in considerazione di quest'ultima ipotesi ho voluto compiere nuove indagini, usufruendo di ghiandole che potessero essere con certezza ritenute in piena attività. Ho scelto a tale scopo ipofisi di rane nel periodo degli amori, in quanto è ormai sicuramente dimostrato l'intervento di tale organo nei fenomeni della riproduzione. (Basterà ricordare l'ovulazione sperimentale indotta mediante estratti preipofisari).

Le ricerche sono state compiute nella decorsa primavera con ipofisi di *Rana esculenta*, usufruendo di animali in accoppiamento od all'inizio della emissione delle uova; ho saggiato inoltre ghiandole di animali non accoppiati, che avevano svernato in laboratorio. L'ipofisi veniva suddivisa in fettine od anche spappolata ed introdotta sottocute in topoline impuberi di età ben precisata. Faccio presente che insieme alla parte anteriore (lobo cromofilo) veniva impiantata anche la parte intermedia (lobo cromofobo), la quale sulle sezioni appare ben differenziata per i caratteri istologici.

Noto subito che tutte le esperienze hanno avuto esito negativo: esse confermano quindi i miei precedenti risultati; mi limito a riportare i protocolli di quelle più dimostrative.

1. 12 maggio; una topolina di 28 giorni riceve 8 ipofisi di rana (4 coppie in amplesso) ed il giorno seguente quelle di altre 8 (che avevano in parte iniziata l'emissione delle uova). La topolina è sacrificata il 17 ancora perfettamente impubere, senza il minimo accenno di apertura dell'ostio vaginale. L'esame macroscopico dell'apparato genitale non rivela alcuna differenza rispetto ad una sorella sacrificata per controllo; il peso del tratto genitale (utero-vagina) è di mg. 12 (1) nella prima, e di mg. 15 nella seconda. Microscopicamente si osserva in entrambe una vagina con caratteri di impubertà, l'epitelio presenta tuttavia una assisa superficiale mucosa, soprattutto sviluppata nella femmina di controllo.

2. 12 maggio; una topolina di 20 giorni riceve 8 ipofisi di rana (4 coppie) e dopo tre giorni altre nove ipofisi (appartenenti a 5 ♂ e 4 ♀, in parte accoppiate, in parte separate da poco). La topolina è sacrificata, insieme ad una sorella di controllo, il 19 maggio, senza aver manifestato alcun segno esteriore di estro. All'esame macroscopico l'apparato genitale dei due animali non mostra differenze; quello della topolina trattata pesa mg. 19, quello del controllo mg. 14. Istologicamente constatato assenza di caratteri estrali; nell'epitelio vaginale dell'animale trattato si nota uno strato superficiale di cellule cilindriche mucose, simile a quello dell'esemplare di controllo della esperienza precedente.

3. 30 aprile; una topolina di 23 giorni riceve 6 ipofisi di rane (2 ♂ e 4 ♀) che avevano svernato in laboratorio; il 2 maggio impianto altre 6 ghiandole (2 ♂ e 4 ♀) ed il 4 maggio altre 5 (4 ♂ ed 1 ♀); la reazione genitale è nulla e l'animale viene sacrificato il giorno 9. Come nelle precedenti esperienze, non trovo alcuna differenza rispetto alla sorella di controllo; il tratto genitale pesa mg. 6 nella topolina trattata e mg. 11,5 nel controllo; l'esame microscopico della vagina conferma i reperti macroscopici.

(1) Tutte le pesate sono state fatte su pezzi fissati in formalina 10%.

A titolo di confronto riferisco pure due esperienze compiute con ipofisi di Mammiferi (numerosi altri dati si trovano nel mio precedente lavoro); una dimostra che 3 sole ipofisi di topo adulto (*Mus musculus*) sono sufficienti a provocare l'estro nella topolina impubere, l'altra che i principi estrogeni sono contenuti anche nell'ipofisi di animali non ancora puberi.

4. 26 maggio; ad una topolina di 27 giorni impianto tre ipofisi di topo; il 29 mattina è in proestro e viene sacrificata il 30; il tratto genitale pesa mg. 17, quello della sorella di controllo mg. 7,5. L'epitelio vaginale della prima offre tipici caratteri di metestro (con intensa infiltrazione leucocitaria), mentre nell'altra trovo una vagina di femmina impubere.

5. 22 giugno; una topolina di 28 giorni riceve 8 ipofisi di topo (7 ♂ ed 1 ♀ di 39 giorni, non ancora sessualmente maturi); dopo tre giorni la topolina è in calore; sacrificata il 26 trovo il tratto genitale (che pesa mg. 25) molto sviluppato, con le corna uterine piene di liquido; quello della sorella di controllo è perfettamente infantile e pesa mg. 7,5. L'esame istologico dimostra nella vagina della femmina trattata un tipico epitelio estrale con spesso strato corneo.

Dalle mie esperienze risulta quindi che la preipofisi di *Rana esculenta* non è capace (neppure nei periodi in cui si può ritenere in fase di piena attività) di indurre manifestazioni sessuali nella topolina impubere. Se si tien presente che 17 ipofisi di rana mi sono risultate inefficienti, mentre 3 sole ipofisi di topo sono atte a determinare un ciclo estrale completo, credo non debbano sorgere dubbi al riguardo⁽¹⁾. Non può naturalmente essere invocata l'impossibilità di attecchimento della ipofisi di rana, poichè in queste esperienze il risultato è raggiunto mediante il riassorbimento dell'organo.

Se ne dovrebbe dedurre quindi, tenendo conto anche dei miei precedenti risultati, che l'ipofisi dei Vertebrati inferiori, pur essendo dotata di attività gonadotropa, non elabora (o solo in quantità insufficiente) i principi atti a stimolare la maturazione dei follicoli ovarici dei Mammiferi e le loro susseguenti trasformazioni. Se questo sia dipendente da una specificità zoologica degli ormoni gonadotropi, oppure da altri fattori (per es. da un eccesso di prolattina o di ormone della crescita, che sembrano avere azione antagonista su quello gonadotropo) è questione ardua e tuttora aperta. L'ipotesi della specificità zoologica sembrerebbe poggiare su alcune basi sperimentali, ma contrasta tuttavia (come ho ricordato nel precedente lavoro) con molteplici altre ricerche. E tale diversità di risultati appare evidente anche in recenti lavori. Ad es. Artemoff (1936) in *Rhodeus sericeus* ha potuto verificare che iniezioni di emulsione di ipofisi di rana determinano, nell'inverno, uno sviluppo dell'ovopositore simile a quello che si ha nell'epoca della frega, mentre con prolan od ipofisi di bua (anche in estratti ad alta concentrazione ormonica) l'accrescimento è nullo o scarsissimo, per cui l'A. ritiene che

(1) La ipofisi di rana adulta pesa circa mg. 1 e quella di topo circa mg. 1,5.

si tratti di ormoni a specificità zoologica. Invece Morosowa (1936) sperimentando sul pesce persico ha ottenuto, con prolan od urina non sterilizzata di gravida, la maturazione e la deposizione dei prodotti sessuali molto prima dell'epoca normale della frega.

Nuove ed estese indagini comparative sono quindi necessarie per risolvere tale interessante problema. D'altra parte, nel caso specifico delle mie ricerche, è forse opportuno non dimenticare che la fisiologia ovarica dei Mammiferi presenta una complicazione molto maggiore di quella dei Vertebrati inferiori. L'accrescimento dei follicoli oofori dei Mammiferi, con la secrezione di quel prodotto ad alta attività endocrina che è il *liquor folliculi*, e, più ancora, le modificazioni che essi subiscono successivamente con la formazione dei corpi lutei, non trovano certo riscontro nella maggioranza almeno dei Vertebrati inferiori⁽¹⁾. È logico pensare quindi che in rapporto a questo anche l'attività gonadotropa della preipofisi assuma (qualitativamente e quantitativamente) una maggiore complessità; sappiamo infatti che nei Mammiferi sono ormai accertati due ormoni gonadotropi: quello dell'accrescimento follicolare e quello della luteinizzazione.

Mi pare pertanto che la questione da me posta non sia senza importanza e possa contribuire alla elaborazione di questo moderno capitolo della fisiologia comparata.

(1) Mi è ben noto come anche in questi sia stato dimostrato (soprattutto dalle ricerche di Mingazzini, Giacomini, Hett, ecc.) lo sviluppo, dopo la deiscenza del follicolo, di corpi lutei; ma si tratta in genere di formazioni di minore entità e di breve durata. Le conclusioni del Prof. Giacomini (1896) illustrano chiaramente, per gli Anfibi in particolare, la scarsa portata che vi riveste la formazione lutea. Invece in diversi Vertebrati inferiori vivipari (od ovovivipari) i corpi lutei si sviluppano maggiormente, assumendo caratteristiche molto simili a quelle dei corpi lutei dei Mammiferi; ciò risulta dalle ricerche del Mingazzini (1893) su *Seps* ed *Anguis*, del Giacomini (1896) su alcuni Selaci e di altri AA. posteriori. Interessanti a tal proposito sono anche le esperienze recenti di Cunningham e Smart (1935), i quali in un Anuro sud-africano (*Xenopus laevis*) hanno constatato come la riduzione e l'assorbimento del follicolo svuotato incominci subito dopo lo scoppio e proceda rapidamente e come neppure gli estratti di preipofisi di bue, che pur determinano l'ovulazione artificiale, ne possano influenzare l'evoluzione. Anche in *Lacerta viridis* osservano, subito dopo la deiscenza, la riduzione e l'assorbimento delle cellule follicolari. Invece in due Rettili vivipari (*Anguis fragilis* e *Zootoca vivipara*) i follicoli persistono durante lo sviluppo degli embrioni nell'ovidutto ed a spese dell'epitelio della granulosa, che si ipertrofizza, danno luogo alla formazione di corpi lutei essenzialmente simili a quelli dei Mammiferi. Da ciò gli AA. deducono che un vero corpo luteo si formi solo nelle specie vivipare, in conseguenza dello sviluppo dell'uovo fecondato entro le vie genitali femminili. Sarà certamente interessante, ai fini delle mie ricerche, saggiare il potere gonadotropo della preipofisi di Vertebrati inferiori vivipari, tanto più che Ranzi e collaboratori hanno illustrato notevoli modificazioni della ipofisi di Selaci durante la gestazione.

Fisiologia. — *Fotometro a cella fotoelettrica per la determinazione dell'emoglobina in soluzioni diluitissime di sangue*⁽¹⁾.

Nota⁽²⁾ di EUGENIA SACERDOTE, presentata dal Socio A. HERLITZKA.

Com'è noto, la determinazione qualitativa dell'emoglobina esistente in un campione di sangue, viene comunemente eseguita colla reazione di ossidazione della benzidina, in presenza di peridrolo, funzionando in tali condizioni l'emoglobina da perossidasi.

Io mi sono proposta, servendomi appunto di tale reazione, di mettere in evidenza e misurare anche minime quantità di emoglobina in soluzioni diluitissime di sangue.

Mi sono servita, a tale scopo, di un fotometro a cella fotoelettrica, che presenta il vantaggio di una grandissima sensibilità di fronte anche a minime variazioni dell'intensità del colore della reazione, non apprezzabili ad occhio nudo.

Descriverò qui brevemente la preparazione dei reagenti e il tipo di fotometro usato per determinare quantitativamente l'emoglobina.

METODO DI PREPARAZIONE DELLA BENZIDINA.

Si fanno sciogliere a caldo gr. 2 di benzidina purissima Merk in 100 cc. di acido acetico glaciale. Meno di un minuto di riscaldamento a fiamma diretta è sufficiente per sciogliere la benzidina. Anche se la sostanza contiene qualche impurità, sarà meglio non cercare di depurarla, per evitarne la facile ossidazione durante la filtrazione. Dopo aver provato numerose altre concentrazioni, sono venuta alla conclusione che la soluzione acetica di benzidina al 2% è quella che meglio si presta a dare una reazione pronta, vivace, costante; mentre la colorazione propria di una tale soluzione è praticamente trascurabile.

METODO DI PREPARAZIONE DEL PERIDROLO.

Si prepara una soluzione di peridrolo al 5%, partendo da quello Merk secondo le tabelle delle diluizioni unite ad ogni flacone.

Con soluzioni più concentrate la reazione si dimostra anche più pronta,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto A. Mosso al Col d'Oleu.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1937.

ma le numerosissime bollicine di O_2 che si liberano contemporaneamente, mascherano a lungo il caratteristico colore della reazione.

Le soluzioni dei due reagenti descritte, devono essere preparate fresche prima di ogni ricerca, perchè la benzidina in soluzione s'imbrunisce alla luce, e il peridolo in soluzione diluita, si scinde assai facilmente.

Preparate le due soluzioni dei reagenti, si introducono nell'apposito recipiente di vetro, a faccie piane e parallele, 2 cc. di benzidina al 2%, e 1 cc. di H_2O_2 al 5%.

Dopo aver sicuramente constatato la non avvenuta reazione di ossidazione prima dell'introduzione dell'emoglobina, si aggiungono 2 cc. di una soluzione diluitissima (valori intorno a 1:500.000 di emoglobina) del sangue da esaminare.

In presenza di emoglobina la reazione avviene rapidamente, e raggiunge, a seconda della concentrazione, in 1 minuto circa un'intensa colorazione bleu-verde, che comincia a virare al rosso dopo 2-3 minuti.

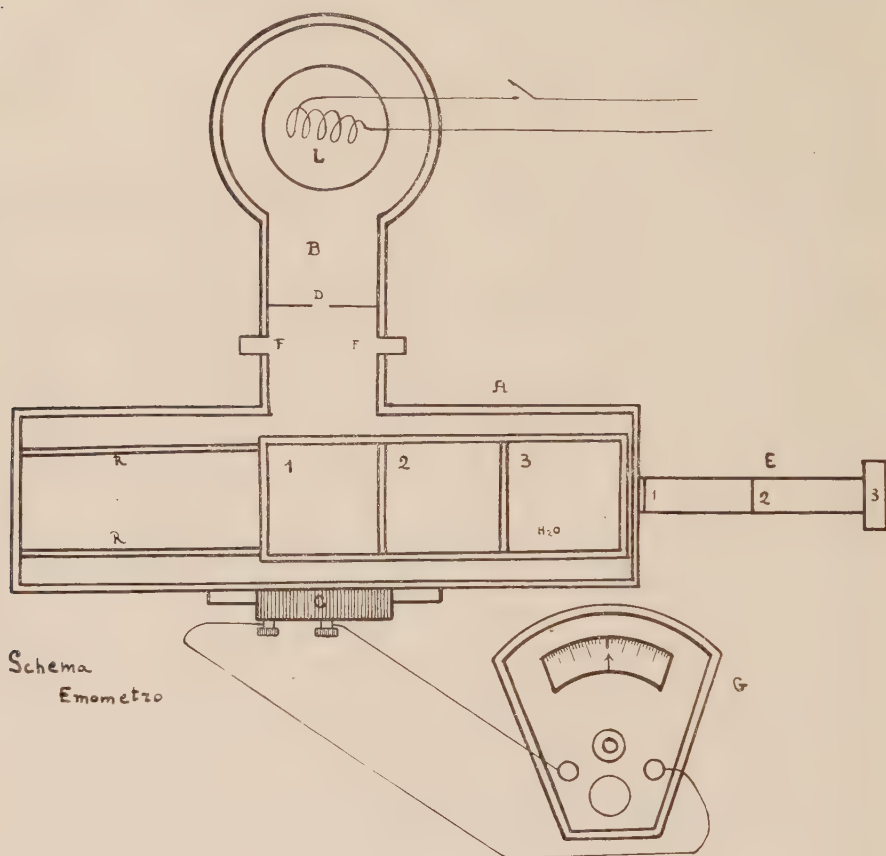
Per valutare l'intensità di colorazione della reazione, mi sono servita di un fotometro a cella fotoelettrica, col quale ho misurato la quantità percentuale di luce assorbita da tale reazione.

Il fotometro che ho adoperato consta essenzialmente di una scatola rettangolare metallica A, munita di coperchio, verniciata internamente in nero, all'interno della quale, scorrevole su una rotaia R, è situato un supporto capace di contenere 3 recipienti di vetro a faccie piane parallele. Tale supporto mobile è manovrabile dall'esterno, mediante una leva E, mentre un nottolino, spinto da una molla, consente di fermare il supporto stesso, in tre diverse posizioni, a seconda che, al fascio luminoso, si voglia far attraversare l'una piuttosto che l'altra delle soluzioni contenute nei recipienti di vetro (v. schema).

La parete posteriore della scatola, presenta al centro un orificio circolare di 1 cm. di diametro, al quale fa riscontro, sulla parete anteriore, un eguale foro, dietro al quale è montata una cella fotoelettrica C (tipo dott. Lange). I due serrafile di detta cella sono congiunti ad un galvanometro di Pye a bassa resistenza G.

L'illuminazione è assicurata da una lampada elettrica smerigliata da 100 Watt L, situata all'interno di una scatola cilindrica verticale, comunicante per mezzo di un grosso tubo metallico B, col foro della parete posteriore della scatola rettangolare. Un diaframma ad iride D intercalato sul tubo orizzontale, consente di regolare a volontà l'intensità luminosa. Attraverso ad un'apposita fessura F, si possono introdurre adatti filtri sul decorso dei raggi luminosi. E poichè la colorazione bleu-verde della reazione presenta se non un massimo, almeno un aumento di assorbimento, per la banda da $\lambda = 580-540$, ho ricorso al filtro giallo GG₁₁-24670 di Schott e Genossen, ciò che mi ha permesso di aumentare notevolmente la sensibilità, inoltre dato che, come si è detto, dopo 2-3 minuti il bleu-verde

vira al rosso, l'assorbimento selettivo raggiunge un massimo per poi diminuire dopo qualche istante, quando s'inizia tale viraggio. I recipienti a faccie piane parallele per i liquidi in esame sono di 1.5 cm. di lato e 8 cm. di altezza, due delle faccie essendo trasparenti e due altre smerigliate.



Per procedere alla misura, si riempie uno dei recipienti di H_2O distillata, e gli altri delle soluzioni da esaminare. S'introducono i 3 recipienti negli appositi spazi del supporto mobile: chiusa la scatola col suo coperchio, manovrando dall'esterno, si porta il recipiente contenente l' H_2O distillata sull'asse dei due fori, si accende la lampadina, e si regola l'intensità luminosa col diaframma dimodochè, l'indice del galvanometro percorra tutta la scala. Si sposta allora immediatamente il supporto mobile, in modo da sostituire, sul percorso del fascio luminoso, la soluzione in esame all' H_2O distillata, e subito si legge la nuova posizione assunta dall'indice del galvanometro. Dopo qualche istante si ripete la lettura, e così di 20 in 20 secondi, finchè l'assorbimento da parte della soluzione abbia raggiunto il massimo, cioè finchè lo spostamento dell'indice galvanometrico sia diven-

tato minimo. Occorre verificare prima di ogni lettura, attraverso l' H_2O distillata, l'intensità della sorgente luminosa, correggendo col diaframma nel caso che risulti cambiato.

Per la taratura del fotometro ho ricorso a campioni di sangue umano, di cane e di cavia, dei quali, coll'apparecchio di Van Slyke, ho misurato la capacità massima per l' O_2 , risalendo poi al tenore di emoglobina in gr. per 1 cc. di sangue esaminato. Ho preparato quindi varie soluzioni di emoglobina in acqua distillata progressivamente più diluite, e cioè da 1/100.000 a 1/1.150.000.

Tenendo costanti le soluzioni di benzidina e peridolo e cambiando soltanto la diluizione delle soluzioni di emoglobina, ho constatato che, la intensità di colorazione, espressa in per cento di luce assorbita, diminuisce progressivamente e regolarmente coll'aumentare della diluizione, e cioè la percentuale di luce assorbita dalla reazione benzidin-emoglobina-peridolo è, entro certi limiti, direttamente proporzionale alla concentrazione dell'emoglobina.

Considerando la luce che attraversa l'acqua distillata come 100 a cui corrisponda ad es. uno spostamento di 50 graduazioni dell'indice del galvanometro, mentre ad una soluzione di emoglobina 1/100.000 corrisponde uno spostamento di sole 10 graduazioni, vorrà dire che la quantità di luce passata sarà del 20%. Si sa infatti che lo spostamento del galvanometro è proporzionale alla luce che colpisce la cella.

In tale modo ho potuto tracciare una curva di taratura dell'emometro per diluizioni di emoglobina che stanno fra 1/100.000 e 1/1.150.000 (v. tabelle e diagrammi 1-2).

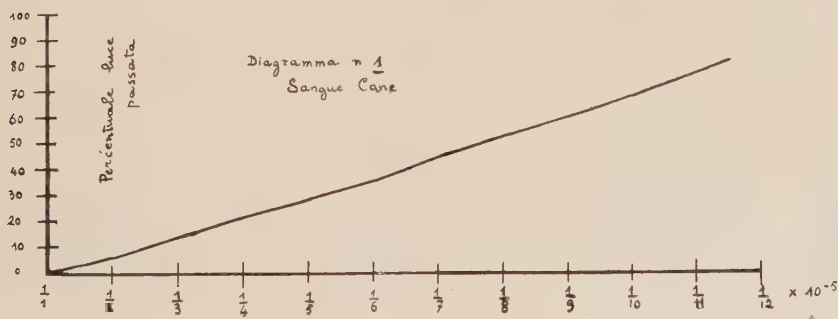


Fig. 1. - Soluzioni di emoglobina da 1/100.000 a 1/1.150.000.

TABELLA I.
Sangue di cane.

Soluzione benzidina al 2‰ - cc. 2 Soluzione peridrolo al 5‰ - cc. 1 Soluzione emoglobina al	Deviazione galvanometro	Percento luce passata
cc. 2 { 1/100.000	0	0‰
1/200.000	2.5	6.1
1/300.000	5.0	14.3
1/400.000	7.5	21.4
1/500.000	10.0	28.5
1/600.000	12.5	35.7
1/700.000	15.5	44.3
1/800.000	18.0	52.8
1/900.000	21.0	60.0
1/1.000.000	24.0	68.5
1/1.150.000	29.0	82.8

TABELLA II.
Sangue umano.

Soluzione benzidina al 2‰ - cc. 2 Soluzione peridrolo al 5‰ - cc. 1 Soluzione emoglobina al	Deviazione galvanometro	Percento luce passata
cc. 2 { 1/100.000	0	0‰
1/200.000	3.0	8.5
1/300.000	5.5	15.7
1/400.000	7.5	21.4
1/500.000	10.5	30.0
1/600.000	12.5	35.7
1/700.000	15.5	44.2
1/800.000	17.0	48.5
1/900.000	19.0	54.2
1/1.000.000	21.5	61.4
1/1.150.000	25.5	72.8

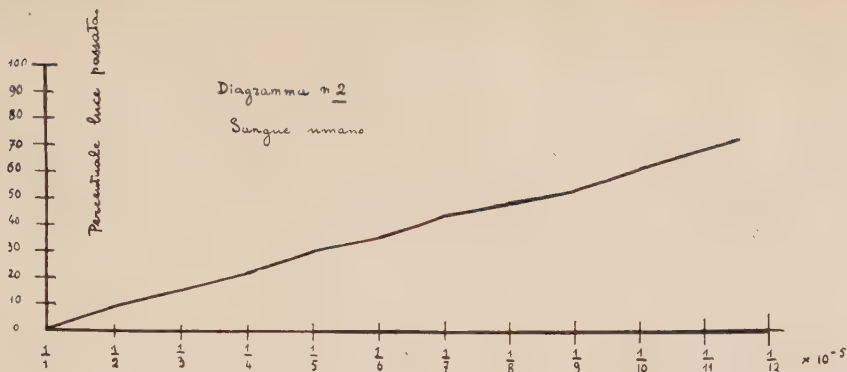


Fig. 2. — Soluzioni di emoglobina da 1/100.000 a 1/1.150.000.

Entro questi limiti mantenendo costanti le quantità di H_2O_2 e di benzidina, si può ammettere all'incirca, che la relazione esistente fra luce assorbita e soluzioni progressivamente più diluite di emoglobina, sia espressa da un'equazione di 1° grado. La costante di proporzionalità è eguale alla decima parte della percentuale di luce che attraversa uno spessore di 1,5 cm. di una soluzione di emoglobina di 1×10^{-6} .

La sensibilità dell'emometro è tale da registrare variazioni di emoglobina corrispondenti a 0.001-0.002 di mmgr. di emoglobina per cc. di soluzione.

Data l'intensità della reazione non mi è stato possibile esaminare soluzioni di emoglobina più concentrate di 1/100.000. D'altra parte, per forti diluizioni di emoglobina, superiori cioè a 1/1.000.000, si incontrano difficoltà d'altro genere. La reazione infatti si fa sempre più debole e le cause d'errore si fanno sentire in maniera più evidente.

Volendo dunque determinare la quantità di emoglobina esistente in un dato campione di sangue basterà prepararne una soluzione diluitissima. Una volta introdotti 2 cc. di tale soluzione nel recipiente, già contenente 2 cc. di benzidina e 1 cc. di peridolo, ed avvenuta la reazione nel modo sopra descritto, si leggerà lo spostamento dell'indice del galvanometro. L'assorbimento percentuale di luce relativa a tale spostamento dell'indice, corrisponde a un dato valore di emoglobina sulla curva di taratura, onde, con un semplice calcolo di proporzionalità, tenendo presente la diluizione adoperata, si risale alla concentrazione di emoglobina nel campione di di sangue in esame.

Occorre però avvertire che l'emoglobina perde col tempo la sua capacità perossidica; perciò è necessario fare la lettura entro le prime ore dal prelievo del sangue.

Nella tabella III e relativo diagramma è messa in evidenza la curva di variazione della capacità perossidica della emoglobina in funzione del tempo trascorso dal momento di prelievo.

TABELLA III.
Sangue cavia.

Soluzione benzidina al 2 ‰ - cc. 2 Soluzione peridolo al 5 ‰ - cc. 1 Soluzione emoglobina al		Deviazione galvanometro					Percento luce passata				
		1 h	15 h	24 h	48 h	72 h	1 h	15 h	24 h	48 h	72 h
cc. 2	1/100.000	0	0	0	1	4	0	0	0	2.8	11.4
	1/200.000	2	2	3	5	8	5.7	5.7	8.5	14.3	22.8
	1/300.000	6	7	7	8	12	17.1	20.0	20.0	22.8	34.4
	1/400.000	8	10	11	12	16	22.8	28.5	31.4	34.2	45.7
	1/500.000	10.5	12	14	17	20	30.0	34.2	40.0	48.5	57.1
	1/600.000	14	15.5	17	20	23	40.0	44.2	48.5	57.1	65.7
	1/700.000	17	20	21	23	27	48.5	57.1	60.0	65.7	77.1
	1/800.000	19	22	23	26	30	54.2	62.8	65.7	74.2	85.7
	1/900.000	21	23	24	28	32	60.0	65.7	68.5	80.0	91.4
	1/1.000.000	24	26	27	—	—	68.5	74.2	77.1	—	—
	1/1.150.000	27	29	—	—	—	77.1	82.8	—	—	—

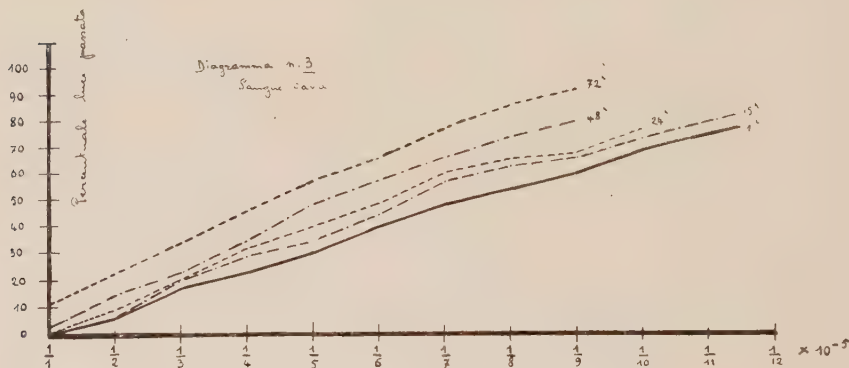


Fig. 3. — Soluzioni di emoglobina da 1/100.000 a 1/1.150.000. Curve di variazione della capacità perossidica dell'emoglobina in funzione del tempo trascorso dal momento del prelievo del sangue (dalla 1^a h alla 72^a h).

Concludendo, servendomi nel modo detto delle curve di taratura ho eseguito numerose determinazioni in materiale poverissimo di emoglobina ed ho potuto convincermi della bontà del metodo descritto specialmente per quanto riguarda la sensibilità e la velocità di determinazione.

Fisiologia. — *Ricerche sperimentali sul liquido seminale.* — II. *Sul valore del pH del liquido seminale di gallo* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di V. ZAGAMI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

In una precedente Nota ⁽³⁾ abbiamo messo in evidenza, che assai poco indagata è stata finora l'organizzazione chimica e chimico-fisica del liquido seminale, ed abbiamo rimarcato l'utilità, che l'esatta conoscenza di tale nozione presenta sia nel campo scientifico, sia nel campo di applicazioni pratiche (fecondazione artificiale, ecc.).

Abbiamo inoltre aggiunto, che era perciò nostro proposito condurre una serie metodica di ricerche sul liquido seminale come tale, nonchè sul secreto delle singole glandole sessuali accessorie, allo scopo di accertare, in primo luogo, le varie costanti chimico-fisiche normali, e quindi le possibili variazioni di ordine fisiologico, patologico e sperimentale.

Nella stessa Nota, dopo avere ricordato le poche indagini, che ci aveva offerto a considerare la letteratura, che avevamo potuto compulsare, in merito a tale questione, abbiamo riferito pure i risultati delle prime nostre ricerche, eseguite sul liquido seminale umano normale, e che ci hanno permesso precisamente di stabilire: *a*) che il liquido seminale umano, per la determinazione della sua concentrazione in ioni H^+ va raccolto, conservato ed esaminato al riparo assoluto dall'aria; *b*) che, in tali condizioni, il valore del pH, a 18° C., è di 7,41-7,74; *c*) che il contatto con l'aria modifica notevolmente e rapidamente questo valore, spostandolo verso l'alcalinità, e determinando la morte, o per lo meno l'immobilità, degli spermatozoi entro le prime cinque ore; *d*) e che conservando il liquido sotto olio di vasellina si modifica invece solo lievemente e lentamente lo stesso valore, spostandosi verso l'acidità, mentre la motilità e la vitalità degli spermatozoi si mantiene anche per 50-60 ore (alla temperatura ambiente di 16-18 C.).

Recentemente (attraverso la traduzione a cura di T. Bonadonna ⁽⁴⁾), abbiamo avuto occasione di prendere visione della monografia di V. K. Milovanov sui principî della fecondazione artificiale, e degli Atti del Primo Congresso per la fecondazione artificiale degli animali domestici, svoltosi a

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1937.

(3) V. ZAGAMI, *Ricerche sperimentali sul liquido seminale.* — I. *Sul valore del pH del liquido seminale umano normale.* «Rendic. R. Acc. Naz. Lincei», vol. XXV, p. 268, 1937.

(4) T. BONADONNA, *Le basi scientifiche e le possibilità applicative della fecondazione artificiale negli animali domestici.* Vannini G., Edit., Brescia, 1937.

Mosca nel dicembre 1933-gennaio 1934. Siamo venuti così a conoscenza dei valori del pH, ottenuti dagli Autori russi pel liquido seminale di varie specie di animali domestici, e che non avevamo potuto ricordare nella precedente nostra Nota. Precisamente, in base ai lavori eseguiti dal L.I.O.V.I.G.⁽¹⁾ nell'U.R.S.S., il Milovanov riporta, che lo sperma dell'ariete presenta un $\text{pH} = 6,2-6,5$, il quale può salire a 7,0 quando la riserva dell'epididimo si è esaurita, e può scendere a 4,5 quando il liquido seminale rimane fuori dell'organismo; che lo sperma di toro presenta un $\text{pH} = 6,5-6,8$ - e talvolta un $\text{pH} = 5,5$ -, il quale può salire a 7,0-7,5, se si verifica un maggiore afflusso di secreti sussidiari; e infine, che lo sperma di coniglio presenta un $\text{pH} = 6,8-7,0$, e quello di cane un $\text{pH} = 6,6-7,2$. Starkov⁽²⁾ ha riferito, che il pH dello sperma delle volpi oscilla tra 6,2-6,4, e che non si riscontra alcuna differenza tra sperma e liquido prostatico. Per quanto riguarda il liquido seminale degli uccelli, il Milovanov si limita a dire, che negli uccelli domestici la reazione dello sperma è neutra o leggermente alcalina, e che tale alcalinità si accentua talvolta fino a $\text{pH} = 8,0$ dopo un certo periodo di conservazione o in seguito a diluizione.

Ma circa il valore effettivo di tutti i dati suddetti non crediamo di potere esprimere alcun apprezzamento, soprattutto perchè ci manca ogni notizia relativa alla tecnica adottata nelle esperienze.

Rimane comunque immutata la nostra prima affermazione circa la necessità di studiare esaurientemente e convenientemente l'argomento.

Di recente, essendoci offerta l'opportunità di portare un contributo alla conoscenza della reazione attuale del liquido seminale del gallo, ne abbiamo subito approfittato, cercando di eseguire le osservazioni il più possibile al riparo da cause di errori.

Per le ricerche ci siamo serviti di tre galli di razze diverse (ma non pure). All'inizio delle esperienze, due di essi (soggetto n. 1 e n. 2) erano già sessualmente maturi da circa sei mesi, il terzo (soggetto n. 3) da circa due mesi.

Per la raccolta del liquido seminale abbiamo adottato la tecnica descritta da G. Amantea⁽³⁾, e che assai bene ha corrisposto anche allo scopo nostro. I galli, cioè, sono stati abituati in modo che, offrendo loro le femmine (tenute di regola separate) si accoppiavano senza preoccuparsi della presenza dello sperimentatore, e permettendo anche di applicare direttamente contro l'orificio cloacale, durante la copula, una adatta capsulina di vetro ben pulita,

(1) L. I. O., Laboratorio per la fecondazione artificiale; V. I. G., Istituto veterinario per l'allevamento del bestiame.

(2) J. D. STARKOV, *La fecondazione artificiale delle volpi*. «Atti del Congresso di Mosca», riportati da BONADONNA (loc. cit.).

(3) G. AMANTEA, *Ricerche sulla secrezione spermatica*. - XIV. *La raccolta dello sperma e l'eliminazione degli spermatozoi nel gallo*. «Rendic. R. Acc. Naz. Lincei», vol. XXXI, p. 207, 1922.

destinata ad accogliere l'eiaculato. Riesce così molto facile la raccolta di tutto il liquido seminale, eliminato nelle più perfette condizioni fisiologiche. Il liquido raccolto veniva immediatamente coperto da uno strato di olio di vasellina, per evitare il più possibile il contatto con l'aria.

Le esperienze sono state eseguite sul liquido seminale eliminato dai galli, che si trovavano in riposo sessuale da 48-72 ore, ossia in condizioni di massima efficienza sessuale⁽¹⁾. Allo scopo poi di indagare le eventuali variazioni del pH, riferibili alle modificate condizioni del liquido stesso, per effetto di frequenti ripetuti accoppiamenti, un'altra serie di esperienze è stata effettuata, determinando volta a volta il valore del pH del liquido eliminato dagli animali, che si facevano accoppiare più volte successivamente a brevi intervalli di tempo.

Il valore del pH è stato determinato, secondo la tecnica descritta nella nostra precedente Nota, col metodo elettrometrico, e adoperando la siringa-elettrodo di Mislowitzer. Le determinazioni sono state eseguite sempre a 18° C. circa di temperatura, e sono state fatte il più presto possibile dopo la raccolta del liquido, per evitare le modificazioni dovute soprattutto all'accumulo dei prodotti provenienti dall'attività degli spermatozoi.

I dati raccolti sono presentati nelle due tabelle annesse. Precisamente, nella tabella I sono riportati i valori ottenuti sperimentando sul liquido seminale fornito dai galli in riposo sessuale da 48-72 ore, in periodo, cioè, di massima efficienza sessuale; nella tabella II sono invece riportati i valori del pH ottenuti sperimentando sul liquido seminale fornito dagli stessi galli in ripetuti accoppiamenti, avvenuti a brevi intervalli di tempo.

Dall'esame della tabella I si nota, che nel gallo n. 1 il valore medio del pH del liquido seminale è stato di 7,16 con oscillazioni tra 7,03 e 7,29; che nel gallo n. 2 è stato di 7,18 con oscillazioni tra 7,09 e 7,28; e che infine nel gallo n. 3 è stato di 7,02 con oscillazioni tra 6,88 e 7,10. In generale dunque si può dire, che il pH del liquido seminale di gallo, raccolto nelle più perfette condizioni fisiologiche, in periodo di massima efficienza sessuale, ed esaminato al riparo dall'aria e alla temperatura di 18° C., è risultato in media eguale a 7,02-7,18.

Raffrontando i suddetti valori, con quelli precedentemente raccolti sperimentando sul liquido seminale umano, si può affermare, che la concentrazione in ioni H^+ nel liquido seminale di gallo è più elevata di quella, che si ha nel liquido seminale umano.

Poichè il valore del pH del liquido seminale umano è risultato a noi molto prossimo a quello del sangue, indubbiamente importante sarebbe stato accertare, se anche nei galli si abbia la stessa corrispondenza, ma su ciò ci proponiamo di ritornare successivamente, estendendo le osservazioni anche ad altre specie animali. Ci limitiamo per ora a ricordare che, secondo le

(1) G. AMANTEA, loc. cit.

TABELLA I.

Valori (a 18° C.) del pH del liquido seminale di gallo								
Soggetto n. 1			Soggetto n. 2			Soggetto n. 3		
N. esperienza	Riposo sessuale ore	pH	N. esperienza	Riposo sessuale ore	pH	N. esperienza	Riposo sessuale ore	pH
1	48	7.15	1	48	7.19	1	48	7.04
2	48	7.29	2	48	7.10	2	48	7.01
3	48	7.19	3	48	7.16	3	40	7.05
4	40	7.26	4	48	7.28	4	72	7.10
5	48	7.27	5	48	7.18	5	48	7.00
6	48	7.28	6	36	7.09	6	48	6.88
7	72	7.26	7	36	7.22	7	72	7.06
8	48	7.05	8	48	7.12			
9	48	7.07	9	48	7.25			
10	48	7.04	10	72	7.24			
11	36	7.03						
12	168	7.21						
13	48	7.10						
14	72	7.06						
MEDIE		7.16	—		7.18	—		7.02

ricerche di Isalberti⁽¹⁾, la reazione attuale del siero di sangue nei galli corrisponde precisamente ad un valore medio di $\text{pH} = 7,09$.

Dall'esame della tabella II si rileva, che il valore del pH del liquido seminale di gallo varia sensibilmente per effetto di frequenti ripetuti accoppiamenti; le variazioni di norma tendono verso l'alcalinità, nel senso che il liquido seminale emesso nei successivi accoppiamenti a brevi intervalli presenta un pH di regola sempre più elevato, potendo raggiungere un valore di 7,40-7,55 dopo cinque accoppiamenti avvenuti nello spazio di due ore circa. In tali condizioni sperimentali, il liquido seminale, come è stato già descritto da G. Amantea⁽²⁾, si presenta anche sempre meno denso e sempre meno ricco di spermatozoi.

(1) M. ISALBERTI, *La reazione attuale del siero di sangue negli uccelli*. « Boll. Soc. Medica di Parma », 16, 79, 1923; « Arch. Ital. de Biol. », 73, 157, 1924.

(2) G. AMANTEA, loc. cit.

TABELLA II.

Variazioni del pH del liquido seminale di gallo per effetto di accoppiamenti ripetuti a brevi intervalli di tempo										
Numero esperienza	Soggetto n.	1° esame		2° esame		3° esame		4° esame		5° esame
		periodo di tempo intercorso dallo accoppiamento precedente ore	pH	periodo di tempo intercorso dallo accoppiamento precedente minuti	pH	periodo di tempo intercorso dallo accoppiamento precedente minuti	pH	periodo di tempo intercorso dallo accoppiamento precedente minuti	pH	
1	1	48 ^h	7.07	60'	7.20	60'	7.30	—	—	—
2	1	48	7.29	75	7.09	—	—	—	—	—
3	2	36	7.09	60	7.17	—	—	—	—	—
4	3	48	6.88	60	7.17	60	7.34	—	—	—
5	1	48	7.04	60	7.22	60	7.25	—	—	—
6	2	36	7.22	60	perd.	60	7.13	—	—	—
7	3	72	7.06	60	perd.	60	7.22	—	—	—
8	1	36	7.03	60	7.16	20	7.27	20'	7.27	—
9	1	48	7.10	30	perd.	45	7.29	45	7.49	10'
10	2	48	7.25	30	perd.	45	7.31	45	perd.	10
11	1	72	7.06	30	7.19	30	7.22	20	7.41	15

Ci limitiamo per ora a fissare le suddette variazioni del pH, e ci riserviamo di discutere il fatto più ampiamente in seguito, quando potremo utilizzare anche dati relativi al valore del pH del secreto delle glandole sessuali accessorie.

Come già avevamo osservato per il liquido seminale umano, anche per quello di gallo è necessario impedire, o almeno limitare al minimo, la esposizione del liquido all'aria, se si vogliono ottenere valori del pH sufficientemente esatti e corrispondenti al vero. Omettendo tale precauzione si hanno sensibili spostamenti verso l'alcalinità, e con facilità si possono osservare valori uguali a pH 7,60-7,80 in liquido seminale di gallo lasciato per 3-4 ore a contatto con l'aria; nello stesso periodo di tempo invece le variazioni sono assai minime, e dirette verso l'acidità, nel liquido conservato sotto olio di vasellina.

In conclusione:

1° il liquido seminale dei nostri galli, raccolto, conservato ed esaminato quanto più possibile al riparo dall'aria ha presentato, a 18° C. di temperatura, un pH medio di 7,02-7,18;

2° il contatto con l'aria ha mostrato di modificare sensibilmente questo valore spostandolo verso l'alcalinità;

3° per effetto di accoppiamenti ripetuti a brevi intervalli di tempo si è avuta l'eliminazione di un liquido seminale, il cui pH è risultato più elevato rispetto a quello del liquido eliminato dopo un congruo periodo di riposo sessuale.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1937 (Anno XV).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè' di pagina la data di arrivo)

Matematica (Geometria). — *Osservazioni su alcune « geometrie finite »*. Nota II ⁽¹⁾ del Corrisp. G. FANO.

4. L'effettiva costruzione dei sistemi $S(n^2 + n + 1 | 2 | n + 1)$ per $n = 2^m$ e $m > 2$ (nei quali ancora ogni quadrangolo piano completo ha i 3 punti diagonali allineati) può ottenersi estendendo opportunamente lo schema precedente ⁽²⁾.

Per $m = 3, n = 8$ (sistema $S(73 | 2 | 9)$) partiamo da una prima retta, i cui 9 punti designeremo con $A_0, A_1, A_2, \dots, A_8$. Indicheremo con $1, 2, 3, \dots, 8$ le ulteriori 8 rette uscenti dal punto A_0 , e così pure quelle uscenti dal punto A_1 . Dalle mutue intersezioni di queste rette nascono i rimanenti 64 punti del sistema. Indicando con ih ($i, h \equiv 1, \leq 8$) il punto intersezione della retta i uscente da A_0 colla retta h uscente da A_1 , potremo formare con questi simboli la matrice quadrata:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & \dots & 18 \\ 21 & 22 & 23 & \dots & 28 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 81 & 82 & 83 & \dots & 88 \end{vmatrix}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1937.

(2) Cfr. il n. 3 nella Nota I a p. 59.

le cui orizzontali e verticali corrispondono rispettivamente alle rette suindicate uscenti da A_0 e da A_1 . Come dianzi per ottenere le rette uscenti rispettivamente dai punti A_2, A_3, A_4 abbiamo distribuiti i 4 numeri 1, 2, 3, 4 in *due* coppie nei *tre* modi possibili 12-34, 14-23, 13-42 (con che ciascuna delle 6 coppie compare in *una* di queste distribuzioni), adesso dobbiamo distribuire i numeri 1, 2, 3, ..., 8 in *quattro* coppie, e ciò in *sette* modi diversi, in guisa che ciascuna delle $\binom{8}{2} = 28$ coppie entri in uno e uno solo di questi aggruppamenti⁽¹⁾; p. es. così:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 12-34-56-78 \\ 16-25-38-47 \\ 18-63-27-54 \\ 17-82-64-35 \\ 14-76-85-23 \\ 15-18-73-62 \\ 13-57-42-86 \end{array} \right.$$

Il secondo aggruppamento si ottiene dal primo applicando agli elementi 2, 3, 4, ..., 8 la sostituzione circolare (2687453), di periodo 7 (estensione della (243) della Nota I, n. 3); gli altri si ottengono ripetendo la stessa sostituzione, la quale ancora dall'ultimo aggruppamento riconduce al primo. Ciò premesso, i punti del quadro (2) che appartengono alle 8 rette ulteriori uscenti da ciascuno dei punti A_2, A_3, \dots, A_8 si ottengono, quanto a una prima retta per ciascun punto, facendo seguire ai primi elementi 1, 2, ..., 8 (nell'ordine naturale), in qualità di secondi elementi, i numeri delle singole orizzontali del quadro (3), nel medesimo ordine (3); e, quanto alle altre 7 rette, scambiando in questa prima retta i secondi elementi del 1° e 2°, 3° e 4°, 5° e 6°, 7° e 8° punto, nonchè due qualunque di queste 4 coppie di secondi elementi e in pari tempo le altre due. Combinando questi vari scambi, si hanno appunto 7 sostituzioni ($0 \cdot 2^3 = 8$, compresa l'identità). Le 8 rette uscenti ad esempio dal punto A_2 contengono rispettivamente i punti:

(1) Per formare uno di questi aggruppamenti, la prima coppia può scegliersi in $\binom{8}{2} = 28$ modi; dopo di ciò, la seconda coppia in $\binom{6}{2} = 15$ modi; la terza in 6 modi; la quarta risulta individuata. Questi aggruppamenti sono perciò complessivamente in numero di $\frac{28 \cdot 15 \cdot 6}{4!} = 105$. Fra essi dobbiamo sceglierne 7 mutuamente « complementari », tali cioè che in essi entrino tutte le 28 coppie, e ciascuna una volta sola.

11	22	33	44	55	66	77	88
12	21	34	43	56	65	78	87
13	21	31	42	57	68	75	86
14	23	32	41	58	67	76	85
15	26	37	48	51	62	73	84
16	25	38	47	52	61	74	83
17	28	35	46	53	64	71	82
18	27	36	45	54	63	72	81.

Analogamente le singole rette uscenti da A_3 contengono i punti:

11	26	32	45	53	68	74	87
16	21	35	42	58	63	77	84
12	25	31	46	54	67	73	88
.....							

E così ancora per le rette uscenti da A_4, A_5, \dots in corrispondenza alle diverse orizzontali del quadro (3), e sempre cogli scambi di secondi elementi dianzi indicati. Si può verificare direttamente che due rette qualunque uscenti da punti A_i distinti hanno a comune *un* punto del quadro (2).

Pensando le 8 rette uscenti da A_0 (esclusa quella dei 9 punti A_i) ripartite nelle 4 coppie fisse 12-34-56-78, e quelle uscenti da A_1 secondo uno qualunque dei 7 aggruppamenti (3), queste coppie, intersecandosi, determinano, per ciascuno dei 7 casi, $4 \cdot 4 = 16$ quadrangoli semplici, con 32 diagonali, che a 4 a 4 coincidono colle 8 rette della configurazione passanti rispettivamente per A_2, A_3, \dots, A_8 (e distinte dalla $A_0 A_1 A_2 \dots$).

5. Analogamente ancora per $n = 2^m$ e m qualunque ≥ 4 . Una prima retta contenga $2^m + 1$ punti, che indicheremo con $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n = 2^m$). Le ulteriori n rette uscenti da A_0 e quelle uscenti da A_1 forniscono colle loro mutue intersezioni i rimanenti n^2 punti della configurazione ⁽¹⁾; con essi si può formare una matrice quadrata $|ih|$, di ordine $n = 2^m$, le cui orizzontali (indici i) e verticali (indici h) corrispondano alle n rette nominate uscenti rispettivamente da A_0 e A_1 .

Poichè coi numeri interi da 1 a $2^m = n$ si possono formare $\binom{n}{2}$ coppie, occorre distribuire i numeri stessi in $\frac{n}{2} = 2^{m-1}$ coppie, e ciò in

(1) In tutto, compresi i punti A_i , i punti della configurazione sono sempre in numero di $n^2 + n + 1 = 2^{2m} + 2^m + 1$.

$n - 1$ diversi modi o aggruppamenti, in guisa che ciascuna delle $\binom{n}{2}$ coppie entri in *uno* di questi aggruppamenti.

Nello stesso modo come, per $n = 4$, dalle coppie 12-34 si fa il nuovo aggruppamento 14-23, e da questo, ripetendo l'operazione, il terzo 13-42 (dal quale, ripetendo ancora l'operazione, si ritorna al primo);

e come ancora da 12-34-56-78, operando nello stesso modo sulle coppie prima e terza (12-56), seconda e quarta (34-78), si ha l'aggruppamento 16-25-38-47; e da questo, ripetendo l'operazione, si hanno gli altri del quadro (3);

così da 12-34-56-78-9, 10-11, 12-13, 14-15, 16, prendendo le coppie prima e quinta (cioè prima, e prima della seconda metà), seconda e sesta, ecc. si fa il nuovo aggruppamento:

$$1, 10-2, 9-3, 12-4, 11-5, 14-6, 13-7, 16-8, 15$$

ottenibile dal precedente colla sostituzione a ciclo unico:

$$(2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3),$$

e dal quale, ripetendo l'operazione, si ottengono successivamente altri 13 aggruppamenti (in tutto 15) soddisfacenti alle condizioni volute.

Similmente, per ogni valore di $n = 2^m$, disponendo i numeri da 1 a n a coppie nell'ordine naturale, e operando nel modo già indicato (come da 12-34 a 14-23) sulle coppie 1^a e $\left(\frac{n}{4} + 1\right)^{sima}$, 2^a e $\left(\frac{n}{4} + 2\right)^{sima}$, ecc., si ha il nuovo aggruppamento:

$$(1, 2^{m-1} + 2) - (2, 2^{m-1} + 1) - (3, 2^{m-1} + 4) - (4, 2^{m-1} + 3) - (5, 2^{m-1} + 6) - \dots$$

dal quale, ripetendo l'operazione, si hanno gli altri occorrenti $n - 3$ aggruppamenti di $\frac{n}{2} = 2^{m-1}$ coppie (in tutto perciò $n - 1$ aggruppamenti). Se ora ai numeri 1, 2, 3, ..., n (nell'ordine naturale) come primi elementi facciamo seguire, in qualità di secondi elementi, i numeri stessi nell'ordine risultante da questi $n - 1$ aggruppamenti (il primo dei quali è ancora 12-34-56-...), e cioè:

$$11 - 22 - 33 - 44 - 55 \dots$$

$$11-2 \cdot (2^{m-1} + 2) - 3-2-4 \cdot (2^{m-1} + 1) - 53 - \dots$$

$$\dots\dots\dots$$

avremo i punti ih di una prima nuova retta uscente rispettivamente da A_2, A_3, \dots, A_n . Le altre rette passanti per ciascuno di questi punti si otterranno scambiando i secondi elementi come appresso:

scambiando anzitutto i secondi elementi del 1° e 2° punto, del 3° e 4° ecc., fino ai due ultimi;

scambiando i secondi elementi della 1ª e 2ª coppia di punti, della 3ª e 4ª coppia, ecc., fino alle ultime due coppie:

scambiando i secondi elementi della 1ª e 2ª quaderna di punti, della 3ª e 4ª quaderna, ecc.;

e così via coi gruppi di $8, 16, \dots, 2^{m-1}$ punti consecutivi, nonchè combinando questi scambi fra loro, il che conduce appunto complessivamente a $2^m = n$ rette per ciascuno dei punti A_2, A_3, \dots, A_n .

6. Con procedimento analogo si possono costruire anche gli altri sistemi $S(n^2 + n + 1 \mid 2 \mid n + 1)$ per $n = p^m$ (p primo). Lo indichiamo ancora per il caso più semplice di $p > 2$, vale a dire $p = 3, m = 2, n = 9$, cioè pel piano $S(91 \mid 2 \mid 10)^{(1)}$.

Una prima retta contenga 10 punti, che indicheremo con $A_0, A_1, A_2, \dots, A_9$. Per ciascuno dei punti A_0 ed A_1 ad esempio passeranno altre 9 rette, che indicheremo rispettivamente, sia le une che le altre, coi numeri $1, 2, 3, \dots, 9$. Gli ulteriori 81 punti del sistema risulteranno dalle mutue intersezioni di questi 2 gruppi di 9 rette, e potranno ancora designarsi coi simboli ih ($i, h \geq 1, \leq 9$), dove la prima e seconda cifra indicano la retta che congiunge questo punto a A_0 e A_1 .

Come prima le rette uscenti da questi punti si distribuivano in coppie, ora le distribuiremo in terne; quelle uscenti da A_0 ad esempio nelle terne fisse (123) (456) (789); quelle uscenti da A_1 nei 4 aggruppamenti di terne:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (123) \quad (456) \quad (789) \\ (147) \quad (825) \quad (693) \\ (186) \quad (942) \quad (537) \\ (195) \quad (384) \quad (276) \end{array} \right.$$

ottenuti ciascuno dal precedente, e anche il primo dell'ultimo (a prescindere dall'ordine delle terne stesse e da quello dei singoli elementi entro di esse), colla sostituzione circolare (24893765) sui numeri da 2 a 9. Inoltre ciascuna delle $\binom{9}{2} = 36$ coppie di numeri (da 1 a 9) figura in una e una sola delle 12 terne.

Assumiamo ora contenuti in una prima nuova retta passante per A_2 i 9 punti:

$$(5) \quad 11 \quad 22 \quad 33 \quad 44 \quad 55 \quad 66 \quad 77 \quad 88 \quad 99$$

(1) I piani qui considerati sono tutti « desarguesiani », potendosi la costruzione estendere facilmente a spazi contenenti tali piani.

e così ancora in altre rette pure passanti per A_2 i punti che si ottengono dai precedenti tenendo fermi i primi elementi e permutando circolarmente i secondi elementi, entro la prima, seconda e terza terna di punti:

12 23 31 45 56 64 78 89 97
13 21 32 46 54 65 79 87 98;

come pure permutando circolarmente fra loro le tre terne, e di nuovo i secondi elementi entro ciascuna terna:

14 25 36 47 58 69 71 82 93
15 26 34 48 59 67 72 83 91
16 24 35 49 57 68 73 81 92
17 28 39 41 52 63 74 85 96
18 29 37 42 53 61 75 86 94
19 27 38 43 51 62 76 84 95.

Le rette uscenti dal punto A_3 sono la:

11 23 32 47 59 68 74 86 95

(contenente gli elementi principali della matrice complessiva delle 9 rette per A_2), e le altre ottenute da questa operando come si è fatto sulla (5) per avere le rimanenti rette per A_2 .

Infine le rette uscenti dalle ulteriori coppie di punti A_4 e A_5 , A_6 e A_7 , A_8 e A_9 si ottengono dalle precedenti tenendo fermo per ogni punto il primo dei due elementi, e sostituendo nei secondi elementi alla ripartizione in terne (123) (456) (789) le altre tre del quadro (4), ossia applicando ai detti secondi elementi la sostituzione circolare (24893765).

Ai quadrangoli che s'incontravano per $p = 2$ vengono sostituite delle configurazioni di 9 punti, intersezioni di 3 rette passanti per A_0 con 3 passanti per A_1 , analoghe in certo modo a quella dei flessi di una cubica piana, in quanto ogni retta congiungente due di questi 9 punti ne contiene anche un terzo. Per ognuno di questi gruppi di 9 punti si trovano così 6 nuove rette (oltre le 6 precedenti per A_0 e A_1). Intersecando le terne (123) (456) (789) uscenti da A_0 con uno qualsiasi degli aggruppamenti (4) uscenti da A_1 , si hanno 9 configurazioni di 9 punti, perciò $6 \cdot 9 = 54$ di queste nuove rette, a tre a tre coincidenti, e che si riducono perciò a 18 distinte: sono queste le rette del piano passanti per A_2 e A_3 , oppure per A_4 e A_5 , ecc.

Elettrochimica. — *Formazione di pseudo cristalli-unicì nella elettrodeposizione del rame* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del Corrisp. O. SCARPA.

In alcuni trattati di elettrochimica ⁽³⁾ sono riportate delle tabelle dalle quali si dovrebbe dedurre come cambia la struttura del rame elettrolitico con il cambiare delle condizioni dell'elettrolisi. Le escrescenze catodiche, che talvolta si osservano, sono indicate come *cristalli unici*. Ma che si tratti di veri cristalli unici manca qualsiasi prova.



Fig. 1.

In una Nota precedente ⁽⁴⁾ ho descritto alcune speciali forme di escrescenze catodiche di tipo arborescente e di tipo filiforme, che ho osservato studiando i fenomeni che accompagnano la raffinazione elettrolitica del rame,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica del R. Politecnico di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 7 settembre 1937.

(3) ENGELHARDT, *Handbuch der techn. Elektroch.*, vol. 1°, 2ª parte, p. 71.

(4) Questi « Rendiconti », giugno, 1937.

Queste ultime avevano apparenze tali da far dubitare fossero cristalli unici, ma lo studio eseguito con i raggi X⁽¹⁾ mostrò che tali non erano.

Un tipo di escrescenze differente dai precedenti e da quelli finora descritti, mi si è presentato durante alcune prove di elettrolisi con anodi di rame fortemente impuro per solfo. Il deposito catodico, ottenuto con densità di corrente dell'ordine di 100 Amp. m², alla temperatura di 30° c., usando come elettrolita una soluzione di solfato di rame col titolo 6 % in rame, fortemente acidificata con acido solforico, assunse la forma di un groviglio di aghi, ben visibili nella fig. 1 (ingrandimento tre volte). Il deposito del rame è stato prodotto su lastra (di rame) che nella figura appare di traverso.

All'osservazione diretta ogni ago sembra costituito da un cristallo unico sovente geminato (fig. 2, ingrandimento dieci) ma l'esame dello spettro Debye-Scherrer mostra invece che ogni ago è costituito da un aggregato

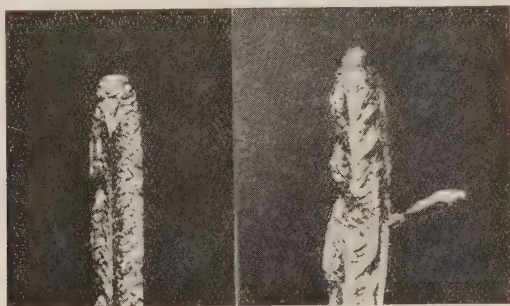


Fig. 2.

di cristallini di rame ai quali (contrariamente a quanto avviene per i filamenti descritti nella Nota precedente) compete un grado di orientamento molto notevole.

Nella fig. 3 sono riprodotti gli spettri Debye-Scherrer: *A*, di uno dei detti filamenti di rame elettrolitico, costituiti da un insieme di microcristalli senza orientazione preferenziale (spettro superiore); *B*, di un filo di rame ottenuto con trafilatura a freddo e successiva ricottura (spettro intermedio); *C*, di uno degli aghetti sopradescritti (spettro inferiore).

Il titolo medio in rame di questi aghetti è risultato (analizzando circa un grammo di prodotto) 99.91 mentre una analisi singola (epperò meno precisa in causa della piccola quantità di materiale trattato) aveva condotto al titolo 99.97⁽²⁾. Fra le impurità riscontrate è notevole la presenza di arsenico.

(1) Ringrazio anche pubblicamente il dott. ing. Vincenzo Montoro che esegui le prove con i raggi X, nonchè le fotografie riportate in questa e nella precedente Nota.

(2) Le analisi chimiche furono eseguite con la consueta cura dal dott. R. Sandrinelli.

Per quanto riguarda le condizioni dell'elettrolita che ha dato questo singolare deposito, ricordo che, come già per i depositi filiformi di cui ho dato relazione nella Nota precedente, esse sono caratterizzate da assenza pressochè totale di ioni di cloro e assenza di sostanze di addizione.

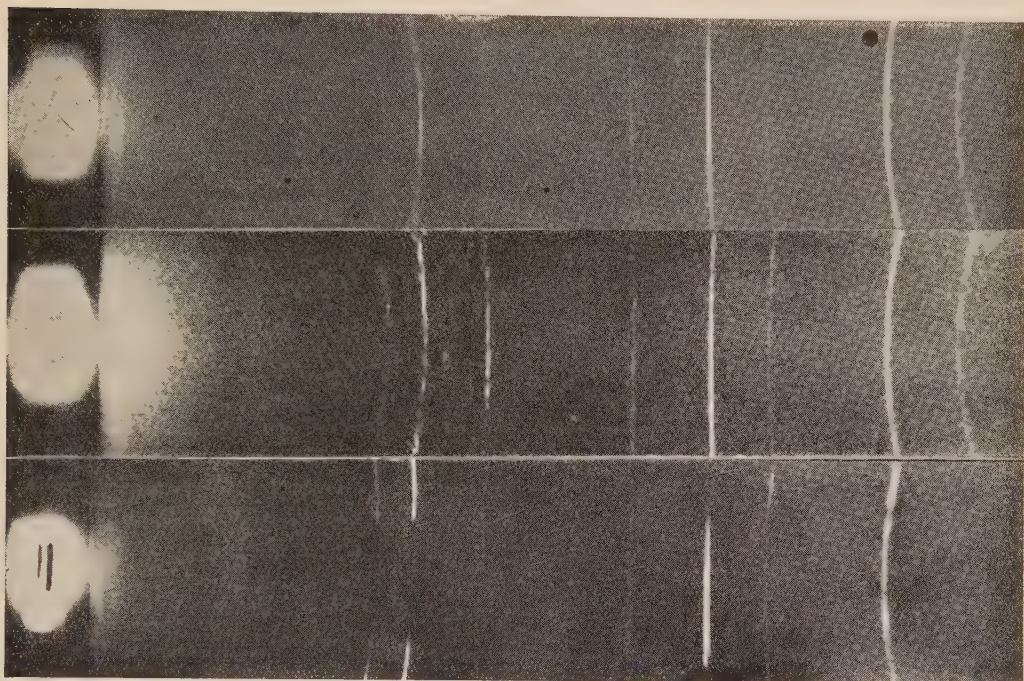


Fig. 3.

È interessante notare che depositi galvanici aghiformi, di apparenza simili agli attuali, furono da me osservati adoperando anodi di stagno impuro e, come elettroliti, soluzioni di solfuri alcalini. Di questi depositi di stagno ho dato notizia in una Nota recentemente pubblicata sulla « Metallurgia Italiana » (1).

(1) « La Metallurgia Italiana », XXIX, agosto 1937.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Risoluzione mediante integrali definiti dell'equazione differenziale* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = f$, e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico. Nota I⁽¹⁾ di C. AGOSTINELLI, presentata dal Socio G. FUBINI.

1. Volendo determinare mediante integrali definiti la soluzione u dell'equazione differenziale

$$(1) \quad F(u) \equiv \Delta_2 u + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y, z) \quad ; \quad \left(\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right),$$

la cui importanza è manifesta per la teoria del potenziale, soluzione regolare in un dominio finito D , e che sul contorno Σ di D , assuma colla sua derivata normale, valori assegnati, ricordiamo intanto che, nel caso più generale di un'equazione differenziale di tipo ellittico della forma

$$(2) \quad F(u) \equiv \Delta_2 u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} = f,$$

ove a, b, c, f sono funzioni note di x, y, z , ed essendo

$$(3) \quad G(v) \equiv \Delta_2 v - \frac{\partial}{\partial x}(av) - \frac{\partial}{\partial y}(bv) - \frac{\partial}{\partial z}(cv) = 0,$$

l'equazione aggiunta della (2), indicando con D un campo chiuso finito, limitato da una superficie Σ , nel quale le funzioni u, v siano regolari, e continue colle loro derivate prime parziali sopra Σ , si ha l'equazione fondamentale

$$(4) \quad \iiint_D [vF(u) - uG(v)] dx dy dz + \\ + \iint_{\Sigma} \left[v \frac{du}{dn} - u \frac{dv}{dn} + (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) uv \right] d\sigma = 0,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 agosto 1937.

ove n è la normale interna a Σ , ed α, β, γ gli angoli che n forma colle direzioni positive degli assi x, y, z .

2. Ciò premesso, nel caso che qui vogliamo considerare, l'equazione aggiunta della (1) risulta

$$(5) \quad G(v) \equiv \Delta_2 v - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{x} \right) = 0,$$

e la formula fondamentale (4) diventa

$$(6) \quad \iint_{\Sigma} \left[v \frac{du}{dn} - u \frac{dv}{dn} + \frac{uv}{x} \cos \alpha \right] d\sigma + \iiint_D v f dx dy dz = 0.$$

Per risolvere ora il problema proposto occorrerà determinare una soluzione dell'equazione aggiunta (5) con una singolarità in un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, interno a D , una soluzione cioè della forma

$$(7) \quad v = V / \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

ove V è regolare entro D .

Per ottenere una soluzione della (5), del tipo indicato, osserviamo intanto che se la funzione u è soluzione dell'equazione $F(u) = 0$, ove $F(u)$ è il primo membro dell'equazione (1), risulta $v = xu$ soluzione dell'equazione aggiunta (5).

Infatti si può scrivere

$$F(u) = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$G(v) = x \left\{ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{x} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{v}{x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{v}{x} \right) \right\},$$

e il confronto di queste due dimostra l'asserto.

Dico ora che è soluzione della $F(u) = 0$, la

$$(8) \quad u = \frac{1}{\lambda \mu},$$

con

$$(9) \quad \lambda = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2};$$

$$\mu = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Infatti in questo caso si ha:

$$(10) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x+x_0}{\lambda^3 \mu} - \frac{x-x_0}{\lambda \mu^3} = -\frac{x(\lambda^2 + \mu^2 - 4x_0^2)}{\lambda^3 \mu^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{\lambda^3 \mu} + \frac{3(x+x_0)^2}{\lambda^5 \mu} - \frac{1}{\lambda \mu^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{\lambda \mu^5} + \frac{2(x^2-x_0^2)}{\lambda^3 \mu^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\lambda^3 \mu} + \frac{3(y-y_0)^2}{\lambda^5 \mu} - \frac{1}{\lambda \mu^3} + \frac{3(y-y_0)^2}{\lambda \mu^5} + \frac{2(y-y_0)^2}{\lambda^3 \mu^3},$$

ed una relazione analoga per $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Da queste ultime si deduce

$$\Delta_2 u = 2 \frac{x^2 - x_0^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{\lambda^3 \mu^3} = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - 4x_0^2}{\lambda^3 \mu^3},$$

cioè, confrontando colla (10), risulta

$$\Delta_2 u = -\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x},$$

che è proprio l'equazione $F(u) = 0$.

Per quanto si è dimostrato è soluzione dell'equazione aggiunta (5) la

$$(11) \quad v = \frac{x}{\lambda \mu},$$

la quale è del tipo (7), con la singolarità richiesta nel punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, interno al campo D, mentre si suppone che il punto $P'_0(-x_0, y_0, z_0)$, nel quale si annulla λ , sia esterno al campo D.

3. Per il valore (11) di v , singolare nel punto P_0 del campo D, l'equazione fondamentale (6) non è più applicabile. Escludendo però il punto P_0 con una sferetta S di centro P_0 e raggio molto piccolo, essa è applicabile al campo D' limitato da Σ e da S. Facendo quindi tendere a zero il raggio di S e osservando che

$$\lim_{S \rightarrow P_0} \iint_S \left(v \frac{du}{dn} + \frac{uv}{x} \cos \alpha \right) d\sigma = \lim_{\mu \rightarrow 0} \iint_S \left(\frac{x}{\lambda} \frac{du}{dn} + \frac{u \cos \alpha}{\lambda} \right) \cdot \frac{d\sigma}{\mu} = 0,$$

e che

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow P_0} \iint_S u \frac{dv}{dn} d\sigma &= \lim_{S \rightarrow P_0} \iint_S u \frac{d}{dn} \left(\frac{x}{\lambda \mu} \right) \cdot d\sigma = \lim_{S \rightarrow P_0} \iint_S u \frac{d}{d\mu} \left(\frac{x}{\lambda \mu} \right) d\sigma = \\ &= -\lim_{S \rightarrow P_0} \iint_S \frac{ux}{\lambda} \cdot \frac{d\sigma}{\mu^2} = -4\pi \cdot \lim_{P \rightarrow P_0} \left(\frac{ux}{\lambda} \right) = -2\pi \cdot u(x_0, y_0, z_0), \end{aligned}$$

la (6) porge

$$(12) \quad u(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \iint_{\Sigma} \left[\frac{x}{\lambda\mu} \frac{du}{dn} - u \frac{d}{dn} \left(\frac{x}{\lambda\mu} \right) + \frac{u}{\lambda\mu} \cos \alpha \right] d\sigma + \right. \\ \left. + \int \int \int_D \frac{x}{\lambda\mu} f dx dy dz \right\},$$

che è l'integrale richiesto dell'equazione differenziale (1), regolare entro il campo finito D, situato in uno dei due semispazi individuati dal piano $x = 0$, e che assume, colla sua derivata normale, valori assegnati sulla faccia interna della superficie Σ che limita il campo D.

4. La formula fondamentale (6) ci permetterà ancora di risolvere, per l'equazione differenziale (1), il problema analogo a quello di Dirichlet, se l'integrale $v(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$, dell'equazione aggiunta (5), è nullo sulla superficie Σ . Basterà a tal fine determinare un integrale $\varphi(x, y, z)$, della (5), regolare entro D, e tale che

$$\varphi = -\frac{x}{\lambda\mu}, \quad \text{sopra } \Sigma.$$

Ponendo allora

$$v = \frac{x}{\lambda\mu} + \varphi,$$

la funzione v soddisfa alle condizioni richieste, e dalla (6), nello stesso modo con cui si è ottenuta la (12), si deduce

$$(13) \quad u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \iint_{\Sigma} u \frac{d}{dn} \left(\frac{x}{\lambda\mu} + \varphi \right) \cdot d\sigma - \int \int \int_D \left(\frac{x}{\lambda\mu} + \varphi \right) f dx dy dz \right\},$$

ove la funzione φ ha l'ufficio analogo della *funzione di Green* nell'ordinaria teoria del potenziale.

5. La funzione φ è facilmente determinabile nel caso il cui il campo D è un emisfero E di raggio R, con centro nell'origine O degli assi x, y, z e situato in uno dei due semispazi per cui è $x \geq 0$, oppure $x \leq 0$.

Essendo P(x, y, z) un punto variabile nell'emisfero dato E; $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto fisso interno ad E, e $P_1(x_1, y_1, z_1)$ l'immagine di P_0 rispetto all'emisfero dato E, mentre $P'_0(-x_0, y_0, z_0)$ è il simmetrico di P_0 rispetto al piano y, z , e $P'_1(-x_1, y_1, z_1)$ la sua immagine rispetto all'emisfero simmetrico di E, si ha

$$x_1 = x_0 R^2 / \rho_0^2; \quad y_1 = y_0 R^2 / \rho_0^2; \quad z_1 = z_0 R^2 / \rho_0^2; \quad (\rho_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2);$$

e posto

$$\lambda_1 = \sqrt{(x + x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2};$$

$$\mu_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

risulta evidentemente

$$\overline{PP_0} = \mu \quad ; \quad \overline{PP'_0} = \lambda \quad ; \quad \overline{PP_1} = \mu_1 \quad ; \quad \overline{PP'_1} = \lambda_1,$$

D'altra parte sulla superficie sferica a cui appartiene l'emisfero E, per note proprietà, si ha

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{\mu}{\mu_1} = \frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1} \quad ; \quad (\rho_1 = OP_1 = OP'_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}).$$

Dimodochè sulla superficie emisferica Σ che limita il campo E risulta

$$\frac{1}{\lambda\mu} = \frac{1}{\lambda_1\mu_1} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda} \cdot \frac{\mu_1}{\mu} = \frac{1}{\lambda_1\mu_1} \cdot \frac{R^2}{\rho_0^2},$$

ove R^2/ρ_0^2 , per una data posizione del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, è una quantità costante. Ponendo allora

$$\varphi = - \frac{x}{\lambda_1\mu_1} \cdot \frac{R^2}{\rho_0^2},$$

questa funzione soddisfa, come la (11), all'equazione aggiunta (5), è regolare entro l'emisfero E, ed acquista sulla superficie emisferica Σ valore uguale e di segno contrario ad $\frac{x}{\lambda\mu}$. Inoltre essa si annulla, al pari di $\frac{x}{\lambda\mu}$, sul cerchio equatoriale Γ appartenente al piano $x=0$, e che limita l'emisfero E.

Si conclude che la soluzione richiesta dell'equazione (5) che si annulla su tutto il contorno del campo emisferico E risulta

$$(14) \quad v = \frac{x}{\lambda\mu} - \frac{R^2}{\rho_0^2} \frac{x}{\lambda_1\mu_1},$$

e la (13) porge pertanto

$$(15) \quad u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \iint_{\Sigma + \Gamma} u \frac{d}{dn} \left(\frac{x}{\lambda\mu} - \frac{R^2}{\rho_0^2} \frac{x}{\lambda_1\mu_1} \right) \cdot d\sigma - \right. \\ \left. - \iiint_E \left(\frac{x}{\lambda\mu} - \frac{R^2}{\rho_0^2} \frac{x}{\lambda_1\mu_1} \right) f dx dy dz \right\},$$

che risolve il problema di Dirichlet, relativo al campo emisferico E, per l'equazione differenziale (1).

6. È opportuno rilevare che se si considera il campo completo D occupato dalla sfera di centro O e raggio R, allora la funzione v definita dalla (14) è singolare nei punti $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P'_0(-x_0, y_0, z_0)$, entrambi interni a D, annullandosi rispettivamente in essi μ e λ .

Se si applica ancora in tal caso la formula fondamentale (6), escludendo i punti singolari P_0 e P'_0 con due sferette S e S' aventi i centri in quei punti e di raggi molto piccoli, passando quindi al limite quando quei raggi tendono a zero, si ottiene

$$u(x_0, y_0, z_0) + u(-x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \iint_{\Sigma} u \frac{d}{dn} \left(\frac{x}{\lambda\mu} - \frac{R^2}{\rho_0^2} \frac{x}{\lambda_1\mu_1} \right) d\sigma - \right. \\ \left. - \iiint_D \left(\frac{x}{\lambda\mu} - \frac{R^2}{\rho_0^2} \frac{x}{\lambda_1\mu_1} \right) f dx dy dz \right\},$$

ove Σ sta ora ad indicare la superficie sferica completa.

Se in particolare i valori assegnati della funzione u sopra la superficie sferica Σ sono eguali in punti simmetrici rispetto al piano $x=0$, e tale è anche la funzione f in tutto il campo D occupato dalla sfera, allora risulta $u(x_0, y_0, z_0) = u(-x_0, y_0, z_0)$, e la relazione precedente risolve in tal caso il problema di Dirichlet per la sfera, relativamente all'equazione differenziale (1).

Matematica (Geometria algebrica). — *Gruppi Cayleyani di punti sopra una curva ellittica*. Nota⁽¹⁾ di G. GHERARDELLI, presentata dal Corrisp. G. FANO.

1. Si consideri sopra una curva ellittica γ una serie lineare g_n^{n-2} ($n > 1$); per il gruppo J dei punti $(n-1)$ -pli della serie ha luogo la nota equivalenza:

$$J \equiv (n-1)G$$

dove G è un gruppo di g . Se G fa parte di J si dirà che G è un gruppo « Cayleyano » di γ . In altre parole: un gruppo G di n punti sopra una curva ellittica dicesi « Cayleyano » se nella serie completa $|G|$ esiste una g_n^{n-2} per la quale i punti di G sono $(n-1)$ -pli. Per un gruppo di punti sopra una curva ellittica la proprietà di essere Cayleyano è manifestamente invariante per trasformazioni birazionali. È facile provare l'esistenza di gruppi Cayleyani per ogni valore di n . Intanto ogni coppia di punti di γ è Cayleyana per la stessa definizione. Per $n > 2$ si assuma su γ una g_n^{n-1} e si associ un suo gruppo variabile ad un gruppo variabile della serie $(n-2)g$ multipla di g secondo $n-2$; i gruppi equivalenti così ottenuti formano una serie γ di dimensione $(n-1) + n(n-2) - 1 = n^2 - n - 2$; d'altra parte i gruppi J delle g_n^{n-2} estratte dalla g_n^{n-1} formano una $g_{n(n-1)}^{n-1}$ contenuta, come γ , nella serie lineare completa $(n-1)g$ di dimensione $n(n-1) - 1$: γ e $g_{n(n-1)}^{n-1}$ hanno pertanto ∞^{n-2} gruppi comuni, ciascuno dei quali contiene un G_n Cayleyano.

Rimandando ad altro lavoro lo studio del caso generale ci limitiamo qui a considerare le terne Cayleyane.

2. Se $a_1 a_2 a_3$ è una terna Cayleyana e se $a_1 \equiv a_2$ necessariamente $a_1 \equiv a_2 \equiv a_3$. Infatti per la g_3^1 che ha in $a_1 a_2 a_3$ punti doppi, il punto a_1 è fisso o triplo per un gruppo. Nel primo caso $a_1 + 2a_3 \equiv 2a_1 + a_3$, nel secondo $3a_1 \equiv 2a_1 + a_3$; in ogni caso $a_3 \equiv a_1$: a_3 coincide con a_1 .

D'altra parte tre punti consecutivi qualunque di γ formano terna Cayleyana: basta considerare entro la g_3^2 completa $|3a_1|$ la g_3^1 che ha punto fisso in a_1 ; dei suoi 6 punti doppi 3 coincidono in a_1 .

3. Siano ora $a_1 a_2 a_3$ tre punti distinti di γ e indichiamo con le stesse lettere $a_1 a_2 a_3$ i valori che l'integrale ellittico di prima specie u assume

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 agosto 1937.

nei tre punti, a meno di multipli dei due periodi. La g_3^2 completa $|a_1 a_2 a_3|$ è rappresentata dall'equazione:

$$\lambda_1 \zeta(u - a_1) + \lambda_2 \zeta(u - a_2) + \lambda_3 \zeta(u - a_3) = \lambda$$

dove λ è una costante arbitraria; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son costanti legate dalla $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ ma del resto arbitrarie e ζ è la nota funzione di Weierstrass. I gruppi della g_3^2 aventi punto doppio in $a_1 a_2 a_3$ si ottengono in corrispondenza ai valori:

$$\begin{array}{llll} \lambda_1 = 0 & \lambda_2 = 1 & \lambda_3 = -1 & \lambda = \zeta(a_1 - a_2) + \zeta(a_3 - a_1) \\ \lambda_1 = -1 & \lambda_2 = 0 & \lambda_3 = 1 & \lambda = \zeta(a_2 - a_3) + \zeta(a_1 - a_2) \\ \lambda_1 = 1 & \lambda_2 = -1 & \lambda_3 = 0 & \lambda = \zeta(a_3 - a_1) + \zeta(a_2 - a_3). \end{array}$$

Se la terna $a_1 a_2 a_3$ è Cayleyana i tre gruppi son legati linearmente e viceversa. Per questo occorre e basta che:

$$\zeta(a_2 - a_3) + \zeta(a_3 - a_1) + \zeta(a_1 - a_2) = 0.$$

E poichè:

$$\begin{aligned} [\zeta(a_2 - a_3) + \zeta(a_3 - a_1) + \zeta(a_1 - a_2)]^2 &= p(a_2 - a_3) + p(a_3 - a_1) + \\ &+ p(a_1 - a_2) = \frac{1}{4} \left[\frac{p'(a_2 - a_3) - p'(a_3 - a_1)}{p(a_2 - a_3) - p(a_3 - a_1)} \right]^2 = \dots \end{aligned}$$

si conclude: affinchè tre punti distinti $a_1 a_2 a_3$ di γ formino terna Cayleyana occorre e basta il verificarsi di una delle condizioni seguenti:

$$\zeta(a_2 - a_3) + \zeta(a_3 - a_1) + \zeta(a_1 - a_2) = 0$$

$$p(a_2 - a_3) + p(a_3 - a_1) + p(a_1 - a_2) = 0$$

$$p'(a_2 - a_3) = p'(a_3 - a_1) = p'(a_1 - a_2).$$

4. Su una cubica piana ellittica tre punti allineati $a_1 a_2 a_3$ formano terna Cayleyana se le tangenti in $a_1 a_2 a_3$ alla cubica stessa formano fascio; se cioè la retta $a_1 a_2 a_3$ è una tangente della curva Cayleyana della cubica. Di qui la denominazione di Cayleyana data alla terna stessa. Se:

$$\sum a_{ijk} x_i x_j x_k = 0$$

è l'equazione della C^3 e x_i, y_i, z_i son le coordinate di a_1, a_2, a_3 si ha ⁽¹⁾:

$$k [x y z] = (x y z) [\zeta(a_2 - a_3) + \zeta(a_3 - a_1) + \zeta(a_1 - a_2)] \quad (k \text{ cost.})$$

$$\text{dove } [x y z] = \sum a_{ijk} x_i y_j z_k \quad \text{e} \quad (x y z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

(1) HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, vol. 2°, p. 428. Paris, Gauthier-Villars, 1888. Qui $a_1 a_2 a_3$ son tre punti qualunque di C^3 .

Se $[xyz] = 0$ la terna $a_1 a_2 a_3$ è coniugata rispetto alla C^3 : ciascuno dei tre punti a_i sta sulla polare lineare mista degli altri due. E pertanto: i punti di una terna coniugata o sono allineati ovvero formano terna Cayleyana. I due fatti si verificano insieme per le terne segate su C^3 dalle tangenti della relativa curva Cayleyana.

5. Notiamo infine una proprietà caratteristica delle terne Cayleyane.

Sieno $a_1 a_2 a_3$ tre punti distinti di una curva ellittica. La somma σ delle trasformazioni birazionali di prima specie relative alle tre $g_2^1 | a_2 a_3 |$, $| a_3 a_1 |$, $| a_1 a_2 |$ è una corrispondenza simmetrica $(3, 3)$ a valenza 3 la cui dimensione è in generale eguale a 5; la dimensione di σ , certo dispari⁽¹⁾, si abbassa al valore 3 allora e allora soltanto che la terna $a_1 a_2 a_3$ è Cayleyana.

Per la dimostrazione possiamo riferirci alla cubica piana:

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3 \lambda x_1 x_2 x_3 = 0$$

e a tre suoi punti $a_1 a_2 a_3$ posti su una retta:

$$(\xi x) = 0.$$

Se x, y son due punti omologhi in σ l'intersezione delle rette xy e ξ appartiene alla cubica e viceversa. Questa intersezione ha le coordinate $(\xi y) x_i - (\xi x) y_i$; scrivendo che queste soddisfano alla $f = 0$ si ottiene come equazione di σ :

$$(1) \quad (\xi y) \Delta_y f(x) - (\xi x) \Delta_x f(y) = 0$$

dove Δ è il simbolo di polarizzazione. La (1) si scrive per disteso:

$$\begin{aligned} & [\lambda \xi_1 y_2 y_3 + \xi_3 y_3 y_1 + \xi_2 y_1 y_2] x_1^2 + [\xi_3 y_2 y_3 + \lambda \xi_2 y_3 y_1 + \xi_1 y_1 y_2] x_2^2 + \\ & + [\xi_2 y_2 y_3 + \xi_1 y_3 y_1 + \lambda \xi_3 y_1 y_2] x_3^2 - [\lambda \xi_1 y_1^2 + \xi_3 y_2^2 + \xi_2 y_3^2] x_2 x_3 - \\ & - [\xi_3 y_1^2 + \lambda \xi_2 y_2^2 + \xi_3 y_3^2] x_3 x_1 - [\xi_2 y_1^2 + \xi_1 y_2^2 + \lambda \xi_3 y_3^2] x_1 x_2 = \\ & = \sum a_{ik}(y) x_i x_k = - \sum a_{ik}(x) y_i y_k = 0. \end{aligned}$$

La dimensione della corrispondenza σ è la dimensione del sistema lineare congiungente i due sistemi lineari

$$\begin{aligned} \alpha_{11} a_{11} + \alpha_{22} a_{22} + \alpha_{33} a_{33} &= 0 \\ \alpha_{23} a_{23} + \alpha_{31} a_{31} + \alpha_{12} a_{12} &= 0 \end{aligned} \quad (\alpha_{ik} \text{ parametri})$$

(1) Vedi una mia breve Nota nel « Bollettino dell'U. M. I. » del giugno 1937.

che sono insieme o reti o fasci secondochè il determinante

$$C = \begin{vmatrix} \lambda \xi_1 & \xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & \lambda \xi_2 & \xi_1 \\ \xi_2 & \xi_1 & \lambda \xi_3 \end{vmatrix} = \lambda (\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3) - (\lambda^3 + 2) \xi_1 \xi_2 \xi_3$$

è non nullo o nullo. Nel 1° caso la dimensione di σ è 5, nel 2° caso 3.

Ora l'annullarsi di C esprime che la retta ξ è una tangente della curva Cayleyana di f , ovvero che la terna $a_1 a_2 a_3$ è Cayleyana; come si era asserito ⁽¹⁾.

Matematica. — *Geometria proiettivo-differenziale delle singolarità: Il punto di flesso di una superficie qualunque.* Nota ⁽²⁾ di I. POPA, presentata dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. Il punto O di una superficie Σ , con ben determinato piano tangente, nel quale ogni sezione piana — ad eccezione di quella prodotta dal piano tangente — sia inflessionale è un *punto di flesso* della superficie. In un tal punto, il piano tangente incontra la superficie lungo una curva avente in O un punto (almeno) triplo e, per conseguenza, le linee asintotiche sono indeterminate.

Lo studio di tale singolarità può esser concepito in due maniere completamente diverse. Una consisterebbe nello studio delle soluzioni di una equazione differenziale di primo ordine (e di secondo grado) nelle vicinanze di un punto singolare essenziale. Questo punto di vista è stato adoperato prima da Turnbull e, recentemente, da Th. Downs jr. Un'altra, che mi propongo di seguire, consiste nella costruzione di un riferimento proiettivamente collegato a certi intorni di O su Σ . Questa tendenza di trattare unitariamente — in quanto questo sia possibile — tanto le vicinanze regolari quanto quelle singolari, ha le origini in una piccola ma suggestiva Nota del prof. Bompiani.

Dobbiamo ricordare che questa singolarità è stata considerata, per la prima volta — nel caso particolare delle superficie cubiche e dal punto di vista della geometria algebrica — da Eckardt, che ha studiato assai ampiamente le superficie cubiche possedenti uno o più punti di flesso. La ricerca è stata ripresa da De Paolis e, poi, dal prof. Ciani le cui Note Lincee hanno

(1) La considerazione delle terne Cayleyane si presenta utile nello studio delle C_6 sghembe ellittiche di complesso lineare, come si vedrà in un prossimo lavoro.

(2) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1937.

suscitato alcuni lavori di Godeaux e Bertrand Gambier. Su proposta del prof. Ciani, tali punti sono stati chiamati « punti di Eckardt ».

2. Prima di passare allo studio del punto di flesso di una superficie, occorre ricordare alcuni risultati dovuti al prof. Bompiani⁽¹⁾ a proposito del punto di flesso di una curva piana. L'intorno di second'ordine del punto di flesso O di Γ è, evidentemente, rappresentato dalla tangente inflessionale. Per lo studio degli intorni superiori si può ricorrere alle cubiche cuspidate Γ^3 aventi il medesimo flesso di Γ . L'intorno di terz'ordine di O su Γ è rappresentato da un (primo) *punto principale* situato sulla tangente inflessionale (per il quale passano le tangenti cuspidali delle ∞^2 cubiche Γ^3 avente con Γ un contatto di terz'ordine). Quello di quart'ordine è rappresentato da una *retta principale* passante per O (la quale è il luogo dei punti cuspidali delle ∞^1 cubiche Γ^3 aventi con Γ contatto di quart'ordine). In fine, l'intorno di quint'ordine è rappresentato da un (*secondo*) *punto principale* situato sulla retta principale (il quale è la cuspide della cubica osculatrice Γ^3).

3. Consideriamo il caso generale nel quale il piano tangente (che prendiamo come una faccia, $z = 0$, del riferimento) sega la superficie Σ secondo una curva a punto triplo con tangenti distinte. Prendiamo come spigoli $x = z = 0$, $y = z = 0$ del riferimento, la coppia apolare alla terna delle dette tangenti. Con queste e con un'eventuale cambiamento, inessenziale, del tipo $x' = \alpha x$, $y' = \beta y$, Σ avrà uno sviluppo:

$$(1) \quad z = x^3 + y^3 + \varphi_4(x, y) + \dots,$$

dove $\varphi_n(x, y)$ rappresenta un polinomio omogeneo in x e y di grado n . Si può stabilire assai facilmente che tutte le sezioni piane per una tangente determinata, $y - \lambda x = z = 0$ ($\lambda^3 + 1 \neq 0$), hanno lo stesso (primo) punto principale, il luogo del quale, al variare della tangente, è la quartica razionale

$$(2) \quad \varphi_4(x, y) - 2(x^3 + y^3) = 0.$$

In particolare, sugli assi $x = z = 0$, $y = z = 0$ risultano determinati O'_1, O''_1 — i punti principali delle sezioni piane passante per essi. Abbiamo, in questa maniera, un triangolo di riferimento $OO'_1O''_1$ nel piano tangente $z = 0$, rispetto al quale $\varphi_4(x, y)$ riesce ridotto alla forma

$$\varphi_4(xy) = axy(y - \omega_1 x)(y - \omega_2 x)$$

(1) E. BOMPIANI, *Per lo studio proiettivo differenziale delle singolarità*. « Bollettino Unione Matematica Italiana », V, 1926. La bibliografia dell'argomento sarà esposta in un lavoro più ampio.

dove ω_1, ω_2 sono i due invarianti assoluti di φ_4 rispetto alle omografie che conservano la forma cubica $x^3 + y^3, (\zeta = 0)$. Le rette $y - \omega_i x = \zeta = 0$; $i = 1, 2$ passano per le ulteriori intersezioni della retta $O'_1 O''_1$ con la quartica (2) e, quindi, ω_1, ω_2 possono esser espressi come dei birapporti delle quaterne composte dalla terna $x^3 + y^3 = \zeta = 0$ e da ciascuna delle ultime rette.

Si può anche definire un punto unitario, I_1 , nel piano $\zeta = 0$. La retta $y - x = \zeta = 0$ è ben determinata se due delle tre tangenti $x^3 + y^3 = \zeta = 0$ sono immaginarie; nel caso contrario, essa risulta determinata fino ad una radice cubica dell'unità. Prendiamo come punto unitario la sua intersezione con la quartica (2). Ne segue

$$a = \frac{4}{(1 - \omega_1)(1 - \omega_2)}.$$

4. Consideriamo, di nuovo, le sezioni piane per una tangente determinata $y - \lambda x = \zeta = 0$ ($\lambda^3 + 1 \neq 0$). Variando la sezione, la relativa retta principale percorre un ben determinato piano, non passante per la tangente stessa. La coppia $x = \zeta = 0, y = \zeta = 0$ è caratterizzata dalla proprietà di avere come piano relativo ad una di esse un piano passante per l'altra. Tale circostanza permette dunque di scegliere come due facce del tetraedro di riferimento i piani relativi alle sezioni per gli assi $x = \zeta = 0, y = \zeta = 0$. Questa scelta riduce $\varphi_5(x, y)$ alla forma

$$\varphi_5(x, y) = bxy(y - \omega_3 x)(y - \omega_4 x)(y - \omega_5 x),$$

dove $\omega_3, \omega_4, \omega_5$ sono i tre invarianti assoluti di φ_5 rispetto alle omografie che conservano le precedenti forme di terzo e quarto grado.

I piani relativi alle sezioni per $y - \omega_1 x = \zeta = 0, y - \omega_2 x = \zeta = 0$ e quelli relativi alle sezioni per le loro tracce sul piano tangente $\zeta = 0$, forniscono delle interpretazioni geometriche (come birapporti) degli invarianti $\omega_3, \omega_4, \omega_5$.

Dunque l'intorno di quint'ordine del punto di flesso O di Σ definisce una retta uscente dal piano tangente (abbiamo, quindi, un analogo della normale proiettiva).

5. L'asse $x = y = 0$ è, evidentemente, la retta principale tanto per l'una quanto per l'altra delle sezioni $x = 0, y = 0$.

Siano O'_2, O''_2 i (secondi) punti principali relativi alle sezioni $x = 0, y = 0$.

Prendiamo come ultimo vertice del tetraedro di riferimento il punto O_2 , coniugato armonico di O rispetto alla coppia $O'_2 O''_2$. Ne segue

$$\varphi_6(x, y) = c(x^6 - y^6) + dx^5y + ex^4y^2 + fx^3y^3 + gx^2y^4 + hxy^5$$

dove $\frac{d}{c}, \frac{e}{c}, \dots$ sono i cinque invarianti assoluti di φ_6 rispetto alle omografie che conservano le precedenti forme di 3°, 4° e 5° grado. I (secondi) punti principali delle sezioni per l'asse $x = y = 0$ e per le cinque tangenti (precedentemente determinate) $y - \omega_i x = \zeta = 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$ danno semplici interpretazioni geometriche (come birapporti) di questi invarianti. Appena definito un punto unitario I_2 sull'asse $x = y = 0$, il birapporto $(OI_2 O'_2 O''_2)$ fornirà l'interpretazione geometrica di c . Ora, lo stesso intorno di O su Σ definisce anche un punto unitario I nello spazio.

Si può prendere come tale l'intersezione della retta principale della sezione $y - x = 0$ con la retta $O_2 I_1$. Ne segue

$$b = \frac{-6}{(1 - \omega_3)(1 - \omega_4)(1 - \omega_5)}.$$

Il piano $O'_1 \bar{O}'_1 I$ determina sull'asse $x = y = 0$ un punto unitario I_2 e quindi nello sviluppo

$$\begin{aligned} \zeta = & x^3 + y^3 + axy(y - \omega_1 x)(y - \omega_2 x) + bxy(y - \omega_3 x)(y - \omega_4 x)(y - \omega_5 x) + \\ & + c(x^6 - y^6) + dx^5 y + ex^4 y^2 + fx^3 y^3 + gx^2 y^4 + hxy^5 + \dots \end{aligned}$$

tutto ha significato geometrico invariante.

6. Dobbiamo segnalare che le precedenti considerazioni falliscono nel caso delle superficie di terzo grado (superficie d'Eckardt). Inoltre, in questo, si ripete ciò che avviene per il punto regolare di una superficie e le quadriche.

Ritengo anche possibile lo studio del punto di flesso considerandosi delle superficie (cubiche) d'Eckardt avente con Σ un contatto di terz'ordine e come intersezione una curva avente in O un punto quadruplo con determinate tangenti. Ho preferito il precedente metodo, non soltanto per la sua unità, ma anche perchè lo stimo capace di applicarsi in diversi altri casi, per es., nel caso del punto conico.

Matematica. — *Sulla funzione $\delta(x)$ di Dirac.* Nota II ⁽¹⁾
di M. SCHÖNBERG, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota precedente è stata esaminata la possibilità di sostituire la $\delta(x)$ di Dirac e sua derivata con gli integrali di Stieltjes. Nella presente Nota facciamo vedere che il metodo può essere esteso alle derivate di ordine superiore. Infine mostriamo la necessità di impiegare due integrazioni per rappresentare le derivate.

Ammissa la continuità delle derivate fino all'ordine n , si verifica facilmente che

$$(1) \quad f^{(n)}(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(n\xi + x) - nf(\overline{n-1}\xi + x) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f(\overline{n-2}\xi + x) + \dots + (-1)^n f(x)}{\xi^n},$$

oppure

$$(2) \quad f^{(n)}(x) = \int \frac{f(n\xi + x) - nf(\overline{n-1}\xi + x) + \dots + (-1)^n f(x)}{\xi^n} d\Phi(\xi)$$

ove $\Phi(x)$ è la funzione definita nella Nota precedente:

$$(3) \quad \Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Orbene possiamo scrivere:

$$(4) \quad \frac{f(\eta\xi + x) - nf(\overline{n-1}x) + \dots + (-1)^n f(x)}{\xi^n} = \int f(\eta) d_\eta \Psi_n(\eta - x, \xi)$$

ove

$$(5) \quad \Psi_n(\eta, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{per } \eta < 0 \\ \sum_{i=0}^r \frac{(-1)^{n-i}}{\xi^n} \binom{n}{n-1} & \text{per } r\xi < \eta < \overline{r+1}\xi \\ \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-1)^{n-i}}{\xi^n} \binom{n}{n-1} + \frac{(-1)^{n-r}}{2\xi^n} \binom{n}{n-r} & \text{per } \eta = r\xi. \end{cases}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1937.

Infatti la (4) segue direttamente dalla definizione (5) di $\Psi_n(\eta, \xi)$, che ha valore costante negli intervalli $(r\xi - \overline{r+1}\xi)$ di modo che, solo i punti di discontinuità contribuiscono al valore (4).

Dalle (4) e (1) segue:

$$(6) \quad f^{(n)}(x) = d\Phi(\xi) \int \int f(\eta) d\eta \Psi_n(\eta - x, \xi).$$

Possiamo osservare che Ψ_n può essere rappresentata per mezzo della Φ :

$$(7) \quad \Psi_n(\eta, \xi) = \frac{\Phi(\eta\xi - \eta) - n\Phi(\overline{n-1}\xi - \eta) + \frac{n(n-1)}{2}\Phi(\overline{n-2}\xi - \eta) + \dots + (-1)^n\Phi(\eta)}{\xi^n}.$$

Dimostriamo ora che non si può rappresentare la derivata di una funzione con una semplice integrazione di Stieltjes applicata alla funzione. Nella dimostrazione di questo teorema adopereremo alcuni risultati utilizzati nel Calcolo delle Probabilità. In questo, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF(x)$ rappresenta

il valor medio di $f(x)$, essendo $F(x)$ la funzione delle probabilità totali, ovunque crescente e positiva. Ricordando che qualunque funzione a variazione limitata è una differenza fra due funzioni crescenti e positive, concludiamo che qualunque integrale di Stieltjes è una combinazione lineare di due integrali del tipo, che rappresenta il valor medio.

Si chiama funzione caratteristica della legge delle probabilità $F(x)$ la funzione $\varphi(t)$:

$$(8) \quad \varphi(t) = \int e^{itx} dF(x).$$

Notoriamente la conoscenza della funzione caratteristica determina la $F(x)$ avendosi ⁽¹⁾:

$$(9) \quad F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{C \rightarrow \infty} \int_{-C}^{+C} \varphi(t) \frac{1 - e^{-ixt}}{it} dt.$$

Dalle osservazioni precedenti risulta che la teoria delle funzioni caratteristiche è applicabile a qualsiasi integrale di Stieltjes, in particolare la (9) è valida per un qualunque $F(x)$ a variazione limitata.

Supponiamo allora che sia possibile la rappresentazione:

$$(10) \quad f'(x) = \int f(\xi) dF(\xi - x).$$

(1) P. LEVY, *Calcul des probabilités*, p. 166, 1925.

La funzione caratteristica $\varphi(t)$ corrispondente sarebbe:

$$(11) \quad \varphi(t) = \int e^{it\xi} dF(\xi) = \left[\frac{d}{d\xi} e^{it\xi} \right]_{\xi=0} = it.$$

Sostituendo (11) in (9) si ha:

$$(12) \quad F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{C \rightarrow \infty} \int_{-C}^{+C} (1 - e^{-ixt}) dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \lim_{C \rightarrow \infty} \left[t + \frac{e^{-ixt}}{ix} \right]_{-C}^{+C} = \frac{1}{2\pi} \lim_{C \rightarrow \infty} \left(2C + \frac{2}{x} \sin Cx \right) = \infty.$$

Concludiamo che non esiste alcuna $F(x)$ che soddisfa la (10), ossia che non è possibile rappresentare la $f'(x)$ con una unica quadratura di Stieltjes applicata alla $f(x)$.

Nel caso delle derivate di ordine n , $\varphi(t)$ diventa $(it)^n$ e l'integrale (12) diverge o è indeterminato.

Ringrazio il prof. Wataghin per le discussioni.

Matematica. — *Su una possibile particolarità delle linee principali di una superficie.* Nota II⁽¹⁾ di A. TERRACINI, presentata dal Corrisp. E. BOMPIANI.

6. Caratterizzati con le (A), (B), ..., (L) i possibili valori di α, ρ, ϑ si tratta ora di risalire nei vari casi alle corrispondenti superficie.

Liberiamoci anzitutto dai casi particolari in cui qualcuna delle tre funzioni α, ρ, ϑ è identicamente nulla. Tale eventualità, oltre che nel caso (A) in cui essa ha luogo per due fra le tre funzioni, si può presentare nel caso (H) per una delle tre funzioni, che si può supporre senza restrizioni essere la ϑ . Si ha allora

$$(H_1) \quad \frac{U'''}{U''} = \frac{-1}{2u + k_1}, \quad \frac{V'''}{V''} = \frac{-1}{2v + k_2}, \quad \varphi''' = 0,$$

con k_1, k_2 costanti che si possono rendere nulle. Perciò, a meno di trasformazioni omografiche inessenziali per la superficie S , si può assumere $U = u^{3/2}$, $V = v^{3/2}$, ottenendosi così per la S la rappresentazione parametrica

$$(H_1) \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = 1 : u : v : u^{3/2} : v^{3/2} : (u + v)^2.$$

7. Per ciascuno dei casi (A), (B), ..., (L) — escluso per (H) il sotto-caso (H₁) di cui al n. 6 — scriviamo qui in seguito le equazioni parametriche

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1937.

che si ottengono per la corrispondente superficie S , ricavando sempre le funzioni U, V, φ dalle relazioni $\alpha = \frac{U'''}{U''}, \rho = \frac{V'''}{V''}, \vartheta = \frac{\varphi'''}{\varphi''}$, e particolarizzando (analogamente al n. 6) le costanti di integrazione in modi che risultano leciti in base alla possibilità di alterare per omografie la superficie in esame. Si ottengono così tutte le ulteriori soluzioni sotto la forma seguente

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 =$$

- (A) $1 : u : v : u^2 : v^2 : \varphi(u + v);$
- (B) $1 : u : v : e^u : e^v : e^{u+v};$
- (C) $1 : u : v : e^u : e^v : e^{1/2(u+v)};$
- (D) $1 : u : v : e^u : e^v : -2\sqrt{1 - 2e^{u+v}} + \log(1 - e^{u+v} + \sqrt{1 - 2e^{u+v}});$
- (E) $1 : u : v : e^u : e^{-v} : e^{u+v};$
- (F) $1 : u : v : e^u : e^{-v} : e^{-(u+v)};$
- (G) $1 : u : v : e^u : e^{-v} : \log(1 + e^{u+v});$
- (H) $1 : u : v : u^{3/2} : v^{3/2} : (u + v + k)^{3/2};$
- (I) $1 : u : v : \log(1 + e^u) : \log(1 + e^v) : \log(1 - e^{u+v});$
- (L₁) $1 : u : v : e^u : e^{cv} : e^{\frac{c}{c+1}(u+v)};$
- (L₂) $1 : u : v : u^m : v^m : (u + v)^m;$

dove in (A) la φ è una funzione arbitraria con derivata terza non identicamente nulla; in (H) k è una costante arbitraria; in (L₁) c è una costante $\neq 0, \neq -1$; e in (L₂) m è una costante $\neq 0, \neq 1, \neq 2$.

Relativamente a tali soluzioni è da osservare:

ciascuna delle soluzioni (E), (F) si riduce alla (B) mediante un opportuno cambiamento di parametri;

il caso (H) — a prescindere dal sottocaso (H₁) — dà luogo a conseguenze diverse secondochè $k = 0$, oppure $k \neq 0$: nella prima eventualità esso rientra nel caso (L₂) per $m = 3/2$, cosicchè resta soltanto la seconda, e allora si può rendere $k = 1$. Chiameremo (\bar{H}) la soluzione (H) con $k = 1$;

il caso (C) rientra come caso particolare in (L₁) ove si faccia $c = 1$.

Restano dunque, tutte e sole, le soluzioni seguenti, che, come si vedrà, sono distinte fra loro: superficie (H₁), (A), (B), (D), (G), (\bar{H}), (I), (L₁), (L₂).

8. Le linee principali del quarto e del quinto sistema si determinano in base alla (2) ove si tengano presenti le (14). Naturalmente il primo membro di (2) ammette anche il fattore $1 + \tau$, dal quale si deve prescindere, in quanto si presenti come fattore semplice.

Esaminiamo anzitutto le superficie (A), (B), (G), (L₁) e (L₂): si hanno qui come quarto e quinto sistema di linee principali rispettivamente i seguenti:

- (A) $u + v = \text{cost.}$, $u + v = \text{cost.}$;
 (B) $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$;
 (G) $u + v = \text{cost.}$, $e^u + e^{-v} = \text{cost.}$;
 (L₁) $u - cv = \text{cost.}$, $u - cv = \text{cost.}$;
 (L₂) $v : u = \text{cost.}$, $v : u = \text{cost.}$

Le superficie di questi cinque tipi hanno sempre alcuni sistemi di linee principali fra loro coincidenti. Precisamente nel tipo (A) e soltanto in esso coincidono fra loro addirittura tre sistemi di linee principali (e precisamente le linee di questo sistema triplo sono coniche); nel tipo (B) e soltanto in esso vi sono due sistemi coincidenti e ulteriormente due sistemi coincidenti (e le linee di ciascuno di questi due sistemi doppi sono linee piane W proiettive a linee esponenziali). Invece in ciascuno dei tre rimanenti tipi (G), (L₁) e (L₂) vi è una sola coppia di linee principali coincidenti, restando così quattro sistemi distinti di linee principali. Nel caso (L₁), e soltanto in esso, le quattro linee principali distinte uscenti da un punto generico della superficie danno un birapporto costante (precisamente $-c$, e i valori dedotti da questo modificando l'ordine dei quattro elementi di cui si forma il birapporto). In ciascuno dei casi (G) e (L₂) tale birapporto è invece variabile.

Quanto ai tre ultimi tipi osserviamo ancora che il quarto sistema di linee principali:

1) per le superficie (G) è costituito, al pari dei primi tre, da linee situate in $\infty^1 S_3$ passanti per un piano fisso, e precisamente per il piano $x_1 = x_4 + x_5 = x_3 - x_6 = 0$ contenuto nel medesimo iperpiano Σ_4 di cui al principio del n. 3;

2) per le superficie (L₁) è costituito da ∞^1 linee piane⁽¹⁾, in piani seganti il piano fisso $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ secondo rette di un fascio: il piano fisso è fuori dell'iperpiano Σ_4 , ma il centro del fascio (avente coordinate $0:c:1:0:0:0$) sta in tale iperpiano;

3) per le superficie (L₂) è ancora formato da ∞^1 linee piane, i cui piani sono incidenti in rette un piano fisso ($x_4 = x_5 = x_6 = 0$) secondo rette di un fascio. Ma ora il centro del fascio (di coordinate $1:0:0:0:0:0$) non è più contenuto nell'iperpiano Σ_4 .

Le considerazioni che precedono escludono anche la possibilità che alcuni fra i cinque tipi (A), (B), (G), (L₁), (L₂) possano fra loro coincidere.

(1) Come del resto è ovvio *a priori*, trattandosi di un sistema di linee principali che ne assorbe due nelle condizioni studiate.

Fra le superficie dei tipi (A) e (L₂) ve nè sono infinite algebriche, bastando all'uopo assumere per φ una funzione algebrica, oppure per m un numero razionale.

9. Passando ora ai rimanenti tipi, vale a dire ai tipi (H₁) (D), (\bar{H}) e (I), rileviamo anzitutto che in ciascuno di essi, al contrario di quanto avveniva per i precedenti, i cinque sistemi di linee principali sono sempre distinti. Ciò si potrebbe verificare in base alle (4) e (5), utilizzando i valori delle A, B, C, D quali sono forniti dalle (14); ma risulta anche *a posteriori* dal fatto che le linee principali dei due ultimi sistemi sono rispettivamente:

$$(H_1) \quad \sqrt{v} \mp i\sqrt{u} = \lambda;$$

$$(D) \quad 1 - e^{u+v} \pm \sqrt{1 - 2e^{u+v}} = \lambda e^{2v};$$

$$(\bar{H}) \quad v = \frac{-(\sqrt{u} + \lambda)^2}{\lambda^2 + 1};$$

$$(I) \quad 1 + e^u - \lambda(1 - e^{u+v}) = 0, \quad 1 + e^v - \lambda(1 - e^{u+v}) = 0;$$

dove λ è una costante arbitraria.

10. Osserviamo subito che la superficie (I) non differisce dalla superficie di Bol, definita rispetto a due parametri u_1, v_1 dalle equazioni parametriche

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = \\ = \log \frac{u_1}{v_1} : \log \frac{u_1 + v_1 - 1}{v_1} : \log \frac{u_1 - v_1}{1 - v_1} : \log \frac{1 - v_1}{u_1} : \log \frac{u_1(1 - u_1)}{v_1(1 - v_1)} : -1.$$

Si passa invero dalla (I) a questa superficie — a meno di una inesenziale trasformazione omografica — mediante il cambiamento di parametri:

$$u = \log \frac{v_1}{u_1} - i\pi, \quad v = \log \frac{u_1 + v_1 - 1}{v_1} - i\pi.$$

11. Quanto ai tre altri tipi di superficie (H₁), (D) e (\bar{H}) scriviamo anzitutto esplicitamente le equazioni parametriche delle loro linee principali dei due ultimi sistemi, quali si ottengono tenendo conto del n. 9 e delle equazioni parametriche delle superficie stesse (nn. 6, 7):

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 =$$

$$(H_1) \quad 1 : u : -u \pm 2i\lambda\sqrt{u} + \lambda^2 : u^{3/2} : (\pm i\sqrt{u} + \lambda)^2 : (\pm 2i\lambda\sqrt{u} + \lambda^2)^2;$$

$$(D) \quad 1 : \log \frac{i\sqrt{2\lambda}}{1 \pm \sqrt{1-2t}} : \log \frac{1 \pm \sqrt{1-2t}}{\sqrt{2\lambda}} : \sqrt{\lambda} \frac{1 \mp \sqrt{1-2t}}{\sqrt{2}} : \frac{1 \pm \sqrt{1-2t}}{\sqrt{2\lambda}} : \\ : -2\sqrt{1-2t} + \log(1 - t + \sqrt{1-2t}),$$

(dove il parametro t vale $e^u + v$):

$$(\bar{H}) \quad 1 : t^2 : \frac{-(t + \lambda)^2}{\lambda^2 + 1} : t^3 : -i \frac{(t + \lambda)^3}{(\lambda^2 + 1)^{3/2}} : \frac{(1 - \lambda t)^3}{(\lambda^2 + 1)^{1/2}},$$

dove $t = \sqrt{u}$.

Su queste equazioni è intanto evidente che le linee principali del quarto e del quinto sistema, per le superficie (H_1) e (\bar{H}) sono cubiche sghembe. Quindi le superficie (H_1) e (\bar{H}) sono algebriche, con linee principali tutte algebriche.

Sulle medesime equazioni si riconosce inoltre che gli S_3 contenenti le linee principali del quarto e del quinto sistema, a differenza di quanto avviene per la superficie di Bol, non passano mai per un medesimo piano, e precisamente che essi:

per la superficie (H_1) passano per una retta fissa ($x_1 = x_2 - x_3 = \pm ix_4 + x_5 = x_6 = 0$) in modo che le due rette fisse r_4, r_5 provenienti dal quarto e dal quinto sistema risultano complanari, e contenute nell'iperpiano Σ_4 del n. 3.

per la superficie (D) passano pure per una retta fissa ($x_1 = x_4 = x_5 = 2x_p - x_6 = 0$, dove $p = 3, 2$ risp. per il quarto e per il quinto sistema); le due rette fisse r_4, r_5 sono ancora complanari e contenute nell'iperpiano Σ_4 , ma ora — a differenza di quanto avviene per la superficie (H_1) — il piano $r_4 r_5$ sega i tre piani π_1, π_2, π_3 rispettivamente in una retta, in una retta e in un punto, mentre nel caso precedente li sega in un punto, in un punto e in una retta;

per la superficie (\bar{H}) passano invece unicamente per un punto fisso ($x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = 3 : -1 : -1 : 0 : 0 : 0$), comune agli S_3 del quarto e del quinto sistema; il punto è situato fuori dell'iperpiano Σ_4 .

12. Quanto alle due soluzioni algebriche offerte dalle superficie (H_1) e (\bar{H}) , si ha che queste superficie sono entrambe razionali. Precisamente la prima è del dodicesimo ordine, con sezioni iperpiane di genere tre, rappresentabile su un piano con un sistema lineare ∞^5 di quartiche aventi in comune una bitangente e i suoi punti di contatto.

La superficie (\bar{H}) è invece di ordine diciotto, con sezioni iperpiane di genere quattro, rappresentabile su un piano con un sistema lineare di sestiche con due punti base tripli.

Tutto ciò si verifica, p. es., introducendo nei due casi nuovi parametri, p, q definiti rispettivamente dalle $u = p^2, v = q^2$ e dalle

$$u = \left(\frac{2p}{p^2 + q^2 - 1} \right)^2, \quad v = \left(\frac{2q}{p^2 + q^2 - 1} \right)^2.$$

13. Esaminiamo finalmente le soluzioni trovate, dal punto di vista dei 5-tessuti di linee piane che esse offrono come immagini dei loro sistemi

di linee principali in un piano (u, v) . Per le superficie (H_1) e (\bar{H}) adoperiamo le stesse variabili u, v originarie; per la superficie (D) adottiamo invece come nuove variabili e^u, e^v . Allora l'esame delle equazioni dei due ultimi sistemi di linee principali quali risultano al n. 9 indica quanto segue:

Per le superficie (H_1) tre sistemi (I, II, III) del 5-tessuto sono rappresentati da tre fasci di rette con centri L, M, N, allineati su una retta a ; e i due ultimi sistemi IV e V, complessivamente, dalle coniche che toccano la retta a nel punto N, e che sono tangenti a due ulteriori rette b, c uscenti rispettivamente dai punti L e M.

Per la superficie (\bar{H}) si hanno ancora tre fasci di rette I, II, III coi centri su una retta a : e poi (sistemi IV, V) la schiera delle coniche definita da un quadrilatero base (non degenera) del quale la retta a è un lato, e quei tre centri sono vertici. Da questo 5-tessuto si ottiene dunque come caso limite il precedente, quando si fa tendere a coincidere con a un altro lato del quadrilatero, in modo che uno dei tre vertici esistenti sul lato a tenda al punto N.

Invece per la superficie (D) si hanno due fasci di rette I e II, con centri L, M; un fascio schiera di coniche (III) avente L e M quali punti base; mentre i due ultimi sistemi, IV e V, del 5-tessuto sono costituiti dalle rette tangenti di una determinata conica irriducibile dello stesso fascio schiera.

Dal punto di vista topologico differenziale i tre 5-tessuti ora descritti si differenziano fra loro, e da quello relativo alla superficie di Bol (formato da quattro fasci di rette coi centri nei vertici di un quadrangolo e dal fascio di coniche avente quei vertici come punti base) già per il numero di terne a configurazione esagonale che sono contenute nei 5-tessuti stessi. Invero, mentre tali sono tutte le terne relative alla superficie di Bol, lo sono negli altri casi tutte e sole le seguenti:

superficie (H_1) : I II III, I II IV, I II V, I IV V, II IV V, III IV V;

superficie (\bar{H}) : I II III, I IV V, II IV V, III IV V;

superficie (D) : le otto terne che si ottengono escludendo le due I II IV e I II V.

Fisica (Fisica terrestre). — *Ricerche sulla ionizzazione prodotta dall'evaporazione dell'acqua*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di E. MEDI, presentata dal Socio A. LO SURDO.

Per la spiegazione dei fenomeni interessanti l'elettricità atmosferica, la formazione dei temporali e la carica elettrica della terra, sono state proposte moltissime teorie⁽²⁶⁾.

Una delle più antiche è basata sopra l'ipotesi che nell'evaporazione di un liquido si abbia separazione di cariche elettriche. Per circa un secolo la questione ha dato origine a un grande numero di ricerche sperimentali: darò un brevissimo cenno di quelle fra esse che hanno avuto maggiore importanza, dovendo esporre nella presente Nota alcuni risultati da me ottenuti interessanti l'argomento.

Alessandro Volta⁽⁴⁾ fu il primo ad avere un'idea esatta del problema e ad ottenere alcuni risultati sperimentali di grande interesse. Seguendo le idee del Volta, Luigi Palmieri^(5, 6, 7, 8) ha compiuto una lunghissima serie di ricerche, con esperienze molto geniali, mediante le quali ha osservato che un liquido evaporando si carica negativamente e il vapore trasporta con sè carica positiva.

K. Kalischer e L. J. Blake⁽¹¹⁾ invece non hanno riscontrato alcuna separazione di cariche elettriche in osservazioni fatte evaporando un liquido carico.

Le successive indagini di L. Sohncke⁽¹⁴⁾ (per quanto molto dubbie) e di Pellat⁽¹⁷⁾, in particolare, hanno dato come risultato che un liquido carico perde parte della quantità di elettricità da esso posseduta se lo si fa evaporare: ma non hanno consentito di rilevare una separazione di cariche per evaporazione. Alcune esperienze di Pochettino⁽¹⁹⁾ e Sella, di Schwalbe^(16, 18) e infine di Beggerow⁽²⁰⁾ hanno dato risultato negativo relativamente alla perdita di carica e alla separazione di cariche elettriche da parte di un liquido evaporante.

Un insieme di fenomeni aventi stretta relazione con l'argomento di cui si tratta, è stato studiato da Lenard^(21, 22, 23): le gocce di acqua spezzandosi per urto contro una superficie solida o liquida producono una separazione

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale di Geofisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 settembre 1937.

allungato con l'aggiunta di altri pezzi eguali di 90 centimetri di lunghezza. L'uscita del condensatore è chiusa da un secondo condotto di gomma che va ad un aspiratore elettrico la cui velocità può essere regolata a piacere entro limiti piuttosto ampi.

Il cilindro interno M è collegato elettricamente con un elettrometro a quadranti tipo Dolezalek costruito in questo Istituto con particolari accorgimenti e completamente isolato in ambra.

La sensibilità dello strumento è dell'ordine del centesimo di volta per mm/metro.

Le deviazioni dell'elettrometro, adoperato con la disposizione simmetrica, sono proporzionali alle differenze di potenziale del cilindrico rispetto al suolo.

All'armatura esterna N del condensatore si applica, attraverso un commutatore, la tensione voluta. Per basse tensioni, fino a duecento volta, si usa un sistema potenziometrico alimentato da accumulatori, per medie, fino a seicento volta, una batteria di pile a secco, e per tensioni più alte fino a seimila volta la grande batteria di diecimila piccoli accumulatori posseduta dall'Istituto di Fisica Superiore.

Prima di compiere la misura verificavo l'isolamento e lasciavo raggiungere al forno una temperatura di equilibrio che regolavo mediante una resistenza variabile. La temperatura veniva letta con un adatto termometro opportunamente disposto. Mettevo quindi in moto l'aspiratore e verificavo che l'aria calda aspirata non influiva sull'isolamento dei sostegni.

Dopo, applicavo la tensione al cilindro esterno e toglievo il collegamento a terra del sistema ago dell'elettrometro-armatura interna M. Ogni volta attendevo circa mezzo minuto per verificare se l'elettrometro non deviasse per difetto di isolamento o per induzione o per le cariche che potessero essere trasportate dall'aria aspirata.

Dopo di ciò facevo cadere una goccia nel forno e mettevo in moto il contasecondi nell'istante stesso della caduta della goccia: accompagnavo così la lettura delle deviazioni dell'elettrometro con quelle che indicavano il tempo trascorso. Prima della caduta l'elettrometro si manteneva praticamente fermo nella sua posizione di zero anche se la tensione applicata ad N superava i seicento volta: l'aria aspirata dal forno caldo evidentemente non conteneva ioni almeno in quantità superiore alla normale. Tuttavia talvolta ho osservato spostamenti dello zero di cui ho tenuto il debito conto nella misura. Con un certo ritardo dalla caduta della goccia l'elettrometro cominciava a deviare accusando una carica avente lo stesso segno del potenziale applicato all'armatura esterna N. Il potenziale tendeva ad un valore limite che rappresentava il potenziale raggiunto dal sistema quando era terminata la aspirazione dell'aria contenente ioni prodotti dall'evaporazione della goccia. Moltiplicando questo valore per la capacità totale (dell'ordine di $3 \cdot 10^{-10}$ Farad) ottenevo la quantità di elettricità raccolta nel cilindro interno per

azione del campo elettrico esistente fra le due armature. Quando era fermo l'aspiratore o quando era applicato il campo non osservavo deviazione.

Risultati. — Col dispositivo descritto ho fatto numerose serie di misure in relazione alle varie cause che possono influire sull'ammontare della carica raccolta. Mi limito qui ad esporre alcune tra quelle che finora hanno dato risultati sicuri e di notevole interesse: in esse ho adoperato acqua distillata lasciata cadere in gocce del volume di $\frac{1}{18}$ cm³, la temperatura del forno era circa 470 gradi.

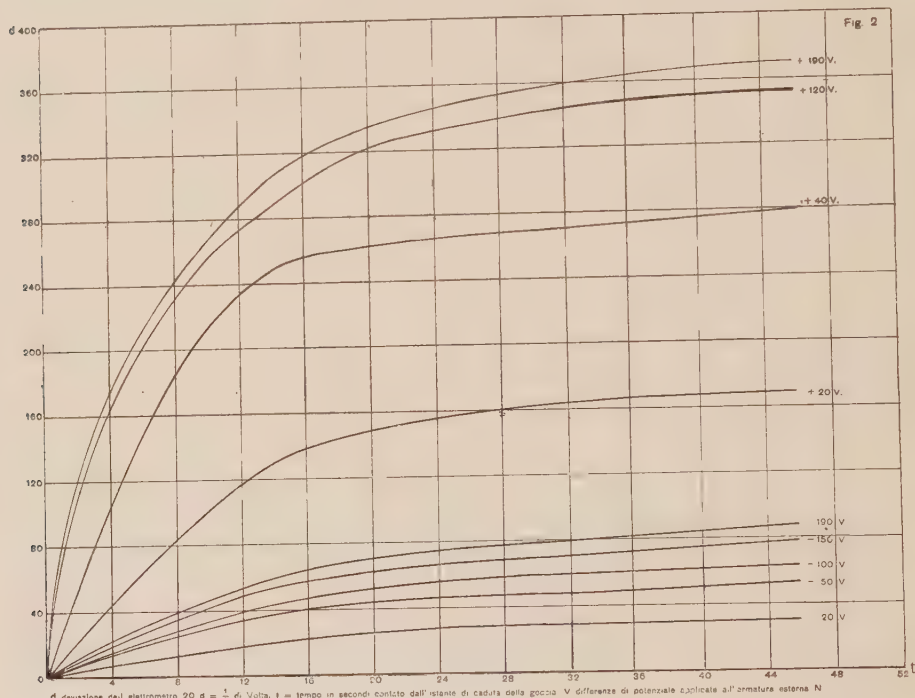


Fig. 2.

Questi risultati sono riportati nei diagrammi delle fig. 2, 3. Nel diagramma della fig. 2 sono disegnate le curve che rappresentano le variazioni del potenziale del sistema e quindi della carica raccolta, che è ad esso potenziale proporzionale, in funzione del tempo trascorso dall'istante della caduta.

Ogni curva è tracciata mantenendo costante la differenza di potenziale fra le armature che viene indicata corrispondentemente sul diagramma. L'altezza di queste curve, come si vede dalla figura, tende ad un valore limite che rappresenta la carica totale raccolta in seguito alla evaporazione rapida di una goccia. Con l'aumentare della differenza di potenziale applicata si vede che aumenta questa carica, segno che ai più bassi potenziali non

tutte le cariche trasportate dall'aria aspirata venivano fissate nel passaggio dentro il cilindro.

In base alle curve del tipo di quelle tracciate sul primo diagramma, che mi consentono di stabilire la quantità di carica totale per ciascuna differenza di potenziale, ho tracciato il diagramma della fig. 3 le cui curve si possono considerare come delle vere e proprie caratteristiche del fenomeno.

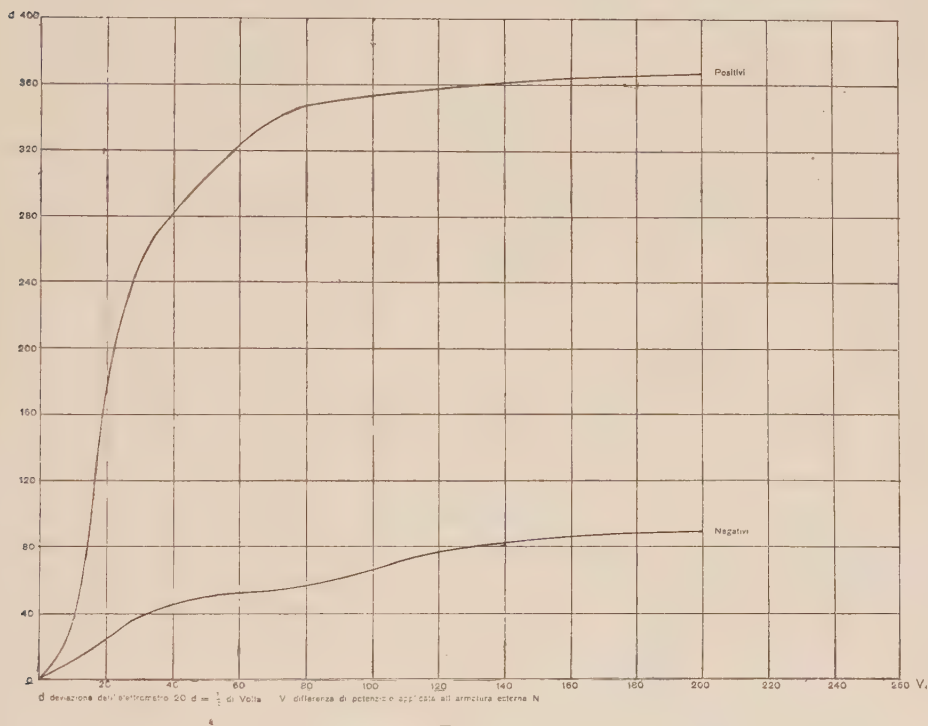


Fig. 3.

Si osserva l'andamento noto delle caratteristiche della conduzione ionica e ciò che è più importante è che la saturazione per cariche portate da ioni positivi è molto maggiore di quella corrispondente per cariche negative.

Ciò significa che in seguito alla rapida evaporazione dell'acqua si ha nell'aria circostante un eccesso di carica positiva, conformemente ai risultati delle esperienze di Volta; la quantità di elettricità negativa corrispondente resta nel corpo caldo su cui avviene l'evaporazione. La differenza media fra carica positiva e carica negativa per ogni goccia è eguale a duecento divisioni cioè, essendo $20 d = \frac{1}{10}$ volta e la capacità dell'ordine di $3 \cdot 10^{-10}$ Farad, $1.3 \cdot 10^{-10} = 3 \cdot 10^{-10}$ Coulomb per goccia quindi $54 \cdot 10^{-10}$ Coulomb per grammo.

Se si potesse ammettere che questo medesimo comportamento esiste anche nell'evaporazione lenta della superficie degli oceani si avrebbe una spiegazione sufficiente dell'esistenza della carica positiva presente nell'atmosfera soltanto per effetto dell'evaporazione: difatti questo processo darebbe una carica positiva all'aria sufficiente per compensare quella che viene trasportata al suolo per effetto del campo elettrico e così la carica negativa della terra sarebbe conservata costante. Si stabilisce un equilibrio dinamico di cariche elettriche come esiste un equilibrio dinamico fra quantità di acqua che cade nelle precipitazioni atmosferiche, quantità di vapore contenuto nell'atmosfera stessa e quantità di acqua evaporata: questo equilibrio mantiene pressochè costante il livello delle acque degli Oceani.

Quasi a conferma di questo modo di vedere sta la concordanza dei dati numerici almeno come ordine di grandezza.

Su tutta la terra in un anno per la corrente verticale data dal prodotto del campo elettrico per la conducibilità arriva una quantità di carica positiva eguale a

$$1,35 \cdot 10^3 \cdot 3,1 \cdot 10^7 = 4,19 \cdot 10^{10} \text{ Coulomb.}$$

Nel medesimo periodo di tempo la quantità di acqua evaporata è circa

$$3,75 \cdot 10^5 \text{ km}^3 = 3,75 \cdot 10^{20} \text{ cm}^3 = M.$$

Facendo il rapporto fra queste due quantità si trova la carica positiva che dovrebbe essere trasportata via dalla superficie della terra da un grammo di acqua evaporata

$$\frac{Q}{M} = \frac{4,19 \cdot 10^{10}}{3,75 \cdot 10^{20}} = 1,11 \cdot 10^{-10} \text{ Coulomb per grammo.}$$

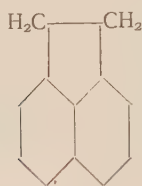
Confrontando questo valore con i dati ottenuti dall'esperienza si ha un sufficiente accordo. In ogni modo la carica osservata sperimentalmente supera quella che sarebbe necessaria per la compensazione.

BIBLIOGRAFIA.

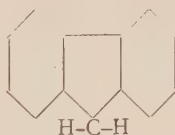
1. WINKELMANN, *Handbuch der Physik*, vol. IV, p. 482.
2. CHWOLSON, *Traité de Physique*, vol. IV, p. 269.
3. WIEN HARMS, *Handbuch der Physik*, vol. XXV.
4. A. VOLTA, *Opere di A. Volta*, vol. I, 1, p. 246.
5. L. PALMIERI, «Rend. Acc. Sc. Fis. Mat.», Napoli, vol. I, p. 195, 1887.
6. ID., «Rend. Reale Acc. Napoli», vol. XXIV, pp. 194-198, 1885.
7. ID., «Nuovo Cimento», vol. 19, p. 36, 1886.
8. ID., «Soc. Ital. Sc. Napoli», vol. VI, n. 5, 1886.
9. ID., «Nuovo Cimento», vol. XXII, p. 249.
10. ID., «Nuovo Cimento», vol. XXIV, p. 159, 1889.
11. L. J. BLAKE, «Wied. Ann.», vol. XIX, p. 518, 1883.
12. F. EXNER, «Wien. Ber.», vol. XCIII, 1886.
13. PELTIER, «Ann. Chim. Phys.», vol. IV, p. 385.
14. L. SOHNCKE, «Wied. Ann.», vol. XXXIV, p. 925, 1888.
15. MASCART, «Compt. Rend.», vol. LXXXVI, p. 575, 1878.
16. G. SCHWALBE, «Wied. Ann.», vol. LVIII, p. 500, 1896.
17. H. PELLAT, «Journ. d. Physik», vol. VIII, p. 253, 1899.
18. G. SCHWALBE, «Ann. der Physik», vol. I, p. 294, 1900.
19. POCHETTINO e SELLA, «Rendiconti R. Acc. Lincei», vol. IX, p. 3, 1900.
20. H. BEGGEROW, «Ann. der Phys.», vol. VII, p. 494, 1902.
21. PH. LENARD, «Ann. der Phys.», vol. XLVI, p. 584, 1892.
22. ID., «Ann. der Phys.», vol. XLIII, p. 1048, 1914.
23. ID., «Ann. der Phys.», vol. LXXV, p. 629, 1921.
24. R. GUNN, «Terr. Mag. At. El.», vol. XL, p. 79, 1935.
25. S. CHAPMAN, «Phys. Rev.», vol. LII, p. 184, 1937.
26. E. MEDI, *La carica elettrica della terra*. Riv. «L'Universo», 1937.

Chimica. — *Spettro Raman di idrocarburi a nuclei condensati.* — II. *9-10-diidroantracene, acenaftene, fluorene.* Nota ⁽¹⁾ di R. MANZONI ANSIDEI, presentata dal Socio M. BETTI.

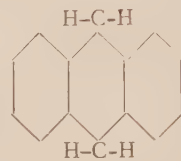
In prosecuzione alle ricerche precedentemente pubblicate in questi « Rendiconti » ⁽²⁾ sullo spettro Raman di idrocarburi a nuclei condensati riferisco in questa Nota le esperienze eseguite sul 9-10-diidroantracene, acenaftene, fluorene.



Acenaftene



Fluorene



9-10-diidroantracene

Riporto gli spettri ottenuti nella tabella I.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

9-10-diidroantracene. — È notevole nello spettro di questo composto la scomparsa della riga a 1630 cm^{-1} dello spettro dell'antracene. Si rileva pure una spiccata analogia tra lo spettro Raman del diidroantracene con gli spettri dei benzoli ortobisostituiti.

L'alta simmetria della molecola, come nel caso dell'antracene, è probabilmente una delle cause della povertà di righe dello spettro di questo composto, per il quale, a parte le righe dovute ad oscillazioni di valenza e di deformazione dei gruppi CH_2 (righe che come è ovvio non appaiono nello spettro dell'antracene), trovo un numero di righe press'a poco eguale a quello dello spettro dell'antracene stesso. La mancanza dello spettro ultra-

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 agosto 1937.

(2) R. MANZONI ANSIDEI, « R. Acc. Lincei », XXIV, 368 (1936).

rosso di questo composto impedisce una ulteriore discussione in proposito. Spero però di potermi presto occupare dello spettro ultrarosso di questo composto.

Acenaftene. — La molecola dell'acenaftene dovrebbe comportarsi come quella di una naftalina simmetricamente sostituita in 1 e 8. Tale sostituzione però elimina il centro di simmetria della molecola della naftalina; con ciò si potrebbe prevedere che alcune righe nucleari della naftalina inattive in effetto Raman ed attive in ultrarosso (perchè corrispondenti ad oscillazioni antisimmetriche al centro di simmetria della molecola) compaiano nello spettro Raman dell'acenaftene dove questo centro più non sussiste. Invero lo spettro Raman dell'acenaftene mostra nettamente, per esempio, la riga a 714 cm^{-1} e quella a 638 cm^{-1} che non appaiono nello spettro Raman della naftalina mentre sono caratteristiche per il suo spettro ultrarosso.

Fluorene. — Passando dal diidroantracene al fluorene la simmetria molecolare perde il centro, l'asse binario perpendicolare al piano molecolare, ed anche un asse binario giacente nel detto piano e posseduto dalla molecola del diidroantracene come pure viene a mancare il piano speculare contenente questo ultimo asse.

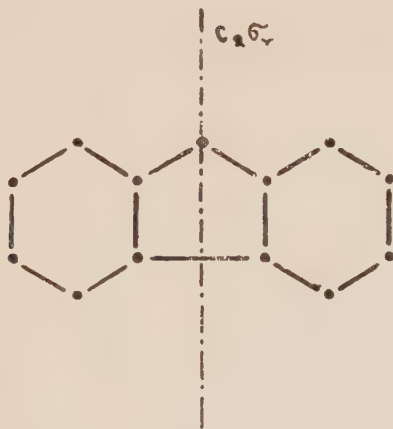


Fig. 1.

La simmetria si riduce alla C_{2v} e perciò è da prevedersi un forte numero di righe Raman dato che tutte le oscillazioni corrispondenti a tale simmetria molecolare sono attive in effetto Raman come si può dedurre dalla seguente tabella calcolata secondo le norme riassunte recentemente da Bonino su questi « Rendiconti » ⁽¹⁾.

(1) BONINO, « R. Acc. Lincei », vol. XXIV, p. 289, 1936.

TABELLA I.

ACENAFTENE	9-10 DIIDROANTRACENE	FLUORENE	
Spettro Raman	Spettro Raman	Spettro Raman	Spettro ultrarosso (1)
3058 (2 dif.)	3075 (1 dif.)	3064 (1/2)!	non esplorato
—	—	3049 (2)!	
2924 (2 dif.)	2911 (1/2)	2909 (1 dif.)	
—	2862 (1 dif.)	—	
—	2814 (1 dif.)	2840 (1/2)	
—	—	1639 (0)	
1603 (5)	1603 (3)	1611 (7)	
—	1536 (00)	1577 (1)	
1444 (3)	—	1476 (3)	
1428 (8)	1424 (2)	—	
1368 (2)	—	1344 (2)	
—	—	1325 (1)	
—	—	1291 (2)	1298 (3)
—	—	1228 (3 1/2)	—
—	1209 (5)	1210 (1/2)	—
—	—	1185 (1)	—
—	—	1151 (1)	1165 (4 1/2)
—	—	1096 (1/2)	—
1040 (1)	1037 (6)	1018 (4)	1012 (2 1/2)
—	—	—	961 (4)
—	—	—	866 (7)
—	—	841 (3)	non esplorato
—	—	—	
797 (1/2)	754 (2)	740 (3)	
714 (0)	729 (2)	—	
638 (1)	—	—	
—	—	—	
—	—	—	
—	—	567 (1/2)	
500 (1)	491 (1)	—	
—	352 (1)	394 (1)	
—	234 (4)	277 (1)	
—	209 (1/2)	—	
—	184 (4)	—	
—	146 (2)	140 (1 dif.)	

(1) J. LECOMTE, P. LAMBERT, *Spectres d'absorption infra-rouge*. (Parigi, 1933).

TABELLA II.

Fluorene (scheletro carbonico C₁₃).

Tipo delle oscillazioni	Simmetria rispetto σ			Numero di oscillazioni	Effetto Raman	Assorbimento ultrarosso
	C ₂	σ_v	σ_h			
A ₁	simmetrica	simmetrica	simmetrica	12	polarizzate	attive
A ₂	simmetrica	antisimmetr.	antisimmetr.	5	depolarizzate	inattive
B ₁	antisimmetr.	antisimmetr.	simmetrica	11	depolarizzate	attive
B ₂	antisimmetr.	simmetrica	antisimmetr.	5	depolarizzate	attive
Totali . . .				33	33	28

I calcoli riassunti nella tabella precedente prevedono cinque oscillazioni nucleari di tipo A₂ inattive in assorbimento ultrarosso. Perciò se pure tutti i massimi di assorbimento in ultrarosso devono corrispondere a righe Raman non si verifica il viceversa e cioè alcune righe Raman teoricamente non dovrebbero trovare corrispondenza nel relativo spettro ultrarosso.

Del fluorene abbiamo uno spettro ultrarosso di assorbimento tra 6.5 μ e 15 μ circa dato dalle diligenti misure di Lecomte⁽¹⁾ e riprodotto nella tabella I.

L'osservazione di questa tabella mostra la concordanza di un certo numero di massimi ultrarossi colle rispettive righe Raman mentre (in questo tratto esplorato dello spettro ultrarosso) effettivamente si osservano 3 o 4 righe Raman a cui non corrispondono massimi ultrarossi. Si prevederebbero poi dalla Tabella II 12 righe Raman polarizzate ed intense corrispondenti a massimi ultrarossi. Ora, a parte le righe Raman a 3064, 3049, 2909, 2840, cm⁻¹ imputabili alle oscillazioni di valenza CH, osservo nell'effetto Raman del fluorene appunto una dozzina di righe nucleari relativamente intense che, nella zona esplorata nell'ultrarosso, corrispondono tutte a massimi di assorbimento. Tra queste righe includo la 1476 cm⁻¹ che ritengo di attribuire al nucleo carbonico. Viceversa non corrispondono a righe Raman i massimi ultrarossi a 626, 645, 692, 961 cm⁻¹ contrariamente alle previsioni. Ma alcuni di questi massimi corrispondono probabilmente a toni di combinazione e non ad oscillazioni fondamentali, per es., 961 = 567 + 394 cm⁻¹; 692 \cong (2 \times 277) + 140 cm⁻¹. La 626 cm⁻¹ appare nello spettro Raman dell'acenaftene e manca nello spettro del fluo-

(1) J. LECOMTE, P. LAMBERT, *Spectres d'absorption infra-rouge* (Parigi, 1933).

rene forse per l'incompletezza di detto spettro nelle righe a piccola frequenza per effetto della fluorescenza del prodotto. Il doppietto $866-813\text{ cm}^{-1}$ in ultrarosso può spiegarsi ammettendo una degenerescenza accidentale⁽¹⁾ dovuta alla coincidenza dei due livelli: $567 + 277 = 844\text{ cm}^{-1}$ con il livello 841 cm^{-1} che appare con una forte riga nello spettro Raman. Tenendo presenti questi dati di fatto, per quanto manchino altri elementi necessari per una esauriente discussione (ed in primo luogo i gradi di depolarizzazione delle righe Raman) si può ritenere come probabile per la molecola del fluorene la simmetria C_{2v} quale le competerebbe in base alla ordinaria sua formula chimica.

Concludendo da un esame anche se necessariamente sommario e di primo orientamento si può affermare che la simmetria molecolare degli idrocarburi studiati in questa Nota si accorda con quella prevista dai chimici. Una ricerca ulteriore, che spero poter presto eseguire nello spettro ultrarosso, mi permetterà di approfondire ulteriormente questo studio.

Chimica. — *Piridino-2, 3-triazoli 8-sostituiti*⁽²⁾. Nota⁽³⁾ di G. CHARRIER e M. IORIO, presentata dal Socio M. BETTI.

Mentre sono stati preparati numerosi piridino-3, 4-triazoli⁽⁴⁾ e per alcuni di essi è stata anche messa in evidenza farmacologicamente una notevole azione analettica⁽⁵⁾ non abbiamo trovato traccia nella letteratura chimica di piridino-2, 3-triazoli N-sostituiti della formula generale



Soltanto è stato preparato da Tschitschibabin e Kirssanow⁽⁶⁾ il 2, 3-piridino-triazolo non sostituito (aziminocomposto) per azione dell'acido

(1) FERMI, «Mem. R. Acc. d'Italia», 3 (1933).

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologica della R. Università di Bologna.

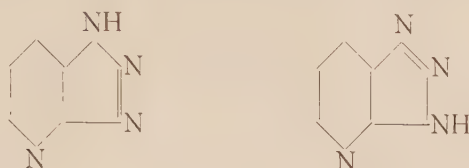
(3) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1937.

(4) E. KOENIGS e G. JUNG, «J. prakt. Chem.» [2], 245, 152, 1933; E. KOENIGS, H. BUEREN e H. JUNG, «Ber.», 69, 2690, 1936; O. BREMER, «Ann.», 514, 279, 1934; 518, 274, 1935; 521, 286, 1936; 529, 288, 1937. J. REITMANN, *Abh. aus den Forschungstätten der J. G. Farbenindustrie A. G.* «Medizin u. Chemie», III, 399, 1936.

(5) J. REITMANN, loc. cit. e KOENIGS, BUEREN e JUNG, loc. cit.

(6) «Ber.», 60, 766, 1927.

nitroso sulla 2, 3-diaminopiridina. A questo composto secondo Bremer ⁽¹⁾, data la sua formazione, si possono attribuire le due formule



e risulta quindi fondamentalmente diverso strutturalmente dai composti da noi per primi qui descritti che si debbono considerare analoghi eterociclici della serie piridinica degli N-fenilbenzotriazoli e precisamente del 2-N-fenilbenzotriazolo



La mancanza della conoscenza dei 2, 3-piridinotriazoli N-sostituiti riesce tanto più difficilmente spiegabile, inquantochè queste sostanze si trovano collegate ad aminoazoderivati piridinici da anni introdotti in terapia per il trattamento perorale di malattie infettive del sistema urogenitale, che hanno acquistato grande importanza, come il pyridium ⁽²⁾ (azophene, mallophene) e la neotropina ⁽³⁾ (niazio).

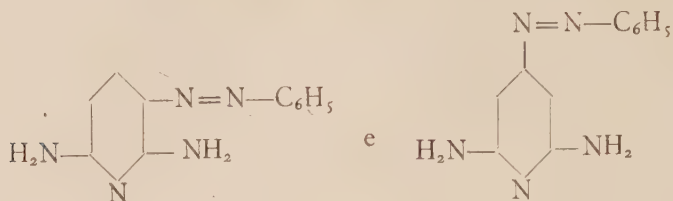
Queste sostanze infatti nel tubo gastroenterico vengono prontamente assorbite e in massima parte eliminate per la via dei reni, colorando l'orina in rosso intenso e comunicandole proprietà battericide: inoltre possedendo notevole azione anestetica locale, calmano rapidamente il dolore degli organi coi quali vengono in contatto durante l'eliminazione e pare anche si fissino in parte sulle mucose urogenitali bonificando questo terreno da ogni vegetazione microbica. Per alcuni anni queste sostanze furono considerate come

(1) « Ann. », 514, 281, 1934.

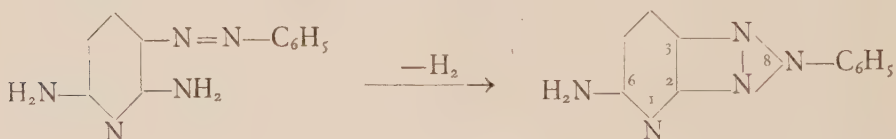
(2) Patenti americane: A. PP. 1680108, 1680109, 1680111; D. R. P. 515781; A. PP. 1724305, 1820483; patenti americane su omologhi e derivati analoghi al pyridium: A. PP. 1680108, 1830300, 1856602, 1827680, 1874655; patente inglese E. P. 311349. Il neopyridium è il sale sodico dell'azoaminoderivato ottenibile per copulazione dell'acido antranilico diazotato colla 2, 6-diaminopiridina, patente americana A. P. 1680110. Altri brevetti americani riguardanti composti analoghi del pyridium sono i seguenti: A. PP. 1856601, 1874656.

(3) D. R. P. 543288; M. DOHRN e P. DIEDRICH, « Med. Mitt. d. Schering-Kahlbaum A. G. », Jahrg. 2, Heft 7, 1930. Nella patente austriaca 127 795 viene descritto il prodotto di copulazione ottenuto dall'1-fenil-2, 3-dimetil-4-amino-5-pirazolone diazotato colla 2, 6-diaminopiridina.

miscugli di aminoazoderivati piridinici, ad es., il pyridium si riteneva costituito da un miscuglio dei monocloridati dei due diaminoazoderivati piridinici seguenti ⁽¹⁾



e soltanto una comunicazione della firma Boerhinger und Söhne, concessionaria del pyridium americano in Europa, avvertiva che il pyridium era costituito dal cloridrato puro della 2, 6-diamino-3-benzolazopiridina, senza portar prove scientifiche in merito. La deidrogenazione degli o-aminoazocomposti derivanti dalla 2, 6-diaminopiridina, oltrechè procurarci la conoscenza dei piridino-1, 2-triazoli 8-N-sostituiti non ancora noti, poteva fornire, applicata al pyridium e alla neotropina, una conferma attesa della loro struttura non ancora con tutta sicurezza stabilita. Infatti se il pyridium e la neotropina sono effettivamente o-aminoazoderivati, la loro deidrogenazione, per una reazione generale, deve portare secondo lo schema seguente a 8-derivati del piridino-2, 3-triazolo ⁽²⁾



Pyridium

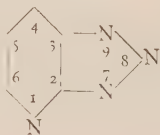
I.

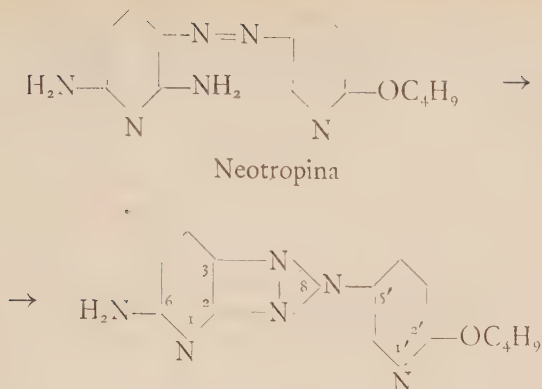
6-amino-8-fenil-piridino-2,
3-triazolo

Aghi bianchi dall'alcool o dal
benzolo P. F. 215°

(1) H. MAIER-BODE e J. ALTPETER, *Das Pyridin und seine Derivate in Wissenschaft und Technik*, Knapp, Halle, 1934.

(2) La nomenclatura da noi adottata è quella di Bremer [« Ann. », 514, 281, 1934]





II.

6-amino-8, (2'-butossi-5'-piridil)-piridino-2,
3-triazolo

Minuti cristalli gialli P. F. 212°

Se invece non hanno la costituzione di o-aminoazoderivati non sarà possibile realizzare questa trasformazione. Se poi si tratta di miscugli dei due aminoazoderivati orto- e meta-, soltanto una parte soggiacerà alla deidrogenazione e rimarrà inalterata la parte di metaminoazoderivato presente.

Le nostre previsioni si sono completamente avverate avendo potuto con facilità, impiegando il metodo di deidrogenazione degli o-aminoazoderivati con ammoniacato ramico di M. P. Schmidt e A. Hagenböcker⁽¹⁾ già da uno di noi utilmente applicato tra l'altro alla deidrogenazione del 4-fenilazo-5-aminoacenaftene⁽²⁾, ottenere i primi rappresentanti dei piridino-2, 3-triazoli 8-N-sostituiti e dimostrare così la costituzione di o-aminoazoderivati tanto del pyridium che della neotropina.

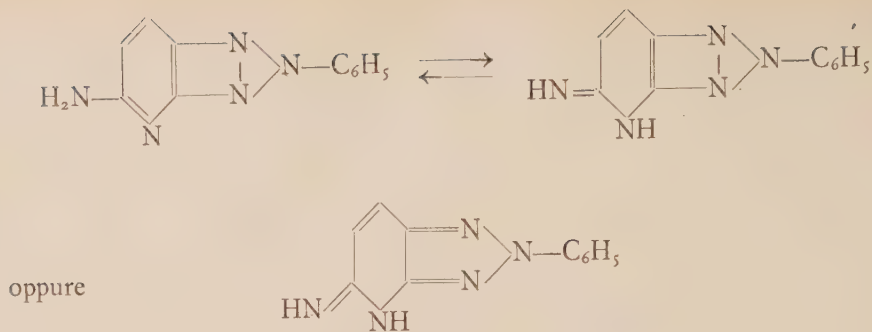
Gli 8-N-derivati dei piridino-2, 3-triazoli che noi abbiamo ottenuto per deidrogenazione del pyridium rispettivamente della neotropina sono sostanze bianche o leggermente paglierine o gialle, solubili discretamente nei comuni solventi organici, facilmente solubili negli acidi diluiti acquosi, insolubili nelle soluzioni acquose degli alcali caustici e dei carbonati alcalini. Le soluzioni nei solventi organici sono dotate di intensa fluorescenza azzurra. Possono presentare la tautomeria già constatata da Tschitschibabin⁽³⁾ e da G. B. Crippa e collaboratori⁽⁴⁾ che si può rappresentare per il 6-amino-8-fenil-piridino-2, 3-triazolo (I) collo schema seguente:

(1) KALLE, Patentanm. K. 60493, IV/12; «Ber.», 54, 2191-2201, 1921.

(2) G. CHARRIER e A. BERETTA, «Gazz. Chim. Ital.», 55, 748, 1925.

(3) Loc. cit. e «Bull.», 5, 761, 1936; «Ber.», 54, 814, 1921.

(4) G. B. CRIPPA e M. LONG, «Gazz. Chim. Ital.», 64, 83 1934; G. B. CRIPPA ed E. SCEVOLA, ibidem, 67, 327, 1937.



I 6-amino-piridino-2, 3-triazoli da noi preparati non sono diazotabili nelle condizioni ordinarie; probabilmente con sviluppo di azoto si trasformano secondo le concentrazioni e la qualità degli acidi impiegati nella diazotazione, in ossi- od alogeno-derivati analogamente a quanto avviene colle 2-, 4- e 6-aminopiridine. La diazotazione probabilmente potrà venir effettuata, il che stiamo verificando, facendo agire su questi 6-aminocomposti piridino-2, 3-triazolici il nitrito d'amile in soluzione alcoolica in presenza di alcoolato sodico all'ebollizione o trattando il sodiocomposto del 6-amino-derivato in soluzione eterea con nitrito d'amile ⁽¹⁾.

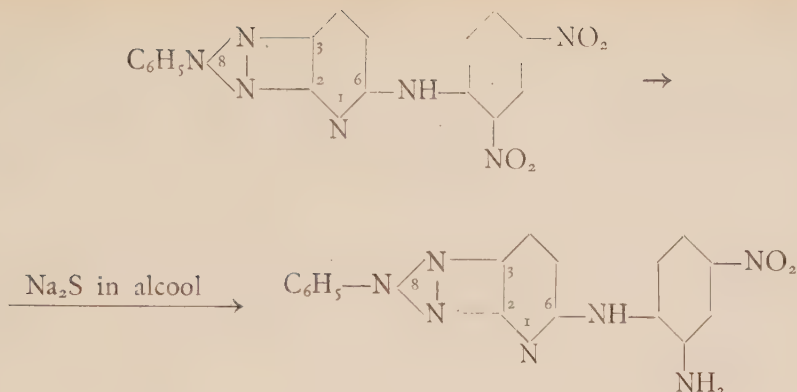
In tal modo, analogamente a quanto si verifica colle α -aminopiridine, si potranno avere non soltanto per copulazione dagli aminopiridinotriazoli da noi preparati, così diazotati, ossiazo- e amino-azocomposti, ma colle diazoreazioni di sostituzione si otterranno derivati piridino-2, 3-triazolici, difficilmente accessibili per altra via, per sostituzione dell'aminogruppo coll'idrogeno, coll'ossidrilico, cogli alogeni, col gruppo CN , NO_2 , ecc.

L'acilazione dei 6-amino-piridino-2, 3-triazoli da noi descritti si compie in modo normale e abbiamo ottenuto l'acetilderivato del 6-amino-8-fenil-2, 3-triazolo e il corrispondente benzoilderivato.

Un'altra reazione che si potrebbe effettuare spostando l'equilibrio tautomerico dalla forma diiminica completamente nell'aminoforma, consisterebbe nella condensazione col 2, 4-dinitroclorbenzolo, da uno di noi in passato impiegata con tanto frutto nella caratterizzazione degli aminoazoderivati ⁽²⁾: dal 6-amino-8-fenilpiridino-2, 3-triazolo (I) si dovrebbe avere il seguente composto, che con solfuro sodico in soluzione alcoolica potrebbe venir ridotto parzialmente nel nitro-aminoderivato corrispondente:

(1) TSCHITSCHIBABIN e RJASANZEW, « Journ. Russ. phys.-chem. Ges. », 47, 1571, 1915; « C. B. », II, 228, 1916; TSCHITSCHIBABIN, « Journ. Russ. phys.-chem. Ges. », 50, 512, 1918; « C. B. », III, 1022, 1923.

(2) G. CHARRIER e A. BERETTA, « Gazz. Chim. Ital. », 53, 729, 1923.



L' α -aminopiridina reagisce in questo senso col 2, 4-dinitroclorbenzolo e anche il 6-amino-8-fenilpiridino-2, 3-triazolo fornisce un composto giallo, che col solfuro sodico incupisce il colore sino a rosso carico; però la costituzione di questo prodotto non è stata ancora sicuramente stabilita.

Analogamente a quanto si osserva col pyridium e colla neotropina le proprietà dei piridino-2, 3-triazoli da noi preparati sono quelle di basi deboli monoacide neutre verso il tornasole, che si riscontrano pure nei piridino-3, 4-triazoli alchilati, arilati o sostituiti con radicali piridinici all'azoto in contrapposto coi corrispondenti piridino-3, 4-triazoli contenenti l' NH non sostituito che presentano reazione anfotera. I sali vengono facilmente idrolizzati dall'acqua e anche dall'alcool etilico: i numeri ottenuti dall'analisi del cloridrato, ad es., dimostrano l'idrolisi di questo sale, il cloroaurato si idrolizza completamente per lavaggio con HCl alcoolico, il cloroplatinato invece è più stabile e corrisponde a una base monoacida.

Per lo studio dell'azione analettica dei 6-amino-piridino-2, 3-triazoli da noi studiati si pone come primo problema la loro solubilizzazione in acqua: non abbiamo ancora stabilito se la loro funzione aminica si comporta normalmente col formaldeidbisolfito e col formaldeidsolfossilato sodico, poichè se così fosse in questo modo facilmente si potrebbero portare in soluzione questi composti praticamente insolubili in acqua.

Le ricerche che abbiamo iniziato sui prodotti di deidrogenazione degli o-amino-azoderivati piridinici e di cui abbiamo dato nella presente Nota un cenno preliminare verranno proseguite. La parte sperimentale sarà pubblicata nei prossimi fascicoli della « Gazzetta Chimica Italiana ».

Conclusione. — Abbiamo dimostrato che il pyridium e la neotropina sono effettivamente o-amino-azoderivati piridinici, trasformandoli per deidrogenazione con soluzione idroalcoolica di ammoniacato ramico in 6-amino-piridino-2, 3-triazoli 8-sostituiti sinora ignoti, dei quali abbiamo rese note le principali proprietà.

Chimica (Chimica-fisica). — *Sulla velocità di dissoluzione del piombo negli acidi*⁽¹⁾. Nota II⁽²⁾ di G. TEDESCHI, presentata dal Corrisp. O. SCARPA.

In una precedente pubblicazione⁽³⁾ ho iniziato lo studio della cinetica della dissoluzione del piombo negli acidi ed ho considerato l'azione dell'acido solforico determinando l'influenza della concentrazione dell'acido stesso e della temperatura sulla velocità della reazione.

In questa Nota espongo i risultati delle esperienze effettuate con l'acido cloridrico.

Il piombo compatto si discioglie con estrema lentezza nell'acido cloridrico e la corrosione che generalmente si nota in pratica sarebbe dovuta, secondo Ronceray⁽⁴⁾, a una ossidazione da parte dell'ossigeno dell'aria e una successiva dissoluzione dell'ossido formato nell'acido, anzichè ad una reazione diretta fra il piombo e l'acido cloridrico. Dalle mie esperienze risulta che il piombo spugnoso invece reagisce con velocità apprezzabile sviluppando idrogeno secondo lo schema $\text{Pb} + 2 \text{HCl} = \text{Pb Cl}_2 + \text{H}_2$.

L'andamento della reazione può quindi essere seguito determinando ai diversi tempi la quantità di idrogeno che si sviluppa. Ferme restando le altre condizioni e cioè la concentrazione dell'acido e la temperatura, questo sviluppo è risultato, nelle esperienze di cui nel seguito, pressochè costante per parecchie ore: è stato quindi possibile effettuare una serie di misure analoghe a quelle riportate nella precedente Nota.

Tuttavia la riproducibilità delle misure è apparsa da principio meno buona che nel caso della reazione del piombo spugnoso con l'acido solforico e l'esecuzione delle esperienze è stata quindi assai più difficile e delicata.

Una delle cause che impedivano la buona riuscita delle esperienze era costituita dalla cristallizzazione del Pb Cl_2 sulla superficie del piombo; evitando quindi tutte le cause che favoriscono la formazione di tale deposito (rinnovando spesso l'acido, evitando raffreddamenti e non prolungando eccessivamente le singole misure, soprattutto nelle condizioni in cui la velocità di reazione era più elevata) sono riuscito ad ottenere dei risultati del tutto soddisfacenti.

Il piombo spugnoso era preparato allo stato di elevata purezza per riduzione elettrolitica di PbO o di PbO_2 in acido solforico al 10 % circa;

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica e Chimica fisica del R. Politecnico di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 agosto 1937.

(3) Questi « Rendiconti », XXVI, fasc. 11, 1937, p. 641.

(4) Vedi P. RONCERAY, « Bull. Soc. Chim. » (5), 3, 1294, 1936.

veniva poi accuratamente lavato con acqua fino a totale eliminazione dell'acido solforico e messo a contatto con l'acido cloridrico.

La reazione complessiva $\text{Pb} + 2 \text{HCl} = \text{Pb Cl}_2 + \text{H}_2$ veniva seguita manometricamente secondo la disposizione descritta nella Nota I a cui si rimanda per maggiori dettagli.

In un primo tempo ho operato con soluzioni circa 3-4 normali: la tabella I riporta i dati di una serie di misure effettuate per determinare l'influenza della concentrazione dell'acido sulla velocità della reazione.

TABELLA I.

Volume palloncino = 130 cc. $\text{Pb} \approx 15 \text{ gr. (da PbO}_2\text{)}$
 Volume Pb + Acido = 70 cc. Temperatura 40°
 Volume rimanente = 60 cc.

C	$\frac{\Delta P}{\Delta \tau}$	$\frac{\Delta n}{\Delta \tau}$	$K = \frac{\Delta n}{\Delta \tau} \cdot \frac{1}{C^4}$
3.1	3.5	$7.7 \cdot 10^{-7}$	$8.35 \cdot 10^{-9}$
3.6	5.7	$12.6 \cdot 10^{-7}$	$7.5 \cdot 10^{-9}$
4.34	11.8	$26. \cdot 10^{-7}$	$7.3 \cdot 10^{-9}$

C = concentrazione dell'acido cloridrico in mol/litro.

$\frac{\Delta P}{\Delta \tau}$ = aumento della pressione per un minuto in mm. di tetralina ($d_{15}^\circ = 0.973$).

$\frac{\Delta n}{\Delta \tau}$ = grammimolecole di idrogeno sviluppate in un minuto.

Da queste prime esperienze è risultato che la velocità di dissoluzione del piombo, in queste condizioni, cresce in modo assai elevato con l'aumentare della concentrazione dell'acido cloridrico e che l'ordine apparente della reazione è circa 4 (vedi colonna quarta della Tabella I). Tale fatto è simile a quello osservato da Centnerszwer⁽¹⁾ per la dissoluzione dello stagno e del cadmio nell'acido cloridrico.

Apparirebbe quindi un legame di analogia fra la dissoluzione dello stagno, del cadmio e del piombo nell'acido cloridrico, e ciò fa pensare che queste tre reazioni siano rette dallo stesso meccanismo. Tuttavia l'equazione $\frac{\Delta n}{\Delta \tau} = K C^4$, precedentemente adoperata nella tabella I, non ha che un valore puramente formale ed è valida solo per concentrazioni sufficientemente elevate. Infatti esperienze eseguite con acido più diluito (vedi tabella II) mostrano che la velocità di reazione, con concentrazioni inferiori a 2.5 N,

(1) M. CENTNERSZWER, « Zs. Phys. Chem. », A 137, 352, 1928 e A 141, 167, 1929.

segue un andamento che si scosta nettamente da quello rappresentato dalla equazione di Centnerszwer.

TABELLA II.

Volume palloncino = 130 cc. Pb \approx 15 gr. (da PbO₂)
 Volume Pb + Acido = 88 cc. Temperatura 40°
 Volume rimanente = 42 cc.

C	$\frac{\Delta P}{\Delta \tau}$	$\frac{\Delta n}{\Delta \tau}$	$K = \frac{\Delta n}{\Delta \tau} \cdot \frac{1}{C^4}$
0.91	0.216	$0.333 \cdot 10^{-7}$	$48.6 \cdot 10^{-9}$
1.36	0.605	$0.933 \cdot 10^{-7}$	$27.3 \cdot 10^{-9}$
1.84	1.06	$1.635 \cdot 10^{-7}$	$14.25 \cdot 10^{-9}$
2.45	2.01	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$8.6 \cdot 10^{-9}$
2.9	3.54	$5.46 \cdot 10^{-7}$	$7.75 \cdot 10^{-9}$
3.4	5.76	$8.89 \cdot 10^{-7}$	$6.7 \cdot 10^{-9}$
4	11.6	$17.9 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-9}$

Una discussione sul meccanismo della reazione risulta ancora prematura e mi riservo di tornare sull'argomento quando, completate altre esperienze attualmente in corso, avrò gli elementi necessari per tentare una interpretazione dei fatti osservati.

Altre esperienze sono state effettuate per studiare l'influenza della temperatura e la tabella III riporta i dati di alcune misure.

È risultato che la velocità di reazione viene all'incirca raddoppiata per un aumento di 10° nella temperatura e questo sia col piombo ottenuto da PbO che da PbO₂.

L'energia di attivazione calcolata in base all'equazione di Arrhenius $\left(\ln K = -\frac{E}{RT} + B \right)$ risulta uguale a 11880 ± 400 cal., valore che è circa uguale a quello dell'energia di attivazione della reazione fra il piombo e l'acido solforico (11600 cal.⁽¹⁾).

L'elevata influenza che ha la concentrazione dell'acido sulla velocità della reazione e l'ordine di grandezza del coefficiente di temperatura inducono a pensare che la velocità della reazione di dissoluzione del piombo nell'acido cloridrico sia dominata dal fenomeno chimico e non da quello della diffusione.

(1) Vedi Nota citata.

TABELLA III.

C	t_0	$\frac{\Delta n}{\Delta \tau}$	E
1.2	30°	$0.89 \cdot 10^{-7}$	11800 cal.
	40°	$1.67 \cdot 10^{-7}$	
3.67 (1)	25.2°	$4.12 \cdot 10^{-7}$	12040 cal.
	30°	$5.68 \cdot 10^{-7}$	11470 »
	35°	$7.75 \cdot 10^{-7}$	12250 »
	40°	$10.6 \cdot 10^{-7}$	
4	30°	$8.8 \cdot 10^{-7}$	11850 cal.
	40°	$16.5 \cdot 10^{-7}$	
media . . .			11882 cal.

Da quanto è stato esposto si può quindi riassumere che (adoperando del piombo spugnoso di elevata purezza e nei limiti delle concentrazioni dell'acido usate):

1° il piombo spugnoso reagisce con l'acido cloridrico con una velocità apprezzabile ed è possibile, operando con opportune cautele, ottenere nelle varie misure dati riproducibili e comunque fra loro confrontabili;

2° la concentrazione dell'acido ha grande influenza sulla velocità della reazione. Non si è trovata una relazione semplice fra concentrazioni e velocità di reazioni; solo con concentrazioni superiori a 2.5 N la velocità di reazione varia approssimativamente con la quarta potenza della concentrazione analogamente a quanto trovò Centnerszwer per la dissoluzione dello stagno e del cadmio nell'acido cloridrico;

3° il coefficiente di temperatura della reazione fra piombo e acido cloridrico, come quello della reazione con l'acido solforico, è dell'ordine di grandezza di quelli che generalmente presentano le reazioni chimiche dirette.

Porgo i miei sentiti ringraziamenti al chiar.mo prof. O. Scarpa che mi ha incoraggiato a proseguire in queste ricerche.

(1) La serie di esperienze che corrisponde alla concentrazione dell'acido di 3.67 è stata effettuata con piombo ottenuto da PbO. Nelle altre invece si usò piombo ottenuto da PbO₂.

Fisiologia generale. — *Contenuto in acido ascorbico del fegato di rana in diverse condizioni sperimentali*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di G. SCOZ e E. TRIA, presentata dal Corrisp. S. VISCO.

L'acido ascorbico esercita, come è universalmente riconosciuto, un'azione attivatrice o inibitrice *in vitro* su numerose attività enzimatiche (esterasi epatica⁽³⁾, α e β amilasi⁽⁴⁾ ecc.), ed in particolar modo su tutte le attività enzimatiche legate al metabolismo proteico endocellulare (catepsine⁽⁵⁾, arginasi⁽⁶⁾). L'azione di questa sostanza, che però, da quanto risulta in letteratura, sembra la più importante e la più sicuramente stabilita, è quella di regolare il sistema —SH e —S—S— , al cui equilibrio il sistema enzimatico endocellulare è subordinato (Purr⁽⁷⁾).

Se questa ipotesi è esatta, se cioè l'acido ascorbico regola nell'organismo l'attività degli enzimi proteici endocellulari, devono esistere probabilmente delle relazioni tra contenuto in acido ascorbico dei tessuti e intensità ed orientamento del metabolismo proteico endocellulare.

Che così sia in realtà è dimostrato dai seguenti fatti:

1° Dalla comparsa e dall'aumento della concentrazione dell'acido ascorbico in tutti quei tessuti animali o vegetali nei quali si iniziano o si esaltano dei processi di sintesi proteica: così, per esempio, nell'uovo con lo sviluppo dell'embrione (Hou⁽⁸⁾), nei germogli delle piante (Hausen⁽⁹⁾), nel fegato di cavia e di ratti in rapido aumento di peso comunque provocato (Scoz⁽¹⁰⁾, Scoz e Cattaneo⁽¹¹⁾) nei tumori in attiva proliferazione (Edelbacher⁽¹²⁾) ecc.

2° Dalla diminuzione della concentrazione dell'acido ascorbico nei tessuti in tutti quei casi nei quali sia esaltato naturalmente o artificialmente il metabolismo cellulare (Scoz^(10, 11)), tanto nel ratto quanto nella cavia e

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1937.

(3) W. v. PANTSCHENKO-JUREWICZ u. H. KRAUT, «Biochem. Zs.», 286, 407, 1936.

(4) A. PURR, «Bioch. J.», 28, 1141, 1934.

(5) P. KARRER u. F. ZEHENDER, «Helv. Chem. Acta», 16, 701, 1933.

(6) S. EDELBACHER u. F. KOLTER, «Zs. physiol. Chem.», 227, 99, 1934.

(7) A. PURR, «Biochem. J.», 27, 1703, 1933 e 29, 5, 13, 1935.

(8) C. H. HOU, «Science», 82, 423, 1935.

(9) S. v. HAUSEN, «Biochem. Zs.», 288, 378, 1936.

(10) G. SCOZ, «Archiv. Sc. Biol.», 1936.

(11) G. SCOZ e C. CATTANEO, «Archiv. Sc. Biol.», 1937 (in corso di stampa).

(12) S. EDELBACHER u. A. JUNG, «Hoppe Seyler's Zeit. Physiol. Chem.», 227, 114, 1934.

in quest'ultima anche se l'animale introduce giornalmente fino a 50 Mg. di acido ascorbico (De Caro ⁽¹⁾).

3° Dall'aumento dell'eliminazione dell'acido ascorbico nell'uomo ogni qual volta in conseguenza di processi patologici le condizioni generali di questo presentano un peggioramento (Scoz ⁽²⁾) e dall'aumento del fabbisogno di questa sostanza nell'ipertiroidismo provocato, nella gravidanza ecc. (Widenbauer ⁽³⁾).

Allo scopo di eseguire uno studio sistematico più esteso sulle relazioni tra contenuto in vitamina C dei tessuti e intensità ed orientamento del metabolismo abbiamo iniziate le seguenti ricerche tendenti a dimostrare come vari la concentrazione dell'acido ascorbico del fegato in corrispondenza a variazioni del metabolismo proteico endogeno in animali diversi dai mammiferi e precisamente nelle rane.

TECNICA ED ESPERIMENTI.

Le esperienze sono state eseguite su fegati di rana, nei quali si è determinato l'acido ascorbico nella seguente maniera:

Il tessuto fresco viene pesato in pesa filtri, pestato con sabbia di quarzo, ed infine trattato con acido tricloroacetico al 10 %. Si è aggiunta sempre la stessa quantità di acido tricloroacetico, e precisamente 10 cc., a quantità di fegato presso a poco eguali (da 0.8 a 1 gr.), il che si è potuto ottenere sacrificando due, tre rane per ogni esperienza.

Allo scopo di impedire la ossidazione dell'acido ascorbico, si è aggiunto, secondo Fujita ⁽⁴⁾, per ogni campione 10 cc. di soluzione al 2 % di acido metafosforico. Si è prelevato un'aliquota del filtrato (15 cc.) che si è titolata in piccola capsula di porcellana col reattivo di Tillmans $n/1000$ per mezzo di una microburetta.

Le esperienze possono essere distinte in quattro gruppi:

1° Esperienze con rane tenute ad alimentazione normale, ed in condizioni normali di vita.

Sono state eseguite oltre venti determinazioni, sacrificando circa cinquanta rane, ed i risultati ottenuti sono riassunti nella tabella I, nella quale sono riportate le quantità di vitamina C presenti nel fegato, ed in qualche caso, quando la determinazione è stata eseguita nel fegato di una sola rana, anche il peso corporeo di questa.

I dati raccolti nella tabella dimostrano che non esiste alcuna relazione tra peso corporeo e quantità di acido ascorbico del fegato.

(1) L. DE CARO (ricerche non ancora pubblicate).

(2) G. SCOZ, « Fisiologia e Medicina », 7, 1936.

(3) F. WIDENBAUER, « Klin. Ws. », 16, 600, 1937.

(4) A. FUJITA, D. IWAKAKE u. TADAO MIJATA, « Bioch. Zeit. », 277, 296, 1935.

TABELLA I.

Acido ascorbico del fegato di rane ad alimentazione normale.

	Acido ascorbico mg. % gr. di fegato	Peso corporeo gr.
1	23	—
2	22.5	—
3	21.9	—
4	21.8	—
5	21	14
6	20.1	—
7	19.6	—
8	19.5	19
9	19.5	—
10	19.4	—
11	19.2	12
12	19	—
13	18.6	—
14	18.5	17
15	18	—
16	18	—
17	17.5	—
18	17.5	—
19	16.4	—
20	16	—
	Media 19.3	

Le oscillazioni tra un animale e l'altro, in vero abbastanza notevoli, possono forse dipendere dal fatto che, come in seguito sarà detto, le determinazioni non sono state probabilmente eseguite lasciando passare lo stesso tempo tra il momento del pasto ed il momento in cui gli animali venivano sacrificati. In ogni modo i valori medi sono eguali a quelli trovati nel ratto e nella cavia da Scoz, e nel coniglio da Jamagami ⁽¹⁾.

(1) S. YAMAGAMI, K. NOMURA u. N. NISHIGAKI, « Kekkaku », 13, 42, 1935.

2° Esperienze con rane tenute a digiuno ed obbligate a muoversi. Le rane di cui ci siamo serviti in queste determinazioni, venivano tenute in una bacinella nella quale era contenuta dell'acqua che si cambiava tutti i giorni. Come si sa, le rane resistono molto bene al digiuno, e pertanto allo scopo di aumentare i fenomeni catabolici, esse venivano fatte muovere due volte al giorno per mezz'ora per mezzo di un recipiente di vetro che si faceva ruotare con un motorino ed un'adatta resistenza.

I dati raccolti nella tabella II dimostrano che già dopo otto giorni di tale trattamento, il contenuto di acido ascorbico nel fegato diminuisce, e la diminuzione va sempre accentuandosi col prolungarsi del periodo di digiuno e di lavoro muscolare.

TABELLA II.

Acido ascorbico del fegato di rane tenute a digiuno ed obbligate a muoversi.

Controlli: valori medio 19.3 — massimo 23 — minimo 16.

Dopo 8 giorni di digiuno		Dopo 15 giorni di digiuno	
1	22	1	15
2	20.6	2	14.6
3	18	3	14.5
4	18	4	14
5	17	5	13.8
6	16.5	6	13.6
7	16	7	13.2
8	16	8	13.1
9	15	9	13.1
10	15	10	12.8
		11	12.6
		12	12.5
		13	11
		14	11
	Media 17.4		Media 13.2

3° Esperienze con rane a digiuno, obbligate a muoversi e trattate con tiroxina.

TABELLA III.

Acido ascorbico del fegato di rane tenute a digiuno, trattate con tiroxina ed obbligate a muoversi.

Controlli: valori medio 19.3 — massimo 23 — minimo 16.

Giorni dall'inizio del trattamento con tiroxina			
8	10	13	15
13	15.6	14	14.1
12	14	11.8	13.2
11.5	13.5	11	12.1
11.2	12.5	10	10.9
11	12	9.8	10.4
10.4	10.9	—	—
10.2	—	—	—
11.3	13.1	11.3	12.1

Allo scopo di esaltare ulteriormente i fenomeni catabolici, alle rane tenute a digiuno ed obbligate a muoversi col dispositivo sopra descritto veniva iniettato per via endoperitoneale 0.5 Mg. di tiroxina Erba per tre volte in tre giorni consecutivi.

Le determinazioni eseguite già dopo tre giorni dalla prima iniezione dimostrano una notevole diminuzione e dei valori medi e dei valori massimi e minimi di acido ascorbico rispetto agli animali controllo.

4° Esperienze con rane rialimentate e trattate con diiodotirosina.

Allo scopo di determinare negli animali un esaltamento dei processi anabolici, alcune rane del lotto precedente dopo quindici giorni del trattamento con tiroxina, vennero nuovamente alimentate e trattate con diiodotirosina (50 Mg. per via endoperitoneale).

Già al terzo giorno dall'inizio di tale trattamento, i valori, pur non raggiungendo ancora il normale sono superiori a quelli trovati nel periodo precedente di digiuno. In seguito tali valori vanno sempre più aumentando fino a divenire nettamente superiori a quelli degli animali di controllo il che si ha dopo circa undici giorni, dopo di che i valori si abbassano e rimangono presso a poco eguali a quelli degli animali controllo.

TABELLA IV.

Acido ascorbico del fegato di rane rialimentate e trattate con diodo tiroxina, dopo 15 giorni di digiuno e dopo trattamento con tiroxina

Controlli: valori medio 19.3 - massimo 23 - minimo 16.

Giorni di rialimentazione					
3	4	6	9	11	13
15.9	19	21	26.2	28.2	25.6
15.6	19	19.8	25.6	28.2	24.2
15.4	17	19.4	24.3	27.5	24.2
14.2	17	19.2	22.4	27.4	21.5
14.2	—	19	21.2	21	21.3
—	—	18.4	—	19	—
—	—	17.2	—	—	—
15.1	18	19.1	23.9	25.2	23.4

Conclusioni. — È stato determinato il contenuto di acido ascorbico del fegato di rana in diverse condizioni sperimentali.

Il metodo di Tillmans di cui ci siamo serviti non è forse assolutamente specifico ma specialmente dopo le modificazioni ad esso apportate da v. Euler e Martius e da Fujita, esso è allo stato attuale delle nostre conoscenze, il più pratico, il più attendibile ed il più largamente usato.

Le quantità di acido ascorbico trovato con questo metodo nel fegato di cavia oscillano entro limiti piuttosto ampi, tra 16 e 23 Mg. per 100 g. di fegato fresco. Queste oscillazioni sono dello stesso ordine di grandezza di quelle trovate da Scoz e da Scoz e Cattaneo nella cavia e nel ratto e tali variazioni dipendono probabilmente dal non aver noi tenuti gli animali a digiuno per qualche ora prima delle determinazioni. Esse sono anche analoghe a quelle trovate nei mammiferi da altri ricercatori.

Come risulta dalle tabelle I-V, e dalla tabella riassuntiva, la quantità di acido ascorbico varia con la intensità e con l'orientamento del metabolismo proteico endocellulare. Nell'animale a digiuno queste variazioni sono relativamente piccole e diventano evidenti soltanto quando si associa al digiuno il movimento, allo scopo di esaltare il metabolismo endogeno. E ancora più notevole diviene la diminuzione della concentrazione dell'acido ascorbico nel fegato, se l'animale tenuto a digiuno viene trattato con tiro-

xina allo scopo di esaltare ulteriormente i processi catabolici proteici. In tale caso si ha un abbassamento della concentrazione dell'acido ascorbico dal valore medio di 18 Mg. per cento fino a 10 Mg. per cento, analogamente a quanto si osserva nelle stesse condizioni con l'identico trattamento nella cavia e nel ratto.

TABELLA V RIASSUNTIVA.

	Acido ascorbico mg. % gr. Valori:		
	Medio	Massimo	Minimo
1 Controlli	19.3	23	16
2 Rane a digiuno:			
dopo 8 giorni	17.4	22	15
» 15 »	13.2	15	11
3 Rane a digiuno e trattate con tiroxina:			
dopo 8 giorni	11.3	13	10.2
» 10 »	13.1	15.6	10.9
» 13 »	11.3	14	9.8
» 15 »	12.7	17.1	10.4
4 Rane rialimentate e trattate con diiodo tiroxina:			
dopo 3 giorni	15.1	15.9	14.2
» 4 »	18	19	17
» 6 »	19.1	21	17.2
» 9 »	23.9	26.2	21.2
» 11 »	25.2	28.2	19.0
» 13 »	23.4	25.6	21.3

Nell'animale invece nel quale sono esaltati i processi di sintesi proteica col trattamento con diiodotirosina, la concentrazione dell'acido ascorbico nel fegato aumenta gradatamente fino a 28 Mg. %, analogamente a quanto si osserva nella cavia e nel ratto.

Esiste quindi un rapporto tra orientamento del metabolismo e contenuto in vitamina C del fegato. Con ciò non vogliamo dire che le variazioni delle quantità dell'acido ascorbico del fegato siano conseguenza diretta delle

variazioni del metabolismo e tanto meno ne siano la causa; vogliamo soltanto affermare che tra contenuto in vitamina C e metabolismo proteico endogeno esistono delle relazioni molto strette, sulla cui natura, allo stato attuale delle nostre conoscenze, è molto difficile pronunziarsi.

Il fatto poi che in animali appartenenti a tipi così diversi come il topo, la cavia, la rana, l'acido ascorbico varia parallelamente alle variazioni del metabolismo proteico potrebbe essere un argomento da aggiungere ai tanti altri esistenti in letteratura a sostegno dell'ipotesi che il sistema enzimatico proteico endocellulare sia lo stesso tanto negli animali omeotermi che nei pecilotermi.

Fisiologia generale. — *Determinazione elettrometrica dell'attività peptica*⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di E. TRIA. Presentata dal Corrisp. S. VISCO.

I metodi per la determinazione dell'attività peptica si basano sulle proprietà della pepsina, la quale, come è noto, allorchè viene aggiunta a soluzioni proteiche, determina in esse una diminuzione della viscosità accompagnata dalla diminuzione della quantità di azoto proteico presente, e da un aumento dei gruppi NH_2 e COOH titolabili. Anche l'attività ottica e la conducibilità elettrica variano durante l'azione peptica, ma tali variazioni non sono molto accentuate, e non si prestano pertanto ad una determinazione quantitativa.

I. — Il metodo che consiste nella determinazione dell'attività peptica per mezzo delle variazioni di viscosità è indubbiamente un metodo molto rapido e esatto, specialmente adoperando la tecnica di Northrop e Hussey⁽³⁾; quattro o cinque determinazioni possono essere eseguite in meno di un'ora con un errore probabile del 5 %. Se però le determinazioni sono fatte con soluzioni proteiche differenti, si possono avere variazioni fino al 100 %, data la enorme difficoltà di preparare soluzioni proteiche aventi identiche proprietà con diversi campioni della stessa proteina.

II. — Il metodo che consiste nella determinazione a vari intervalli di tempo dell'azoto non proteico, cioè dell'azoto che non è precipitato da una soluzione di acido tricloroacetico al 10 % e alquanto più esatto del metodo viscosimetrico. Esso ha però lo svantaggio che esiste, secondo Northrop⁽⁴⁾, una relazione diretta tra quantità di azoto non proteico prodotto e quantità

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1937.

(3) J. H. NORTHROP, A. HUSSEY, « R. G., J. Gen. Physiol. », 5, 352, 1933.

(4) J. H. NORTHROP, « J. of Gen. Physiol. », 616, 41, 1932.

di enzima, solo nel caso che si adoperino quantità molto piccole di enzima; ed evidentemente in queste condizioni la precisione del metodo non può essere molto grande.

III. — Il metodo più comunemente adoperato in questi ultimi anni, che dà dei risultati più precisi, e il cui significato chimico è ben chiaro, è il metodo che consiste nel determinare a vari intervalli di tempo l'aumento dei gruppi NH_2 e COOH .

Tale determinazione può essere eseguita in varie maniere, o in soluzione alcoolica secondo Waldschmidt-Leitz⁽¹⁾ o in formalina secondo Northrop⁽³⁾ o in acetone secondo Dyckerhoff e Tewes⁽²⁾.

Quest'ultimo metodo è forse quello che dà dei risultati meno precisi, gli altri due presso a poco si equivalgono. Secondo Northrop, con la titolazione in formalina adoperando opportuni accorgimenti si può avere una esattezza corrispondente a $\pm 0,05$ cc. di NaOH $n/50$. In realtà una precisione così grande è estremamente difficile a ottenersi. Molto spesso determinazioni da me eseguite con campioni diversi delle stesse soluzioni differivano, anche procedendo con la tecnica più accurata di $0,10 - 0,15$ cc. di NaOH $n/50$. Questo specialmente se le determinazioni venivano eseguite a ore diverse della giornata ed in condizioni di illuminazione differente. Non è facile infatti cogliere il punto finale della titolazione, quando si adoperi come indicatore la fenoltaleina in ambiente di formalina.

D'altra parte quando si vogliono studiare le diverse condizioni sperimentali per cui un enzima può essere attivato o inibito, un errore dell'ordine di grandezza di $0,10$ cc. di NaOH $n/50$ è tutt'altro che trascurabile.

Mi è sembrato pertanto indispensabile, per il proseguimento di alcuni studi sulla pepsina attualmente in corso, di modificare i metodi esistenti allo scopo di avere una sensibilità maggiore. E siccome il metodo che, e dal punto di vista teorico e per la sua relativa semplicità, mi sembra preferibile è quello di Northrop, ho cercato di modificare opportunamente questo metodo. Come si è detto, l'unica grande difficoltà che presenta il metodo di Northrop, è quello di cogliere il punto finale della reazione. Se si riesce a trovare la maniera di ovviare a questa difficoltà, il metodo può dare dei risultati perfetti.

Si è pensato in primo tempo a sostituire alla fenoltaleina un altro indicatore; ma prescindendo dal fatto che il meccanismo della reazione in ambiente di formalina è tutt'altro che ben chiaro⁽³⁾, per cui non è indifferente adoperare un indicatore piuttosto che un altro, sta di fatto che in questo modo un notevole vantaggio non si ottiene, perchè sempre difficile rimane cogliere il punto finale della reazione.

(1) WALDSCHMIDT-LEITZ, H. u., G. KÜNSTNER, « Zeitschr. f. physiol. Chem. », 171, 70, 1927.

(2) H. DYCKERHOFF, u., G. TEWES, « Zeitschr. f. physiol. Chem. », 215, 93, 1933.

(3) D. VAN SLYKE, « J. Biol. Chem. », 1926.

L'unica probabilità, a me pare, che permette di ovviare a questo inconveniente, è quello di sostituire alla titolazione in presenza di indicatore, la titolazione elettrometrica.

Si potrebbe eseguire la titolazione elettrometrica per mezzo di un potenziometro, adoperando un elettrodo a campana ad idrogeno contro un elettrodo a calomelano, e aggiungendo acidi o alcali fino ad ottenere un determinato pH costante. Ma questo metodo offre l'inconveniente che per una determinazione di questo genere occorre molto tempo per cui non è pratico quando si tratti di determinare l'attività peptica di numerose soluzioni. È d'altra parte inutile determinare volta per volta il pH finale della soluzione; quello che interessa è soltanto che il pH che si raggiunge sia sempre lo stesso.

Per raggiungere questo scopo basta servirsi di un comune elettrometro capillare, che funzioni da strumento di o e che viene intercalato tra due soluzioni, l'una quella in esame, l'altra una soluzione tampone avente un determinato pH. Come soluzione tampone mi sono servito di una soluzione di NH_4Cl e NH_3 . Entrambe le soluzioni erano tenute in due elettrodi a campana ed in esse veniva fatto gorgogliare idrogeno fino a saturazione.

Recentemente un metodo simile è stato usato da Cattaneo e Scoz⁽¹⁾ per la determinazione del potere esteratico del sangue.

ESECUZIONE PRATICA DEL METODO.

A 25 gr. di caseina Hammersten si aggiunge una piccola quantità di acqua e alcune gocce di NH_3 5n. Si continua ad aggiungere acqua agitando in modo da impedire la formazione di grumi, ed infine si aggiungono 25 cc. di HCl n. Si porta con acqua a 500 cc. in un pallone tarato.

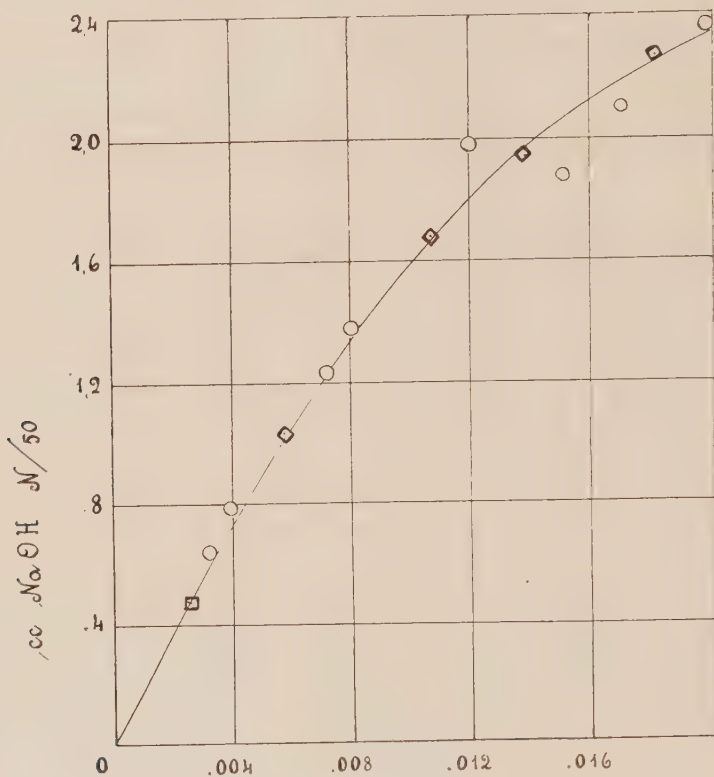
Si prelevano 10 cc. della soluzione così preparata e ad essa si aggiungono 2 cc. di una soluzione di NaOH di concentrazione tale da avere una reazione nettamente alcalina alla fenoltaleina, e tale che il colore rosso scompaia con l'aggiunta di 1 cc. di formalina.

Si prepara la soluzione di $\text{NH}_3 - \text{NH}_4\text{Cl}$, ed anche a 10 cc. di questa soluzione si aggiunge un cc. di formalina. Tale soluzione è fatta in modo che essa è leggermente più alcalina della soluzione di caseina da titolare, per cui con la fenoltaleina si ha una debole colorazione rosa.

Le due soluzioni si introducono in due elettrodi a campana di recente platinati e in esse si fa gorgogliare idrogeno per 10 minuti. I due elettrodi sono connessi tra di loro per mezzo di un tubo ad agar cloruro di potassio saturo, ed entrambi riuniti ad un elettrometro capillare. Quando la saturazione con idrogeno si è raggiunta, si osserva, chiudendo il circuito che il livello del mercurio nel capillare è più alto del punto preso come zero.

(1) C. CATTANEO e G. SCOZ, « Ann. Ist. C. Forlanini », vol. IV, n. 4, 1937.

Questo perchè, non essendo le due soluzioni allo stesso pH, si stabilisce una differenza di forza elettromotrice. Per mezzo di una microburetta si comincia ad aggiungere goccia a goccia NaOH $n/100$ alla soluzione di caseina, ed ogni volta si chiude il circuito. La differenza di forza elettromotrice va sempre più riducendosi per cui il livello del mercurio sempre più si avvi-



Pepsina: mg. N

- Determinazioni eseguite da Northrop
- Determinazioni eseguite col metodo elettrometrico

cina allo zero, fino a passare al disotto di esso. Si segna la quantità di NaOH in tal modo consumata, necessaria ad annullare la forza elettromotrice ed a portare quindi allo stesso pH le due soluzioni.

Ad altri campioni di 10 cc. della stessa soluzione di caseina si aggiungono 0,1 cc. di soluzione di pepsina alla concentrazione che si vuole studiare; questi campioni vengono tenuti in termostato a 35°,5 C. per un tempo variabile (da 15' a 24 h) dopo di che vengono titolati nella maniera sopra descritta.

La differenza tra la quantità di cc. di NaOH adoperati in queste titolazioni successive e la quantità adoperata nella prima titolazione indicano la digestione peptica ai vari intervalli di tempo.

In tale maniera si riesce ad ottenere l'esattezza di 0,1 cc. di NaOH n/100.

A titolo di esempio si riportano i valori ottenuti titolando una soluzione di caseina dopo un'ora di digestione a 35,5 C. con quantità diverse di pepsina cristallizzata di Northrop. Nella figura annessa accanto a tali valori vengono riportati i valori trovati da Northrop nelle stesse condizioni adoperando come indicatore la fenolftaleina.

Conclusioni. — Si è modificato il metodo di Northrop per la determinazione dei gruppi carbossilici messi in libertà per effetto della digestione peptica, sostituendo alla titolazione in presenza di fenolftaleina la titolazione elettrometrica per mezzo di un elettrometro capillare.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1937 (Anno XV).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Matematica. — *Curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica.* Nota⁽¹⁾ del Socio F. ENRIQUES.

In questa Nota riprendo il tema trattato nella Nota dell'aprile 1936, inserita nel volume XXIII dei « Rendiconti » della nostra Accademia, e nella Memoria pubblicata nel vol. I, ser. IV, fasc. 1, degli « Atti del Seminario matematico di Roma », porgendo una dimostrazione semplicissima di ciò che occorre per stabilire rigorosamente la proprietà caratteristica delle superficie irregolari:

date sopra una superficie irregolare due curve infinitamente vicine disequivalenti, A e A' , costruire nell'intorno del 2° ordine di A una curva A'' , successiva ad A' , e poi nell'intorno di 3° ordine una curva A''' successiva ad A'' e così via.

Il procedimento che qui viene messo in opera si libera da tutti gli espedienti tecnici che mi era occorso adoperare nei lavori sopra indicati e riesce così a soddisfare a quelle condizioni di semplicità che giova richiedere per un teorema fondamentale della teoria delle superficie.

I. — PUNTI INFINITAMENTE VICINI SOPRA UNA CURVA DI GENERE I.

Se sopra una curva f di genere I si fissa un punto A e a questo si fa corrispondere un punto vicino A' , resta determinata una trasformazione infinitesima di prima specie (AA'), che porta un altro punto P di f in un determinato punto P' .

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1937.

Si può costruire P' operando sopra serie lineari definite su f come segue.

Si assuma un punto B di f : la coppia di punti AB appartiene ad una g_2^1 in cui c'è una coppia $A'B$, infinitamente vicina ad AB , che resta definita dal contenere A' ; costruito così il punto B_1 , si determinerà similmente la coppia della g_2^1 definita da BP che contiene B_1 : essa è una coppia B_1P' , in cui il secondo punto è precisamente l'omologo di P nella trasformazione infinitesima (AA') .

Ora questa costruzione si estende in modo da darci il punto A'' , omologo di A' nella trasformazione suddetta e di A nel suo quadrato. A tale scopo si assumerà su f un altro punto C e si considererà la g_3^2 determinata dalla terna ABC , cui appartiene la terna infinitamente vicina (nell'intorno del 1° ordine) $A'B_1C$: c'è una terna di questa g_3^2 (infinitamente vicina ad ABC nell'intorno del 2° ordine e successiva ad $A'B_1C$) che resta definita dalla condizione di contenere B_1 e C_1 , punto omologo di C nella trasformazione infinitesima $(A'A)$; questa terna si compone dei punti B_1C_1 e di un punto A'' successivo ad A' e infinitamente vicino ad A nell'intorno di 2° ordine, che è precisamente l'omologo di A in $(AA')^2$.

Dopo ciò si può ancora costruire il punto A''' omologo di A in $(AA')^3$ e così via. All'uopo si assumerà su f un'altro punto D , e si considererà la g_4^3 definita dalla quaterna $ABCD$, cui appartiene la quaterna infinitamente vicina $A'B_1CD$ e la successiva (nell'intorno di 1° ordine) $A''B_1C_1D$. In questa g_4^3 c'è una determinata quaterna che contiene i punti $B_1C_1D_1$, designando D_1 l'omologo di D nella trasformazione $(A'A)$, e la quaterna così definita (infinitamente vicina ad $ABCD$ nell'intorno del 3° ordine e successiva ad $A''B_1C_1D$) riesce costituita dai punti $B_1C_1D_1$ e da un punto A''' , successivo ad A'' (nell'intorno di 3° ordine di A) che è l'omologo di A in $(AA')^3$.

2. — GRUPPI DI p PUNTI INFINITAMENTE VICINI SOPRA UNA CURVA DI GENERE p .

Ciò che si è detto per i « punti » di una curva di genere 1, si può ripetere per i « gruppi di p punti » sopra una curva K di genere p . Sieno invero A e B due gruppi di p punti, non speciali e perciò non equivalenti, sopra K , e sia A' un gruppo di p punti infinitamente vicino ad A : sulla varietà di Jacobi corrispondente a K c'è una trasformazione infinitesima (generatrice del gruppo ∞^p di trasformazioni permutabili) determinata dalla corrispondenza fra A e A' ; la trasformazione inversa di questa porta B in un determinato gruppo infinitamente vicino B_1 : per costruire B_1 basta considerare la serie lineare g_{2p}^p definita dal gruppo $A + B$, ed in questa il gruppo infinitamente vicino ad $A + B$ che resta definito dal contenere i p punti di A' ; il gruppo dei p punti residui è precisamente B_1 . In modo analogo, a partire da un altro gruppo generico di p punti, C , si può co-

struire il gruppo infinitamente vicino C_1 , che gli corrisponde nell'inversa della trasformazione infinitesima (AA') .

Ciò posto, per costruire il gruppo A'' omologo di A nella trasformazione (AA') , ovvero corrispondente ad A nel quadrato di (AA') , si procederà come segue.

Si consideri la serie lineare g_{3p}^{2p} determinata dal gruppo di $3p$ punti $G = A + B + C$, ed in questa il gruppo $G' = C + B_1 + A'$ infinitamente vicino ad $A + B + C$, che è definito dal contenere $C + B_1$, e quindi A' . Vi è nella stessa serie lineare g_{3p}^{2p} , un gruppo di $3p$ punti successivi al detto G' , ben definito dalla condizione di contenere B_1 e C_1 : questo gruppo conterrà appunto, come residuo, il gruppo A'' omologo di A' nella anzidetta corrispondenza infinitesima (AA') .

Così procedendo, coll'introdurre accanto a B e C , un altro gruppo D , e il gruppo D_1 che gli corrisponde nella trasformazione infinitesima inversa di (AA') , si potrà definire il gruppo A''' corrispondente ad A'' nella medesima corrispondenza (AA') : infatti il gruppo $A + B + C + D$ determina una serie lineare g_{4p}^{3p} , a cui appartengono i gruppi

$$\begin{aligned} D + C + B + A & \quad , \quad D + C + B_1 + A', \\ D + C_1 + B_1 + A'' & \quad , \quad D_1 + C_1 + B_1 + A''', \end{aligned}$$

che resultano successivi al primo negli intorno del 1°, del 2° e del 3° ordine.

Non importa aggiunger parole per spiegare come si prosegue la costruzione di gruppi successivi A^{IV} ecc.

3. — GRUPPI DI n PUNTI INFINITAMENTE VICINI SOPRA UNA CURVA DI GENERE $p < n$.

Ciò che si è detto per i gruppi di p punti appartenenti ad una curva K di genere p , si estende senz'altro al caso dei gruppi di n punti ($n > p$) o delle serie complete g_n^{n-p} appartenenti alla medesima curva. *A priori* ciò si giustifica mediante l'osservazione che codeste serie possono ritenersi come « punti » di una varietà di Jacobi, identica a quella costituita dai gruppi di p punti della K . Ma si arriva alla stessa conclusione applicando ai gruppi di tali serie lo stesso procedimento adoperato pei gruppi di p punti nel numero precedente.

Se A ed A' designano due gruppi di n punti infinitamente vicini, e non equivalenti, e B e C sono altri due gruppi di n punti ausiliari, possiamo definire (scegliendolo entro una serie lineare ∞^{n-p}) un gruppo dello stesso ordine n , B_1 infinitamente vicino a B , che insieme ad A' dia un gruppo di $2n$ punti equivalente a $B + A$; e analogamente un gruppo C_1 vicino a C tale che $C_1 + A'$ sia equivalente a $C + A$.

Dopo ciò si costruirà un gruppo A'' successivo ad A' e perciò nell'intorno del 2° ordine di A , considerando, fra i gruppi successivi a

$C + B_1 + A'$, entro la serie lineare definita da codesto gruppo, i gruppi soggetti a contenere C_1 e B_1 . Successivamente si potrà costruire un gruppo A''' successivo ad A'' ecc.

Nella costruzione che precede non è affatto escluso che i gruppi ausiliari B, C, \dots a cui si ricorre appartengono alla stessa serie completa definita da A .

4. — CURVE INFINITAMENTE VICINE SOPRA UNA SUPERFICIE.

Ora le cose dette in relazione ai gruppi di punti sopra una curva si estendono, senza difficoltà, alle curve appartenenti ad una superficie F .

Sia p_a il genere numerico di F , e $p_g > p_a$ il suo genere geometrico; e sia $|A|$ un sistema lineare regolare di curve, di grado n e di genere π , quindi di dimensione

$$r = p_a + n - \pi + 1,$$

grande quanto si vuole; ammettiamo anzi, per semplicità di discorso che questo sistema contenga in sé il sistema canonico, in guisa che la sua dimensione possa dedursi da quella di un sistema regolare più ampio $|2A|$ staccando una curva B di questo, su cui il detto sistema segnerà una serie più ampia della serie canonica (che sarà completa e non speciale).

Sappiamo che, data la irregolarità di F , esistono curve A' infinitamente vicine ad una A e non equivalenti ad essa. E si tratta di dimostrare che successivamente ad una A' , nell'intorno di 2° ordine di A , esistono pure delle curve A'' , e poi successivamente a queste delle curve A''' ecc. Cosicchè $A, A', A'' \dots$ apparterranno ad una serie continua di curve disequivalenti.

A tale scopo assumiamo delle curve ausiliarie B, C, \dots che possiamo supporre equivalenti alla A . Fra le curve di $|A + B|$ infinitamente vicine ad $A + B$, vi sono delle curve spezzate in A' e in una residua curva B_1 : questo è anzi il punto di partenza per costruire le curve A' , tenuto conto che la serie caratteristica di A non è completa. Analogamente si costruirà una curva C_1 infinitamente vicina a C , che insieme ad A' costituirà una curva $C_1 + A'$ equivalente a $C + A$. Allora la curva $C + B_1 + A'$ è infinitamente vicina (in un intorno che può riguardarsi del 1° ordine) alla $C + B + A$; e fra le curve successive a $C + B_1 + A'$, appartenenti al sistema lineare $|C + B + A|$ e all'intorno del 2° ordine di $C + B + A$, vi saranno infinite curve contenenti le parti C_1 e B_1 e una residua parte A'' :

$$C_1 + B_1 + A'',$$

dove A'' è successiva ad A' e quindi ad A nell'intorno del 2° ordine.

Questa deduzione si appoggia sul computo della dimensione del sistema lineare $|C + B + A|$, e di quelli che si ottengono da esso staccando le

curve B_1 e C_1 ; dove si ammette che il sistema somma sia regolare e che le serie segate da $|C + B + A|$ su C_1 e poi da $|B + A + C - C_1|$ su B_1 , sieno non speciali: questa ammissione è senz'altro giustificata nelle ipotesi in cui ci siamo messi, dove $|A|$ è più ampio del sistema canonico; invero le serie anzidette sono dello stesso ordine di quelle segate da $|C' + B + A|$ su C e da $|B + A|$ su B .

Non vi è alcuna difficoltà a proseguire nella costruzione di una curva A''' successiva ad una A'' , e quindi nell'intorno di 3° ordine di A , e così di seguito.

5. — CONFRONTO FRA LE OPERAZIONI SOPRA LE SUPERFICIE E SOPRA LE CURVE.

Le operazioni che abbiamo appreso ad eseguire sopra la superficie F si possono confrontare con quelle definite innanzi sopra le curve, assumendo che la F contenga un sistema lineare di curve K , su cui le A seghino gruppi di m punti non speciali. Qui giova riconoscere il *Lemma* « Curve infinitamente vicine sopra la superficie F , le quali seghino sopra le curve K di un fascio lineare gruppi equivalenti, sono equivalenti ».

Infatti se le curve infinitamente vicine A ed A' seghino sulle K di un fascio dei gruppi G e G' equivalenti, verrà definita sopra ogni K del fascio stesso una g'_m , e i gruppi di queste si potranno ritenere come « punti » di una rigata razionale: sopra la quale due curve infinitamente vicine unisecanti le generatrici, sono sempre equivalenti, siccome appare dalla rappresentazione piana.

In forza di questo lemma, due curve A ed A' , infinitamente vicine sopra F e non equivalenti, segheranno sulle K gruppi di m punti non equivalenti; ed appare tosto, dalla nostra costruzione, che le curve successivamente costruite A'' , A''' ..., segheranno sulle K gruppi infinitamente successivi disequivalenti, che determinano serie g_m successive, corrispondenti a traiettorie del gruppo continuo di trasformazioni sulle relative superficie di Jacobi.

Il confronto qui istituito è interessante, sebbene non più necessario per stabilire il teorema fondamentale che costituisce l'oggetto di questa Nota.

Matematica. — *Una proprietà del sistema delle derivate parziali n-me di una funzione di più variabili.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. B. LEVI.

In una comunicazione alla R. Accademia delle Scienze di Bologna ⁽²⁾ ho stabilito le formole (d'altronde di facile verifica):

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} [D]^n = D(D-1) \cdots (D-n+1) \\ [D]^n \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (D-1)(D-2) \cdots (D-n), \end{array} \right.$$

dove D rappresenta l'operatore differenziale

$$D = \sum_{i=1}^r x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

è il simbolo $[D]^n$ significa che la potenza simbolica si eseguisce trattando i coefficienti x_i come costanti, mentre i prodotti dei secondi membri si eseguono secondo la regola naturale di applicare, ove occorre, le derivazioni anche ad essi.

Indicando con $F(x_1 x_2 \cdots x_r)$ una funzione che ammetta le derivate $n+1$ -me, applicando ad essa la seconda delle (1), moltiplicando per dx_i e sommando rispetto ad i , si ha

$$[D]^n dF = D(D-1)(D-2) \cdots (D-n) F,$$

che mostra che l'operatore $[D]^n$, applicato ad un differenziale esatto, genera un differenziale esatto: scrivendo al posto di F

$$\frac{\partial^{p-1} F}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \cdots \partial x_r^{l_r}} \quad \left(\begin{array}{l} l_1 + l_2 + \cdots + l_r = p-1, \quad l_i \geq 0 \\ p = 1, 2, \cdots, n \end{array} \right)$$

e al posto di n , $n-p$, si ottengono così $\binom{r+n-1}{n-1}$ differenziali esatti, in cui i coefficienti dei differenziali dx_i sono combinazioni lineari delle derivate parziali n -me della funzione F con coefficienti monomi nelle

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 settembre 1937.

(2) *Sopra un operatore funzionale.* « Rendiconti, Classe di Scienze fisiche », 1936-37: per un errore materiale è usato in questa Nota lo stesso indice n al posto scritto nel testo e per indicare il numero r delle variabili: l'inavvertenza è però evidente.

$x_1 x_2 \dots x_r$ ⁽¹⁾. Una combinazione lineare generica a coefficienti costanti fornisce quindi ancora un differenziale esatto della forma

$$(2) \quad \sum_{i=1}^r L_i dx_i$$

dove le L_i sono forme lineari nelle derivate parziali n -me di F aventi per coefficienti polinomi di grado $n-1$, dipendenti nel loro insieme da $\binom{r+n-1}{n-1}$ costanti arbitrarie, ma indipendenti dalla funzione F . Voglio mostrare che il più generale sistema di forme lineari L_i nelle derivate n -me di una funzione F , a coefficienti funzioni delle x_i , tali che, indipendentemente dalla scelta della F , l'espressione (2) risulti un differenziale esatto, è quello generato dalla suddetta combinazione lineare delle

$$(3) \quad [D]^{n-p} \frac{\partial^{n-1} F}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_r^{p_r}}.$$

Risulterà intanto anche pel detto sistema un'altra notevole espressione.

Poniamo

$$\frac{\partial^n F}{\partial x_1^{h_1} \partial x_2^{h_2} \dots \partial x_r^{h_r}} = f_{h_1 h_2 \dots h_r} \quad (h_1 + h_2 + \dots + h_r = n):$$

l'espressione (2) cercata prende la forma

$$\sum_{i=1}^r \left(\sum_{(h_1 h_2 \dots h_r)} f_{h_1 h_2 \dots h_r} \psi_i^{h_1 h_2 \dots h_r} \right) dx_i$$

dove $\psi_i^{h_1 h_2 \dots h_r}$ sono funzioni non dipendenti dalla scelta di F : se si pone

$$F = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_r^{m_r} \quad (m_1 + m_2 + \dots + m_r = n),$$

risulta che

$$c \sum_{i=1}^r \psi_i^{m_1 m_2 \dots m_r} dx_i \quad (c = m_1! m_2! \dots m_r!),$$

deve essere un differenziale esatto: esiste quindi un sistema di funzioni $\varphi^{h_1 h_2 \dots h_r}$ tali che

$$\psi_i^{h_1 h_2 \dots h_r} = \frac{\partial \varphi^{h_1 h_2 \dots h_r}}{\partial x_i}$$

(1) Queste espressioni non differiscono che per un fattore dagli integrandi delle formule (2) nella Nota di M. PICONE, *Sul criterio di integrabilità delle forme differenziali di qualsivoglia grado*. « Boll. dell'Unione Matematica Italiana », anno XVI, p. 77, 1937.

e quindi

$$(4) \quad \sum_{i=1}^r L_i dx_i = \sum_{(h_1 h_2 \dots h_r)} f_{h_1 h_2 \dots h_r} d\varphi^{h_1 h_2 \dots h_r}.$$

A causa dell'arbitrarietà di F, si può supporre che ciascuna $f_{h_1 h_2 \dots h_r}$ ammetta le derivate seconde: da

$$f_{h_1 h_2 \dots h_r} d\varphi^{h_1 h_2 \dots h_r} = d(f_{h_1 h_2 \dots h_r} \varphi^{h_1 h_2 \dots h_r}) - \varphi^{h_1 h_2 \dots h_r} df_{h_1 h_2 \dots h_r}$$

segue allora che (4) sarà un differenziale esatto sempre e solo che tale sia

$$\sum \varphi^{h_1 h_2 \dots h_r} df_{h_1 h_2 \dots h_r}$$

e cioè sia, per ogni coppia di indici l, m ,

$$\begin{aligned} & \sum \left(\varphi^{h_1 h_2 \dots h_r} \frac{\partial^2 f_{h_1 h_2 \dots h_r}}{\partial x_l \partial x_m} + \frac{\partial \varphi^{h_1 h_2 \dots h_r}}{\partial x_l} \frac{\partial f_{h_1 h_2 \dots h_r}}{\partial x_m} \right) \\ &= \sum \left(\varphi^{h_1 h_2 \dots h_r} \frac{\partial^2 f_{h_1 h_2 \dots h_r}}{\partial x_l \partial x_m} + \frac{\partial \varphi^{h_1 h_2 \dots h_r}}{\partial x_m} \frac{\partial f_{h_1 h_2 \dots h_r}}{\partial x_l} \right) \end{aligned}$$

ossia

$$(5) \quad \sum \left(\frac{\partial \varphi^{h_1 h_2 \dots h_r}}{\partial x_l} \frac{\partial f_{h_1 h_2 \dots h_r}}{\partial x_m} - \frac{\partial \varphi^{h_1 h_2 \dots h_r}}{\partial x_m} \frac{\partial f_{h_1 h_2 \dots h_r}}{\partial x_l} \right) = 0.$$

Indicando con $G(x_1 x_m)$ una funzione delle sole x_1, x_m , e con H un gruppo di valori delle h_i per $i \neq l, m$ che supponiamo fissato, con ν la somma di questi valori ($\nu \leq n$), infine con M il monomio della forma $\prod x_i^{h_i}$ per i valori di i e delle h_i che formano il gruppo H , poniamo in (5)

$$F = MG \quad , \quad g_{pq} = \frac{\partial^{n-\nu+1} G}{\partial x_l^p \partial x_m^q};$$

indichiamo con $\varphi_{lm}^{\lambda\mu}$ la $\varphi^{h_1 h_2 \dots h_r}$ in cui $h_l = \lambda$, $h_m = \mu$ e le rimanenti h_i sono quelle del gruppo H ; (5) si riduce allora a

$$\sum_{\lambda + \mu = n - \nu} \left(\frac{\partial \varphi_{lm}^{\lambda\mu}}{\partial x_l} g_{\lambda\mu+1} - \frac{\partial \varphi_{lm}^{\lambda\mu}}{\partial x_m} g_{\lambda+1\mu} \right) = 0$$

ossia

$$\begin{aligned} & g_{0\ n-\nu+1} \frac{\partial \varphi_l^{0\ n-\nu}}{\partial x_l} - g_{n-\nu+1\ 0} \frac{\partial \varphi_l^{n-\nu\ 0}}{\partial x_m} - \\ & - \sum_{\lambda=1}^{n-\nu} g_{\lambda\ n-\nu-\lambda+1} \left[\frac{\partial \varphi_l^{\lambda-1\ n-\nu-\lambda+1}}{\partial x_m} - \frac{\partial \varphi_l^{\lambda\ n-\nu-\lambda}}{\partial x_l} \right] = 0. \end{aligned}$$

A causa dell'arbitrarietà della funzione G , le φ debbono dunque soddisfare il sistema d'equazioni

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_l^{n-v}}{\partial x_l} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_l^{n-v-\lambda}}{\partial x_l} &= \frac{\partial \varphi_l^{n-v-\lambda+1}}{\partial x_m} \quad (\lambda = 1, \dots, n-v) \\ \frac{\partial \varphi_l^{n-v}}{\partial x_m} &= 0.\end{aligned}$$

Il sistema delle equazioni scritte sulla seconda riga dice che le $\varphi^{h_1 h_2 \dots h_r}$ sono derivate parziali (di uno stesso ordine da determinarsi) di una stessa funzione $\Phi(x_1 x_2 \dots x_r)$, colla clausola che l'ordine di derivazione rispetto a una qualunque variabile x_i cresce o diminuisce di tante unità di quante diminuisce o cresce il corrispondente indice h_i . Le equazioni della prima e ultima riga ci dicono allora che le derivate di ordine massimo rispetto alle singole variabili sono nulle e quindi $\Phi(x_1 x_2 \dots x_r)$ può supporre polinomio⁽¹⁾, per modo che il grado massimo di ciascuna variabile uguagli il massimo ordine di derivazione rispetto ad essa. Considerando infine che ciascuna h_i può ricevere tutti i valori interi da 0 ad n , si conclude che questo grado massimo deve essere $\geq n$. Si potrà dunque assumere per Φ un polinomio a coefficienti indeterminati e avente nelle singole variabili $x_1 x_2 \dots x_r$ gradi $n_1 n_2 \dots n_r$ tutti $\geq n$, ponendo

$$(6) \quad \varphi^{h_1 h_2 \dots h_r} = \frac{\partial^{\Sigma n_i - n} \Phi}{\partial x_1^{n_1 - h_1} \partial x_2^{n_2 - h_2} \dots \partial x_r^{n_r - h_r}}$$

$$(7) \quad \psi_i^{h_1 h_2 \dots h_r} = \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi^{h_1 h_2 \dots h_r}.$$

Si possono anche prendere senz'altro tutte le $n_i = n$, onde $\varphi^{h_1 h_2 \dots h_r}$ prende la forma

$$(8) \quad \varphi^{h_1 h_2 \dots h_r} = \frac{\partial^{(r-1)n} \Phi}{\partial x_1^{n-h_1} \partial x_2^{n-h_2} \dots \partial x_r^{n-h_r}};$$

invero, pure ponendoci nella ipotesi più generale e ponendo $n_i = n + v_i$, la (6) si scrive

$$\varphi^{h_1 h_2 \dots h_r} = \frac{\partial^{(r-1)n}}{\partial x_1^{n-h_1} \partial x_2^{n-h_2} \dots \partial x_r^{n-h_r}} \frac{\partial^{\Sigma v_i} \Phi}{\partial x_1^{v_1} \partial x_2^{v_2} \dots \partial x_r^{v_r}},$$

forma identica sostanzialmente a (8).

(1) La funzione Φ è evidentemente indeterminata per termini additivi che nelle derivazioni, secondo quanto segue, vengono ad eliminarsi, e questi potrebbero non aver forma polinomiale.

È chiaro che un generico polinomio Φ di grado n separatamente nelle singole variabili contiene ancora termini sovrabbondanti che si eliminano nelle derivazioni indicate in (8) e (7): si calcola facilmente il numero dei termini essenziali osservando che, se nel gruppo di quelli che hanno a fattore $x_1^{n-h_1}$ si sopprime questo fattore, si ottengono i termini essenziali di un polinomio Φ (della forma (6)) relativo alle $r-1$ variabili $x_2 \dots x_r$ e al valore $n-h_1$ di n ($n-h_1 = h_2 + \dots + h_r$): ne risulta che, indicando con $k_{r,n}$ il numero dei detti termini essenziali,

$$k_{r,n} = k_{r-1,n} + k_{r-1,n-1} + \dots + k_{r-1,1};$$

si vede subito che, qualunque sia r ,

$$k_{r,1} = 1;$$

ne segue, per induzione,

$$k_{r,n} = \binom{r+n-1}{n-1},$$

Si constata così che il numero dei termini essenziali di Φ (e cioè delle costanti arbitrarie da cui esso dipende) è uguale a quello dei coefficienti arbitrari nella combinazione lineare generica delle (3), onde la proposizione enunciata.

Meccanica. — *Sulla meccanica dei mezzi continui disgregati.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. U. CISOTTI.

Levi-Civita ha posto recentemente il problema generale del moto di materia distribuita con continuità, soggetta unicamente alla propria gravitazione, senza intervento di forze molecolari: «si tratta cioè — dice Levi-Civita — di mezzo continuo disgregato, quale uno sciame di corpuscoli statisticamente assimilato ad una distribuzione continua».

Posta la questione, l'A. stesso ha stabilito le equazioni generali, che tra poco richiameremo.

Scopo di questa Nota è di dedurre dalle cennate equazioni alcune conseguenze che mi sembrano interessanti e che si possono rapidamente esporre.

Scende immediatamente [n. 2] che un mezzo continuo disgregato non può essere in quiete e neppure animato da un moto rigido traslatorio uniforme.

Se il mezzo è incomprimibile i moti possibili sono necessariamente vorticosi [n. 5], e il rapporto tra il quadrato del vortice e $2\pi f\mu$ (f costante di gravitazione e μ densità) non può mai scendere al di sotto del valore 1 [n. 8];

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1937.

valore che viene raggiunto quando il mezzo è animato di rotazione rigida uniforme, unico moto rigido compatibile colla natura del mezzo; in tal caso si ha:

$$\omega^2 = 2\pi f\mu,$$

designando ω il valore della velocità angolare.

Questa relazione si presta a un interessante confronto con un classico teorema di Poincaré, che si riferisce all'equilibrio relativo delle masse fluide rotanti secondo il quale il rapporto ⁽¹⁾

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\mu}$$

ammette per limite superiore 1; Crudeli ⁽²⁾, sotto opportune condizioni, dimostrò che il predetto rapporto ammette per limite superiore $\frac{1}{2}$. Orbene, nella relazione suscritta interviene il medesimo rapporto che dev'essere eguale a 1.

1. RICHIAMI ⁽³⁾. — Sieno: $\mu(P, t)$ la densità di una distribuzione di masse, funzione del posto P e dell'istante t , $\mathbf{v}(P, t)$ la velocità che compete all'istante t alla particella materiale in P ; entrambi si suppongono finite, continue e integrabili, rispetto a P , anche se il campo dei punti P è illimitato. Se dS designa un elemento di volume attiguo a un punto Q sarà $\mu(Q, t) dS$ la massa elementare in Q , nell'istante t , e

$$(1) \quad U(P, t) = f \int_S \frac{\mu(Q, t) dS}{|P - Q|}$$

il potenziale newtoniano unitario, cioè dell'attrazione esercitata, nell'istante t , sulla massa unitaria situata in P , dalle altre masse che riempiono lo spazio S . Ciò premesso, la equazione vettoriale del moto viene stabilita immediatamente notando che ogni particella di massa unitaria è soggetta alla sola forza unitaria grad U , alla quale dovrà eguagliarsi l'accelerazione:

$$(2) \quad \frac{d\mathbf{v}(P, t)}{dt} = \text{grad } U(P, t),$$

(1) Cfr. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, to. IV, fasc. I, 1932, pp. 46 e 47.

(2) Nuovo limite superiore delle velocità angolari dei fluidi omogenei, rotanti uniformemente, limitati da figure di equilibrio. Questi « Rendiconti », vol. XIX, 1° sem. 1910, p. 666.

(3) LEVI-CIVITA, *Movimenti per sola gravitazione di un sistema continuo in Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*. Pavia, 1936, pp. 161-168.

il grad riferendosi manifestamente al punto P. Accanto alla precedente equazione vettoriale va considerata l'equazione scalare di continuità:

$$(3) \quad \frac{d\mu}{dt} + \mu \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

L'equazione vettoriale (2) e le equazioni scalari (1) e (3) contengono altrettanti elementi incogniti: il vettore \mathbf{v} e gli scalari μ e U .

Poichè, una volta nota μ , la U risulta definita dalla (1), si può concludere che il problema consiste nella determinazione di $\mu(P, t)$ e $\mathbf{v}(P, t)$ note essendo, in tutto lo spazio S , le loro determinazioni iniziali $\mu(P, 0)$, $\mathbf{v}(P, 0)$.

Dalla (1) segue l'equazione di Poisson:

$$(4) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta_2 U = -4\pi f\mu,$$

riferendosi il $\operatorname{div} \operatorname{grad}$ e il laplaciano Δ_2 sempre al punto P, per qualunque t .

2. INESISTENZA DI EQUILIBRIO E DI TRASLAZIONI RIGIDE UNIFORMI. — Se è $\mathbf{v} = 0$, più in generale, è $\mathbf{v} = \mathbf{c}$, con \mathbf{c} vettore costante, scende dalla (2):

$$\operatorname{grad} U = 0,$$

cioè U è indipendente dal punto P; allora dalla (4) si deduce

$$\mu = 0,$$

la quale esprime non esservi in S alcuna distribuzione di masse; dunque: *un mezzo continuo disgregato non può essere in quiete, e neppure animato da moto rigido traslatorio uniforme.*

3. INTRODUZIONE DEL TENSORE DERIVATO DI \mathbf{v} . — UNA UTILE RELAZIONE SCALARE. — Introduciamo l'omografia $\frac{d\mathbf{v}}{dP}^{(1)}$, che corrisponde al tensore derivato di \mathbf{v} , cioè a quel tensore le cui componenti cartesiane v_i , considerate nella loro dipendenza dal punto P (y_1, y_2, y_3) risultano definite dalle seguenti posizioni ⁽²⁾:

$$(5) \quad T_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial y_k}, \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

(1) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analisi vettoriale generale*. Vol. I. *Trasformazioni lineari*. Bologna, Zanichelli, 1929, pp. 156 e 228.

(2) CISOTTI, *Cenni sui fondamenti del Calcolo Tensoriale con applicazioni alla teoria dell'elasticità*. Milano, Hoepli, 1932, X, p. 14, formula (20).

e il cui modulo ha il quadrato definito dalla relazione ⁽¹⁾

$$(6) \quad T^2 = \sum_i \sum_k T_{ik}^2 = \sum_i \sum_k \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k} \right)^2.$$

Ci sarà utile tenere presente che T^2 è legato all'invariante secondo $I_2 \frac{d\mathbf{v}}{dP}$, dalla relazione ⁽²⁾

$$(7) \quad T^2 + 2 I_2 \frac{d\mathbf{v}}{dP} = (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + (\operatorname{rot} \mathbf{v})^2.$$

Ciò premesso, dalla relazione ⁽³⁾

$$\operatorname{div} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} \right) = (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \mathbf{v} \times \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - 2 I_2 \frac{d\mathbf{v}}{dP},$$

eliminando $2 I_2 \frac{d\mathbf{v}}{dP}$, mediante la (7), si ottiene la formula

$$(8) \quad \operatorname{div} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} \right) = \mathbf{v} \times \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - (\operatorname{rot} \mathbf{v})^2 + T^2,$$

che utilizzeremo tra poco.

4. COROLLARIO SCALARE DELL'EQUAZIONE VETTORIALE. — Prendendo la div dei due membri della (2), si ha:

$$(9) \quad \operatorname{div} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta_2 U.$$

Ma è

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v},$$

e conseguentemente

$$\operatorname{div} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} \right);$$

ma quest'ultimo termine può venire sostituito dal secondo membro di (8), inoltre è

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{v}}{\partial t},$$

(1) CISOTTI, loc. cit., p. 31.

(2) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, loc. cit., p. 59, formula (2), in cui si faccia $\alpha = \frac{d\mathbf{v}}{dP}$.

(3) Ibidem, p. 196, formula (26).

per cui

$$\operatorname{div} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - (\operatorname{rot} \mathbf{v})^2 + T^2,$$

in definitiva la (9), tenuto conto anche della (4), si può scrivere nel seguente modo:

$$(10) \quad \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - (\operatorname{rot} \mathbf{v})^2 + T^2 = -4\pi f\mu.$$

Da questa relazione scalare dedurremo alcune proprietà relative al moto dei sistemi in discorso.

5. MOTI NECESSARIAMENTE VORTICOSI PER MEZZI INCOMPRESSIBILI. — Immaginiamo il mezzo incompressibile, con che $\frac{d\mu}{dt} = 0$; allora dall'equazione di continuità (3) si deduce:

$$(11) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0;$$

e la (10) diviene:

$$(12) \quad T^2 + 4\pi f\mu - (\operatorname{rot} \mathbf{v})^2 = 0.$$

Se si suppone il moto irrotazionale è

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0,$$

e la precedente diviene:

$$T^2 + 4\pi f\mu = 0.$$

Siccome il primo membro è somma di quantità essenzialmente positive e reali, scende

$$T^2 = 0, \quad \mu = 0.$$

Dunque l'ipotesi della incompressibilità del mezzo è incompatibile col carattere irrotazionale dei suoi movimenti, e si può enunciare che *i moti di un mezzo continuo disgregato incompressibile sono necessariamente vorticosi.*

6. MOTI RIGIDI. — Poniamo

$$(13) \quad \mathbf{v}(P, t) = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega} \wedge P - O,$$

dove $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\omega}$ sono *a priori* funzioni arbitrarie della sola t . Questa relazione definisce la distribuzione delle velocità delle particelle quando tutta la massa si muove rigidamente, essendo O un punto qualsiasi che partecipa al moto rigido. Dalla (13), tenuta presente la (6), si ricavano le seguenti relazioni:

$$(14) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad T^2 = 2\omega^2, \quad (\operatorname{rot} \mathbf{v})^2 = 4\omega^2;$$

in virtù della prima, continua a valere la (12), la quale, per le rimanenti, dà luogo alla seguente notevole relazione:

$$(15) \quad \omega^2 = 2 \pi f \mu .$$

La prima delle (14), introdotta nella (3), dà $\frac{d\mu}{dt} = 0$, cioè durante il moto la massa è incompressibile, o almeno si comporta come tale, perchè μ è indipendente da t ; per la (15) anche ω^2 è indipendente da t e siccome ω^2 non dipende dal posto anche μ è indipendente dal posto, cioè *la massa si comporta durante il moto, oltre che come incompressibile, anche come omogenea.*

È noto, per le masse fluide⁽¹⁾, che non solo il modulo di ω è costante ma addirittura il vettore stesso. Ancor qui possiamo rendercene conto. Infatti, la (2) si può notoriamente scrivere:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 1/2 \text{grad } v^2 + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \text{grad } U .$$

Ma, per la (13), è

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2 \boldsymbol{\omega} ,$$

per cui, prendendo il rot di entrambi i membri, si ottiene:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = 0 .$$

Dunque *i soli moti rigidi possibili sono le rotazioni rigide uniformi con velocità angolare il cui modulo è legato alla densità della massa rotante dalla relazione (15).*

7. DIGRESSIONE SUI TENSORI DOPPI. — Sieno T_{ik} le componenti cartesiane di un tensore il quadrato del cui modulo risulta così definito:

$$(16) \quad T^2 = \sum_{ik} T_{ik}^2 .$$

Mediante le posizioni

$$(17) \quad 2 U_{ik} = T_{ik} + T_{ki} , \quad 2 V_{ik} = T_{ik} - T_{ki} ,$$

si ha

$$(18) \quad T_{ik} = U_{ik} + V_{ik} ,$$

(1) Cfr., ad es., CISOTTI, *Lezioni di Meccanica razionale*. Milano, Libreria Editrice Politecnica, 1926, p. 337.

il tensore \mathbf{T} risulta somma dei due tensori \mathbf{U} e \mathbf{V} , il primo *simmetrico* ($U_{ik} = U_{ki}$) e il secondo *emisimmetrico* ($V_{ik} = -V_{ki}$); i quadrati dei rispettivi moduli sono, per le (17) e (16), definiti dalle relazioni seguenti:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} U^2 = \sum_{ik}^3 U_{ik}^2 = 1/4 \sum_{ik}^3 (T_{ik} + T_{ki})^2 = 1/2 T^2 + 1/2 \sum_{ik}^3 T_{ik} T_{ki}, \\ V^2 = \sum_{ik}^3 V_{ik}^2 = 1/4 \sum_{ik}^3 (T_{ik} - T_{ki})^2 = 1/2 T^2 - 1/2 \sum_{ik}^3 T_{ik} T_{ki}; \end{array} \right.$$

sommando si ottiene:

$$(20) \quad U^2 + V^2 = T^2,$$

formula pitagorica la quale esprime che il modulo di un tensore doppio qualsiasi è misurato dalla lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono le misure dei moduli dei due tensori, *simmetrico e emisimmetrico*, dei quali il tensore stesso è somma. Naturalmente questa proprietà proviene dal fatto che i due tensori \mathbf{U} e \mathbf{V} sono ortogonali⁽¹⁾: infatti, come risulta per le (17), il loro prodotto scalare è nullo:

$$\sum_{ik}^3 U_{ik} V_{ik} = 1/4 \sum_{ik}^3 (T_{ik} + T_{ki})(T_{ik} - T_{ki}) = 1/4 \sum_{ik}^3 (T_{ik}^2 - T_{ki}^2) = 0.$$

Introduciamo il vettore Ω , le cui componenti cartesiane sono così definite:

$$(21) \quad \Omega_i = 1/2 (T_{i+1\ i+2} - T_{i+2\ i+1}).$$

Quadrando si ha, tenendo presente la seconda di (19),

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \sum_i^3 \Omega_i^2 = 1/4 \sum_i^3 (T_{i+1\ i+2} - T_{i+2\ i+1})^2 = \\ &= 1/8 \sum_{ik}^3 (T_{ik} - T_{ki})^2 = 1/2 V^2. \end{aligned}$$

Per questa, la (20) si può scrivere:

$$(22) \quad T^2 - 2 \Omega^2 = U^2.$$

Siccome il secondo membro non è mai negativo, così rimane stabilita la seguente ineguaglianza

$$(23) \quad T^2 - 2 \Omega^2 \geq 0.$$

(1) CISOTTI, *Cenni sui fondamenti...*, p. 38.

* 8. APPLICAZIONE AL TENSORE DERIVATO DI \mathbf{v} . — Applichiamo la precedente ineguaglianza al tensore derivato di \mathbf{v} , le cui componenti cartesiane sono definite da (5); si ha allora:

$$(24) \quad \boldsymbol{\Omega} = 1/2 \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Il vettore $\boldsymbol{\Omega}$ si può interpretare la *rotazione* o *vortice* della generica particella.

9. LIMITE INFERIORE DEI VORTICI IN MEZZI INCOMPRESSIBILI. — Riferiamoci ora a un mezzo incompressibile, per il quale sussiste la relazione (12); per la (24) essa si può scrivere:

$$2 \Omega^2 - 4 \pi f \mu = T^2 - 2 \Omega^2.$$

Da questa e dalla (23) scende

$$(25) \quad \Omega^2 \geq 2 \pi f \mu.$$

Esprime questa limitazione che il rapporto tra il quadrato del vortice e $2 \pi f \mu$ non può mai scendere al di sotto di 1, il quale valore costituisce un minimo che si realizza [n. 6] quando la massa è animata di moto rigido rotatorio uniforme.

Astronomia. — *I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton.* Nota I⁽¹⁾ del Socio G. ARMELLINI.

1. Le ultime ricerche da me compiute sopra l'ipotesi cosmogonica di Laplace⁽²⁾ mi hanno condotto ad esaminare, più generalmente, i problemi fondamentali della Cosmogonia.

Come è noto infatti, per quanto riguarda il Sistema Planetario, nessuna ipotesi cosmogonica si presenta immune da numerose difficoltà. Ma tali difficoltà divengono ancora più gravi quando si passa alle nebulose extragalattiche e si cerca p. es., di spiegare la grande abbondanza di nuclei nebulari aventi forma di ellissoidi estremamente schiacciati. Teoricamente infatti, secondo la Meccanica Classica, il loro asse polare non dovrebbe essere inferiore a 2/5 di quello equatoriale, mentre l'osservazione ci mostra che invece questo rapporto è spesso dell'ordine di 1 : 10. Lo stesso nostro Sistema Galattico ha un diametro equatoriale di oltre centomila anni di luce, mentre il suo diametro polare sembra appena di quindicimila anni. E non parliamo, per brevità, della frequenza di orbite quasi complanari, di orbite quasi circolari, ecc.

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 settembre 1937.

(2) Cfr. G. ARMELLINI, *Un'erronea obiezione contro l'ipotesi cosmogonica di Laplace*. «Rend. Lincei», 1° sem. 1936.

2. Ora recentemente il Vogt ha proposto di modificare la legge di Newton, con l'aggiunta di un termine proporzionale alla distanza. In tal modo, come dimostrarai in un mio precedente lavoro ⁽¹⁾, si ottengono figure di equilibrio ancora ellissoidiche, ma alquanto più schiacciate; l'aumento dello schiacciamento è però troppo lieve per spiegare i fenomeni, mentre — come ha fatto vedere il Lambrecht — sorgono ⁽²⁾ gravi difficoltà quando si tenti di spiegare, con questa ipotesi, la forma spirale delle braccia nebulari e la velocità di allontanamento. Ciò non ostante, ci sembra che l'idea di una lieve modificazione alla legge di Newton non meriti di essere abbandonata.

Sta il fatto che, come ai tempi di Newton, la gravità è tuttora una forza misteriosa. Matematicamente essa può ridursi all'inerzia (altro fenomeno misterioso, del resto!), servendosi di uno spazio rappresentativo a quattro dimensioni ed a curvatura variabile; ma fisicamente il mistero permane. Anzi, secondo la nostra opinione, *gravità, inerzia e materia* possono quasi considerarsi come tre aspetti di un unico mistero; onde noi opiniamo che la scienza potrà realmente spiegare che cosa sia la gravità, soltanto quando sapremo esattamente che cosa sia la materia.

Ora, ovviamente, questa stessa natura misteriosa della gravità giustifica di ricercare se la legge di Newton sia esatta (anche prescindendo dalla Teoria di Relatività), o se invece essa vada completata con altri termini secondari estremamente piccoli, ma il cui effetto potrebbe divenire sensibile in intervalli di tempo di bilioni o trilioni di anni: come appunto avviene nei problemi cosmogonici.

Già il grande Poincaré, nell'introduzione alla sua opera *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, scriveva che « le but final de la Mécanique Céleste est de résoudre cette grande question, de savoir si la loi de Newton explique, à elle seule, tous les phénomènes astronomiques ». A maggior ragione, crediamo, che ciò possa dirsi della Cosmogonia.

Ora io ho trovato che, se si ammette che il coefficiente attrattivo f della legge di Newton vari lievemente con la velocità con cui si allontanano, o si avvicinano, tra loro i due punti attraentisi — in modo analogo a quanto è suggerito dalla propagazione della luce — un gran numero di problemi cosmogonici diviene immediatamente spiegabile.

3. Più precisamente, consideriamo una sorgente luminosa puntiforme di lunghezza d'onda λ e d'intensità A e sia dS un elemento di superficie, disposto normalmente al raggio vettore r che unisce A con l'elemento

(1) Cfr. G. ARMELLINI, *Ricerche sopra la forma dei nuclei delle nebulose extragalattiche*. « Rend. Lincei », 2° sem. 1933.

(2) Cfr. G. ARMELLINI, *Trattato di Astronomia Siderale*. vol. III, p. 282 e sgg. (Bologna, Zanichelli, 1936).

stesso. La quantità di energia luminosa dQ che investe dS nell'unità di tempo sarà allora:

$$(1) \quad dQ = \frac{A dS}{4 \pi r^2}.$$

Tutto ciò però se la distanza r non varia col tempo. Se invece dS si allontana o si avvicina alla sorgente, allora a causa della variazione della lunghezza d'onda e quindi della energia dei *fotoni* che cadono su dS , la (1) diviene approssimativamente:

$$(2) \quad dQ = A \left(1 - k \frac{dr}{dt} \right) \frac{dS}{4 \pi r^2}$$

dove k è eguale all'unità divisa per la velocità della luce.

Ciò posto ammettiamo, *come ipotesi*, che la forza d'attrazione F tra due punti di massa m ed m' sia data dalla formola analoga:

$$(3) \quad F = -f \left(1 + \varepsilon \frac{dr}{dt} \right) \frac{m m'}{r^2}$$

dove f indica la costante gravitazionale ed ε è una seconda costante che supporremo *estremamente piccola e positiva*, giacchè — al contrario di quanto avviene per la luce — il vettore gravitazionale è diretto verso il corpo attraente. Ovviamente ε ha dimensioni inverse a quelle di una velocità e — come meglio vedremo in una Nota successiva, con calcoli numerici — a causa della sua estrema piccolezza, essa non produce nessun effetto sensibile nel moto dei pianeti, in un intervallo di *qualche secolo*; ma la cosa è ben diversa se si tratta invece di milioni di secoli. Anzi io dico che *se si ammette la (3) come legge gravitazionale, molti problemi cosmogonici vengono facilmente risolti.*

4. Per vederlo, cominciamo a calcolare l'orbita descritta da un punto materiale, sottomesso all'attrazione di un centro fisso di massa M . Il teorema delle aree e la nota formola di Binet, ci danno le equazioni:

$$(4) \quad r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c$$

$$(5) \quad M f \left(1 + \varepsilon \frac{dr}{dt} \right) = c^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\vartheta^2} \right)$$

dove c e ϑ indicano, al solito, la costante delle aree e l'angolo di posizione. Ora si ha per la (4):

$$(6) \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c}{r^2} \frac{dr}{d\vartheta} = -c \frac{d \frac{1}{r}}{d\vartheta}$$

onde, ponendo per brevità :

$$(7) \quad \frac{1}{r} = u \quad ; \quad \frac{c^2}{Mf} = p$$

la (5) diviene :

$$(8) \quad \frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + \frac{\varepsilon c}{p} \frac{du}{d\vartheta} + u = \frac{1}{p}$$

equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. Ponendo

$$(9) \quad \alpha = \frac{\varepsilon c}{2p} \quad ; \quad \beta = \sqrt{1 - \alpha^2}$$

ed integrando la (8) abbiamo per l'equazione della traiettoria :

$$(10) \quad u = \frac{1}{p} + A e^{-\alpha \vartheta} \cos(\beta \vartheta - \omega)$$

dove A ed ω sono due costanti arbitrarie. Ora supponiamo che l'orbita osculatrice iniziale sia ellittica, onde il punto mobile faccia infiniti giri intorno al centro fisso. Allora, crescendo il tempo, ϑ crescerà verso $+\infty$ o $-\infty$, secondo che c è positiva o negativa. Ma, per ipotesi ε è positiva, onde α ha lo stesso segno di c e quindi, in ogni caso, il prodotto $\alpha \vartheta$ tenderà verso $+\infty$. Segue allora dalla (10) che u tenderà ad $\frac{1}{p}$, vale a dire che r tenderà a p . In altre parole, *le orbite ellittiche tendono a divenire circolari con un raggio uguale al parametro dell'orbita iniziale.*

Ovviamente, se invece di un punto mobile attratto da un centro fisso, si considera il movimento di due punti che si attraggono tra loro, si perviene alle stesse conclusioni per l'orbita relativa descritta da uno di essi intorno all'altro; in tal caso M indica la massa del sistema.

Come applicazione cosmogonica, notiamo che nell'Universo le orbite circolari, o quasi circolari, sono assai diffuse. Oltre ai pianeti, anche le stelle binarie molto strette (e quindi spettroscopiche o fotometriche) hanno in media eccentricità inferiori a 0.05. È vero che nelle orbite più larghe (binarie visuali) le eccentricità aumentano e sono tanto maggiori, quanto più il satellite dista dall'astro principale. Ma, come ha dimostrato il Jeans, tali eccentricità sembrano dovute a cause estrinseche e cioè a perturbazioni cagionate da astri passanti in vicinanza del sistema; perturbazioni evidentemente tanto più sensibili, quanto maggiore è la distanza tra il satellite e l'astro principale.

5. Esaminiamo ora il moto di un pianeta attratto da un Sole, sferico od anche a forma di ellissoide rotondo schiacciato, il quale ruoti con velo-

cità angolare ω intorno al proprio asse polare. Per semplicità, applicheremo il metodo delle perturbazioni, supponendo ancora che il pianeta si muova nel piano equatoriale di questo Sole e che la sua orbita sia già divenuta poco diversa da un cerchio di raggio a . A tale scopo, prendiamo come origine il centro di questo Sole, come piano xy il suo piano equatoriale e come *sensu positivo* della rotazione quello con cui ruota il pianeta intorno a questo Sole, essendo ovviamente la direzione positiva dell'asse y ruotata di 90° in senso positivo rispetto a quella dell'asse x . Siano x, y , o le coordinate del pianeta P e ξ, η, ζ quelle di un elemento Q di massa dm preso nell'interno del Sole.

Ora, a causa della formola (3), l'attrazione che il Sole esercita su P si compone della attrazione newtoniana propriamente detta e di una attrazione complementare, dovuta al termine contenente come fattore ε . Per calcolarla osserviamo che, indicando con r la distanza QP, l'attrazione complementare che l'elemento Q esercita su P, ha per componenti secondo i tre assi:

$$(11) \quad -\varepsilon f \mu \cos \alpha \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} dm \quad ; \quad -\varepsilon f \mu \cos \beta \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} dm \quad ; \\ -\varepsilon f \mu \cos \gamma \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} dm$$

dove μ indica la massa del pianeta ed α, β, γ sono gli angoli di direzione del raggio vettore QP. Ma si ha ovviamente

$$(12) \quad \cos \alpha = \frac{x - \xi}{r} \quad ; \quad \cos \beta = \frac{y - \eta}{r} \quad ; \quad \cos \gamma = -\frac{\zeta}{r}$$

onde le componenti X, Y, Z dell'attrazione complementare esercitata da tutto il Sole su P saranno

$$(13) \quad X = -\varepsilon f \mu \int \frac{x - \xi}{r^3} \frac{dr}{dt} dm \quad ; \quad Y = -\varepsilon f \mu \int \frac{y - \eta}{r^3} \frac{dr}{dt} dm \quad ; \\ Z = +\varepsilon f \mu \int \frac{\zeta}{r^3} \frac{dr}{dt} dm$$

dove il segno di integrazione va esteso a tutta la massa solare. Calcoliamo ora questi integrali.

Intanto, muovendosi il pianeta sul piano equatoriale del Sole, o piano xy , ed essendo la distribuzione interna della materia solare simmetrica rispetto al piano equatoriale, si ha immediatamente $Z = 0$. Quanto ai due primi integrali, abbiamo:

$$(14) \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2$$

donde

$$(15) \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \left[(x - \xi) \left(\frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \right) + (y - \eta) \left(\frac{dy}{dt} - \frac{d\eta}{dt} \right) + \zeta \frac{d\zeta}{dt} \right].$$

Ma, poichè il Sole ruota intorno all'asse ζ con velocità angolare ω si ha dalla cinematica:

$$(16) \quad \frac{d\xi}{dt} = -\omega\eta \quad ; \quad \frac{d\eta}{dt} = \omega\xi \quad ; \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

D'altra parte, essendo per ipotesi l'orbita planetaria poco diversa da un cerchio di raggio a , avremo indicando con N il moto medio del pianeta e con θ la sua distanza angolare dall'asse delle x :

$$(17) \quad x = a \cos \theta \quad ; \quad y = a \sin \theta$$

$$(18) \quad \frac{dx}{dt} = -a N \sin \theta \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = a N \cos \theta.$$

Sostituendo questi valori nella (15) ed eseguendo alcune riduzioni, abbiamo

$$(19) \quad \frac{dr}{dt} = \frac{a}{r} (\omega - N) (\eta \cos \theta - \xi \sin \theta).$$

D'altra parte, se supponiamo che la distanza del pianeta sia notevole rispetto al diametro del Sole, r sarà prossima ad a ; avremo dunque con molta approssimazione:

$$(20) \quad X = -\frac{\epsilon f \mu}{a^3} (\omega - N) \int (x - \xi) (\eta \cos \theta - \xi \sin \theta) dm.$$

Ma si ha:

$$(21) \quad \int (x - \xi) (\eta \cos \theta - \xi \sin \theta) dm = x \cos \theta \int \eta dm - x \sin \theta \int \xi dm - \\ - \cos \theta \int \xi \eta dm + \sin \theta \int \xi^2 dm.$$

Ora, come insegna la Meccanica, i primi tre integrali sono nulli giacchè il baricentro del Sole cade nell'origine e gli assi xy sono certamente assi principali d'inerzia; inoltre l'ultimo integrale rappresenta il momento di inerzia del Sole rispetto al piano $y\zeta$ ed è quindi eguale a $\frac{1}{2} C$, essendo C il momento d'inerzia rispetto all'asse polare ζ . Avremo dunque:

$$(22) \quad X = -\frac{\epsilon f \mu}{2 a^3} (\omega - N) C \sin \theta.$$

Ed analogamente si ottiene:

$$(23) \quad Y = \frac{\varepsilon f \mu}{2 a^3} (\omega - N) C \cos \vartheta.$$

Chiamiamo ora con R e T le componenti di questa forza perturbatrice lungo il raggio vettore e lungo la normale al raggio vettore, condotta nel piano dell'orbita planetaria e diretta nel *sensu del moto* del pianeta e cioè nel senso di ϑ crescente. Avremo per la (22) e (23), essendo l'orbita quasi circolare:

$$(24) \quad R = X \cos \vartheta + Y \sin \vartheta = 0$$

$$(25) \quad T = -X \sin \vartheta + Y \cos \vartheta = \frac{\varepsilon f \mu}{2 a^3} (\omega - N) C.$$

Ora, poichè il moto medio N è sempre positivo, avendo assunto come senso positivo delle rotazioni quello del moto del pianeta, possiamo trarre da queste formule le seguenti conclusioni cosmogoniche:

A) Supponiamo che il nominato Sole ruoti nello stesso senso del pianeta e compia una rotazione in un periodo di tempo minore del periodo di rivoluzione del pianeta e cioè che la sua velocità angolare ω sia positiva e maggiore di N. Allora T risulterà positiva e quindi il pianeta sarà animato da una forza perturbatrice diretta tangenzialmente e nello stesso senso del moto. Per noti teoremi di Meccanica Celeste, il pianeta andrà allora allontanandosi dal Sole e cioè *a* crescerà col tempo, restando l'orbita presso a poco circolare.

B) Supponiamo invece che il Sole ruoti in senso contrario al moto di rivoluzione del pianeta. Allora ω e quindi T sarà negativa; onde, per noti teoremi, il pianeta si avvicinerà sempre più al Sole fino a cadere sul Sole stesso. Lo stesso fenomeno avrà luogo se il supposto Sole ruota nello stesso senso del moto di rivoluzione del pianeta, ma compie una rotazione in un tempo maggiore del periodo di rivoluzione del pianeta e cioè se ω , pure essendo positiva, è minore di N.

In conseguenza: *immaginiamo che un Sole, a causa di un cataclisma qualsiasi, abbia generato dei pianeti, i quali, in un primo tempo, si muoveranno vicini al Sole stesso, in orbite ellittiche più o meno allungate. Se si ammette la legge di attrazione (3), dopo un tempo lunghissimo, le orbite saranno divenute quasi circolari, i pianeti animati di moto diretto si saranno grandemente allontanati dal Sole stesso, mentre quelli retrogradi saranno scomparsi.*

In una prossima Nota esamineremo altre conseguenze cosmogoniche importanti, specialmente per quanto riguarda la mutua inclinazione delle orbite, dedotte dalla legge di attrazione (3).

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Integrazione dell'equazione differenziale*
 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = f$, e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico. Nota II ⁽¹⁾ di C. AGOSTINELLI, presentata dal Socio G. FUBINI.

1. In una Nota precedente, pubblicata in questi « Rendiconti » ⁽²⁾, mi sono occupato dell'equazione differenziale

$$(1) \quad F(u) \equiv \Delta_2 u + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = f \quad ; \quad \left(\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right),$$

determinando, mediante integrali definiti, la soluzione u di essa regolare in un dominio finito D , situato tutto da una parte del piano coordinato $x = 0$, per valori assegnati della funzione u e della sua derivata normale $\frac{du}{dn}$, sulla superficie interna Σ che limita il campo D . In particolare ho risolto, per quell'equazione, il problema analogo a quello di Dirichlet, nel caso in cui il dominio D è un emisfero di raggio R , con centro nell'origine degli assi x, y, z , e disposto ad es. dalla parte delle $x \geq 0$.

Le stesse questioni mi propongo ora di risolvere per l'equazione differenziale

$$(2) \quad \Phi(u) \equiv \Delta_2 u - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \equiv x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f,$$

ove f è al solito funzione nota delle coordinate.

In questo caso l'equazione aggiunta risulta

$$(3) \quad \Gamma(v) \equiv \Delta_2 v + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{x} \right) \equiv \\ \equiv \frac{1}{x} \left\{ x \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (vx) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (vx) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (vx) \right\} = 0,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 agosto 1937.

(2) C. AGOSTINELLI, *Risoluzione mediante integrali definiti dell'equazione differenziale*
 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = f$, e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico. « Rend. dell'Acc. dei Lincei », questo stesso to., p. 138.

e l'equazione fondamentale [(4) Nota citata], diventa

$$(4) \quad \int_{\Sigma} \left(v \frac{du}{dn} - u \frac{dv}{dn} - \frac{uv}{x} \cos \alpha \right) d\sigma + \int_D \int \int v f dx dy dz = 0,$$

ove n è la normale interna a Σ ed α è l'angolo che n forma colla direzione positiva dell'asse x .

2. Per la risoluzione del problema occorre anche qui determinare una soluzione v dell'equazione aggiunta (3), singolare nel punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, che tende cioè ad infinito come $1/\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$. A tal fine osserviamo intanto che dal confronto delle (2) e (3) segue

$$\Gamma(v) = \frac{1}{x} \Phi(vx),$$

e questa mostra che se la funzione u è soluzione dell'equazione $\Phi(u) = 0$, risulta $v = \frac{u}{x}$, soluzione dell'equazione $\Gamma(v) = 0$.

Se ora poniamo nella (2)

$$(5) \quad u = x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x},$$

si ottiene

$$\Phi(u) = x \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right\},$$

cioè, confrontando colla (1),

$$(6) \quad \Phi(u) = x \frac{\partial}{\partial x} [F(\bar{u})],$$

e pertanto dalle (5) e (6) segue che se la funzione \bar{u} è soluzione dell'equazione $F(\bar{u}) = 0$, la $u = x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ è soluzione dell'equazione $\Phi(u) = 0$.

Ma nella Nota citata abbiamo visto che è soluzione della $F(\bar{u}) = 0$, la

$$\bar{u} = \frac{1}{\lambda \mu},$$

ove

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda = \sqrt{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}; \\ \mu = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}, \end{cases}$$

se ne conclude, per i teoremi ora dimostrati, che è soluzione dell'equazione $\Gamma(v) = 0$, la

$$(8) \quad v = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda \mu} \right).$$

Eseguendo però la derivata si vede che la soluzione v così ottenuta, pur essendo singolare nel punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, non presenta la singolarità del tipo richiesto. Ma è facile dedurre dalla (8) la soluzione del tipo voluto.

Infatti si ha successivamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda \mu} \right) &= - \frac{1}{\lambda^2 \mu} \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{1}{\lambda \mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial x} = - \frac{1}{\lambda^2 \mu} \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} + \frac{1}{\lambda \mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial x_0} = \\ &= - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) = - \frac{1}{4x_0 x} \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) = - \frac{1}{4x_0 x} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} \right), \end{aligned}$$

e perciò la (8) diventa

$$(9) \quad -4x_0 v = \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\frac{1}{x} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} \right) \right].$$

Ma essendo $v(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ un integrale della (3), è anche, com'è noto, integrale di essa la funzione

$$\bar{v} \doteq \int F(x_0) \cdot v dx_0,$$

quindi dalla (9) segue che è integrale dell'equazione aggiunta la funzione

$$(10) \quad \bar{v} = \frac{1}{x} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} \right),$$

che presenta la singolarità richiesta nel punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Supponendo allora che il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, in cui si annulla μ , appartenga al campo D ; mentre il punto $P'_0(-x_0, y_0, z_0)$, nel quale si annulla λ , sia esterno ad esso, escludendo il punto P_0 con una sferetta S di raggio molto piccolo e con centro in quel punto, applicando quindi al campo D' limitato da Σ e da S , la formula fondamentale (4), ove in luogo di v si ponga il valore (10) di \bar{v} , e passando infine al limite per S tendente al punto P_0 , si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} (11) \quad 8\pi u(x_0, y_0, z_0) &= - \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{x} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} \right) \frac{du}{dn} - u \frac{d}{dn} \left[\frac{1}{x} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} \right) \right] \right] - \\ &\quad - \frac{u}{x^2} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} \right) \cos \alpha \left\{ d\sigma - \iiint_D \frac{1}{x} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} \right) f dx dy dz, \right. \end{aligned}$$

la quale fornisce l'integrale dell'equazione differenziale (2), nell'ipotesi sempre che il campo D sia tutto situato da una parte del piano $x = 0$, per valori assegnati della funzione u e della sua derivata normale $\frac{du}{dn}$ sulla superficie interna Σ che limita D .

3. Se consideriamo ora l'emisfero E di raggio R , con centro nell'origine O degli assi x, y, z , situato dalla parte delle x positive, e indichiamo con Σ la superficie emisferica che lo limita e con Γ il cerchio equatoriale appartenente al piano $x = 0$, possiamo anche qui risolvere, per l'equazione differenziale (2), il problema analogo a quello di Dirichlet, relativo all'emisfero E .

Essendo al solito $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P'_1(-x_1, y_1, z_1)$, rispettivamente i punti immagine, rispetto alla sfera a cui appartiene E , dei punti $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P'_0(-x_0, y_0, z_0)$, e ponendo

$$\lambda_1 = PP'_1 = \sqrt{(x + x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2};$$

$$\mu_1 = P\bar{P}_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

poichè sulla superficie sferica risulta (cfr. *Nota citata*),

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda}{\mu},$$

la funzione φ , analoga a quella di Green, è ora

$$\varphi = -\frac{1}{x} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \right),$$

e la soluzione v dell'equazione aggiunta (3), che si annulla sopra Σ , è data dalla

$$(12) \quad v = \frac{1}{x} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} - \frac{\lambda_1}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \right).$$

Occorre però dimostrare che il valore (12) della funzione v è nullo anche sul cerchio Γ , che si annulla cioè per $x = 0$ e che i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{v}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial v}{\partial x}$$

sono quantità finite.

Infatti si ha

$$\lambda = \sqrt{\mu^2 + 4x_0x} = \mu \sqrt{1 + \frac{4x_0x}{\mu^2}} \quad ; \quad \lambda_1 = \mu_1 \sqrt{1 + \frac{4x_1x}{\mu_1^2}},$$

e per x molto piccolo si deduce

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\mu} &= 1 + \frac{2x_0x}{\mu^2} - \frac{2x_0^2x^2}{\mu^4} + \frac{4x_0^3x^3}{\mu^6} - \dots, \\ \frac{\mu}{\lambda} &= 1 - \frac{2x_0x}{\mu^2} + \frac{6x_0^2x^2}{\mu^4} - \frac{20x_0^3x^3}{\mu^6} + \dots, \end{aligned}$$

dalle quali si ricava

$$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} = 2 + \frac{4x_0^2x^2}{\mu^4} - \frac{16x_0^3x^3}{\mu^6} + \dots,$$

e analogamente

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\mu_1}{\lambda_1} = 2 + \frac{4x_1^2x^2}{\mu_1^4} - \frac{16x_1^3x^3}{\mu_1^6} + \dots.$$

Dimodochè per x molto piccolo risulta

$$v = \frac{1}{x} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} - \frac{\lambda_1}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \right) = 4x \left(\frac{x_0^2}{\mu_0^4} - \frac{x_1^2}{\mu_1^4} \right) + 16x^2 \left(\frac{x_0^3}{\mu_0^6} - \frac{x_1^3}{\mu_1^6} \right) + \dots$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} v = 0,$$

mentre si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{v}{x} = 4 \left(\frac{x_0^2}{\mu_0^4} - \frac{x_1^2}{\mu_1^4} \right),$$

che è appunto una quantità finita, con

$$\mu_0^2 = x_0^2 + (y - y_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2 \quad ; \quad \mu_1^2 = x_1^2 + (y - y_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2.$$

Analogamente si vede che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial v}{\partial x} = 4 \left(\frac{x_0^2}{\mu_0^4} - \frac{x_1^2}{\mu_1^4} \right).$$

Applicando ora al campo emisferico E la formula fondamentale (4), ove in luogo di v si ponga il valore (12), escludendo il punto singolare $P_0(x_0, y_0, \zeta_0)$, con una sferetta S di raggio molto piccolo e con centro in quel punto, passando quindi al limite per $S \rightarrow P_0$, e osservando che sul cerchio Γ è $\cos \alpha = 1$, ed $n \equiv x$, si ottiene

$$(13) \quad 8\pi u(x_0, y_0, \zeta_0) = \iint_{\Sigma} u \cdot \frac{d}{dn} \left[\frac{1}{x} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} - \frac{\lambda_1}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \right) \right] d\sigma + \\ + 8 \iint_{\Gamma} u \cdot \left(\frac{x_0^2}{\mu_0^4} - \frac{x_1^2}{\mu_1^4} \right) \cdot d\sigma - \iiint_E \frac{1}{x} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} - \frac{\lambda_1}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \right) f dx dy d\zeta,$$

nella quale è da ricordare che

$$x_1 = x_0 \frac{R^2}{\rho_0^2} \quad ; \quad y_1 = y_0 \frac{R^2}{\rho_0^2} \quad ; \quad \zeta_1 = \zeta_0 \frac{R^2}{\rho_0^2} \quad ; \quad (\rho_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + \zeta_0^2).$$

La relazione (13) risolve manifestamente il problema analogo a quello di Dirichlet per l'equazione differenziale (2) e relativamente al campo emisferico considerato.

4. Anche qui va rilevato che se si applica la formula fondamentale (4) al campo D limitato dalla sfera completa Σ di centro O e raggio R , poichè in tal caso i due punti $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P'_0(-x_0, y_0, z_0)$, in cui è singolare il valore (12) della funzione v , sono entrambi interni a D , col solito procedimento si ottiene

$$\begin{aligned} & 8\pi u(x_0, y_0, z_0) + 8\pi u(-x_0, y_0, z_0) = \\ & = \iint_{\Sigma} u \cdot \frac{d}{dn} \left[\frac{1}{x} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} - \frac{\lambda_1}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \right) \right] d\sigma - \\ & - \iiint_D \frac{1}{x} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} - \frac{\lambda_1}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \right) \cdot f \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

In particolare, per valori assegnati della funzione u eguali nei punti di Σ simmetrici rispetto al piano $x = 0$, ed essendo f funzione pari di x , risulterà anche $u(-x_0, y_0, z_0) = u(x_0, y_0, z_0)$, e la relazione precedente risolverà allora il problema di Dirichlet relativo alle sfera per l'equazione differenziale (2).

Matematica. — *Sopra una classe di equazioni funzionali.*
Nota ⁽¹⁾ di M. SCHÖNBERG, presentata dal Socio G. FUBINI.

Si studiano equazioni formate con operatori aventi autofunzioni comuni e commutabili con dei fattori costanti. Considerando dei prodotti funzionali qualsiasi di questi operatori, si esamina un'equazione ottenuta eguagliando a zero una funzione lineare, omogenea ed a coefficienti costanti nei prodotti citati, applicati alla funzione incognita. Si mostra che conoscendo le autofunzioni degli operatori che compaiono nell'equazione si possono trovare soluzioni di questa; il metodo è esteso alle equazioni senza secondo membro, in cui il primo è un polinomio omogeneo, a coefficienti costanti od anche una funzione omogenea qualunque nelle espressioni definite sopra. In certe condizioni si può trattare il caso del primo membro funzione di funzioni omogenee.

Aggiungendo alle equazioni considerate un conveniente secondo membro, si ottengono altre che possono essere trattate collo stesso metodo. In certi casi si presentano fenomeni di risonanza.

Nei casi non lineari è discussa la composizione delle soluzioni ed è messa in evidenza la relazione tra composizione e risonanza.

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 settembre 1937.

Considerando l'equazione

$$(1) \quad f(D) \cdot \psi(x) = \sum a_{\alpha\beta\dots\varrho} D_1^\alpha D_2^\beta \dots D_r^\varrho \psi(x) + b\psi(x) = 0$$

ove $\psi(x)$ è una funzione delle x , variabili in campi continui o discontinui, D_k sono operatori con autovalori $\lambda_{k,n}$ ed autofunzioni $u_{k,n}$, soddisfacenti la relazione:

$$(2) \quad D_k \cdot m\psi(x) = mD_k \psi(x) \quad (m \text{ costante}).$$

Possiamo scrivere le autofunzioni senza il primo indice giacchè esse sono comuni a tutte le D_k :

$$(3) \quad D_k u_n(x) = \lambda_{k,n} u_n(x).$$

Per

$$(4) \quad \psi(x) = Au_n(x)$$

$$(5) \quad D_1^\alpha D_2^\beta \dots D_r^\varrho \psi(x) = D_1^\alpha D_2^\beta \dots D_r^\varrho Au_n(x) = \lambda_{1,n}^\alpha \lambda_{2,n}^\beta \dots \lambda_{r,n}^\varrho \cdot Au_n(x)$$

e

$$(6) \quad f(D) \cdot \psi(x) = \left(\sum a_{\alpha\beta\dots\varrho} \lambda_{1,n}^\alpha \lambda_{2,n}^\beta \dots \lambda_{r,n}^\varrho + b \right) Au_n(x).$$

La $\psi(x)$ data dalla (4) soddisfa alla (1) se le λ sono legate dalla (7):

$$(7) \quad f(\lambda_n) = \sum a_{\alpha\beta\dots\varrho} \lambda_{1,n}^\alpha \lambda_{2,n}^\beta \dots \lambda_{r,n}^\varrho + b = 0.$$

Chiameremo (7) equazione caratteristica. Se gli operatori D_k hanno spettri continui di autovalori, possiamo trovare ∞^{r-1} soluzioni della (7). Per le D_k lineari, combinazioni lineari di soluzioni (4) sono anche soluzioni.

La (1) contiene come casi particolari le equazioni lineari, omogenee a coefficienti costanti differenziali, o a differenze finite, certe equazioni integrali ed altre. Per le equazioni differenziali ritroviamo il classico metodo di Cauchy, d'integrazione con funzioni esponenziali autofunzioni della derivata.

Esaminiamo ora il caso dell'equazione che si ottiene introducendo al secondo membro della (1) la $\sum C_i u_i$, con C_i costanti (se gli operatori D_k non sono lineari consideriamo un termine soltanto):

$$(8) \quad f(D) \cdot \psi = \sum a_{\alpha\beta\dots\varrho} D_1^\alpha D_2^\beta \dots D_r^\varrho \psi + b\psi = \sum C_i u_i.$$

Possiamo prendere:

$$(9) \quad \psi = \sum \frac{C_i}{f(\lambda_i)}.$$

Se qualcuna delle u_i è soluzione della (7), $f(\lambda_i) = 0$ e si ha risonanza, a meno che più di una u_i soddisfi la (7).

Se le u formano un sistema completo nel campo delle $\psi(x)$ considerate, possiamo prendere l'equazione

$$(10) \quad f(D) \cdot \psi(x) = \Phi(x)$$

con $\Phi(x)$ qualunque, svilupparla secondo le $u_i(x)$ e trattare (10) come la (8), discutendo la convergenza caso per caso, nei sviluppi in serie.

Sia $f(\lambda)$ un polinomio omogeneo, a coefficienti costanti, di grado N , nelle $\lambda_{\alpha\beta\dots\epsilon}$:

$$(11) \quad \lambda_{\alpha\beta\dots\epsilon} = D_1^\alpha D_2^\beta \dots D_r^\epsilon \psi(x)$$

$$(11') \quad \lambda_{00\dots 0} = \psi(x).$$

L'equazione

$$(12) \quad f(\lambda) = \sum a(\lambda_{\alpha_1\beta_1\dots\epsilon_1})^{k_1} (\lambda_{\alpha_2\beta_2\dots\epsilon_2})^{k_2} \dots (\lambda_{\alpha_l\beta_l\dots\epsilon_l})^{k_l} = 0$$

$$(13) \quad k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_l = 0$$

per $\psi(x) = Au_n(x)$, prende la forma:

$$(14) \quad f(\lambda) = \left[\sum a(\lambda_{1,n}^{\alpha_1} \lambda_{2,n}^{\beta_1} \dots \lambda_{r,n}^{\epsilon_1})^{k_1} (\lambda_{1,n}^{\alpha_2} \lambda_{2,n}^{\beta_2} \dots \lambda_{r,n}^{\epsilon_2})^{k_2} \dots \dots (\lambda_{1,n}^{\alpha_l} \lambda_{2,n}^{\beta_l} \dots \lambda_{r,n}^{\epsilon_l})^{k_l} \right] (Au_n)^N = 0$$

osservando che:

$$(15) \quad \lambda_{\alpha\beta\dots\epsilon} = \lambda_{1,n}^\alpha \lambda_{2,n}^\beta \dots \lambda_{r,n}^\epsilon \cdot Au_n(x).$$

Si ha un'equazione caratteristica, analoga alla (7):

$$(16) \quad \sum a(\lambda_{1,n}^{\alpha_1} \dots \lambda_{l,n}^{\epsilon_1})^{k_1} (\lambda_{1,n}^{\alpha_2} \dots \lambda_{l,n}^{\epsilon_2})^{k_2} \dots (\lambda_{1,n}^{\alpha_l} \dots \lambda_{l,n}^{\epsilon_l})^{k_l} = 0.$$

Possiamo generalizzare facilmente la (12), basta supporre $f(\lambda)$ omogenea qualunque, di grado di omogeneità N :

$$(17) \quad f(\lambda) = f(\overline{D_1^{\alpha_1} D_2^{\beta_1} \dots D_r^{\epsilon_1} \psi}, \overline{D_1^{\alpha_2} D_2^{\beta_2} \dots D_r^{\epsilon_2} \psi}, \dots \dots, \overline{D_1^{\alpha_l} D_2^{\beta_l} \dots D_r^{\epsilon_l} \psi}) = 0.$$

Per $\psi(x) = Au_n(x)$:

$$(18) \quad f(\lambda) = f(\overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_1} \lambda_{2,n}^{\beta_1} \dots \lambda_{r,n}^{\epsilon_1} Au_n}, \overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_2} \lambda_{2,n}^{\beta_2} \dots \lambda_{r,n}^{\epsilon_2} Au_n}, \dots \dots, \overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_l} \lambda_{2,n}^{\beta_l} \dots \lambda_{r,n}^{\epsilon_l} Au_n}) = 0$$

$f(\tilde{\lambda})$ è omogenea, quindi:

$$(19) \quad f(\tilde{\lambda}) = (Au_n)^N f(\overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_1} \lambda_{2,n}^{\beta_1} \cdots \lambda_{r,n}^{\alpha_1}}, \overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_2} \lambda_{2,n}^{\beta_2} \cdots \lambda_{r,n}^{\alpha_2}}, \dots \\ \dots, \overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_l} \lambda_{2,n}^{\beta_l} \cdots \lambda_{r,n}^{\alpha_l}}) = 0.$$

L'equazione caratteristica analoga alle (7) e (15) è, in questo caso:

$$(20) \quad f(\lambda_n) = f(\overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_1} \lambda_{2,n}^{\beta_1} \cdots \lambda_{r,n}^{\alpha_1}}, \overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_2} \lambda_{2,n}^{\beta_2} \cdots \lambda_{r,n}^{\alpha_2}}, \dots \\ \dots, \overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_l} \lambda_{2,n}^{\beta_l} \cdots \lambda_{r,n}^{\alpha_l}}) = 0.$$

Dal caso dell'equazione (17) passiamo al seguente:

$$(21) \quad f(\tilde{\lambda}) = f(D_1^{\alpha_1} D_2^{\beta_1} \cdots D_r^{\alpha_1} \psi, \dots, D_1^{\alpha_l} D_2^{\beta_l} \cdots D_r^{\alpha_l} \psi) = Cu_i^N.$$

Possiamo prendere

$$(22) \quad \psi(x) = \left[\frac{C}{f(\lambda_i)} \right]^{\frac{1}{N}} u_i(x).$$

Per λ_i soluzione della (20) si ha risonanza.

Sia $G(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_\sigma)$ una funzione che si annulla per $\chi_1 = \chi_2 = \dots = \chi_\sigma = 0$, consideriamo l'equazione (23), ove la $f_k(\tilde{\lambda})$ è omogenea di grado N_k nelle $\chi_{\alpha\beta\dots\sigma}$

$$(23) \quad G(f_1(\tilde{\lambda}), f_2(\tilde{\lambda}), \dots, f_\sigma(\tilde{\lambda})) = 0.$$

Ora otteniamo un sistema caratteristico (25), (24) è la forma della (23) per $\psi = Au_n$

$$(24) \quad G(\{Au_n\}^{N_1} f_1(\lambda_n), \dots, \{Au_n\}^{N_\sigma} f_\sigma(\lambda_n)) = 0$$

$$(25) \quad f_1(\lambda_n) = 0, f_2(\lambda_n) = 0 \dots f_\sigma(\lambda_n) = 0.$$

Se le (25) sono compatibili la Au_n soddisfa alla (23). Un caso particolare della (23) si ha per $G(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_\sigma)$ lineare ed omogenea nelle χ , se le $f_k(\tilde{\lambda})$ sono polinomi del tipo (12) la (23) ha per primo membro un polinomio a coefficienti costanti, che può essere qualsiasi. Per discutere la risonanza prendiamo

$$(26) \quad G(f_1(\tilde{\lambda}), f_2(\tilde{\lambda}), \dots, f_\sigma(\tilde{\lambda})) = G(C_1 u_i^{N_1}; C_2 u_i^{N_2}, \dots, C_\sigma u_i^{N_\sigma})$$

per $\psi = Au_i$:

$$(27) \quad G(\{\overline{Au_i}^{N_1} f_1(\lambda_i)\}, \{\overline{Au_i}^{N_2} f_2(\lambda_i)\}, \dots, \{\overline{Au_i}^{N_\sigma} f_\sigma(\lambda_i)\}) = \\ = G(C_1 u_i^{N_1}, \dots, C_\sigma u_i^{N_\sigma}).$$

Se il sistema (28) è compatibile, Au_i è soluzione della (25)

$$(28) \quad A^{N_1} f_1(\lambda_i) = C_1 \quad A^{N_2} f_2(\lambda_i) = C_2 \dots A^{N_\sigma} f_\sigma(\lambda_i) = C_\sigma.$$

Si ha risonanza quando λ_i è soluzione del sistema (25).

Finora non abbiamo esaminato la questione della composizione delle soluzioni nei casi non lineari. Supponiamo dapprima, che si abbia degenerazione per l'autovalore λ_n , soluzione della (18) e siano le autofunzioni corrispondenti:

$$(29) \quad u_n^{(1)} u_n^{(2)} u_n^{(3)} \dots u_n^{(k)} \dots$$

Vediamo che qualunque combinazione lineare delle $u_n^{(i)}$ soddisfa ancora alla (17), se D_k sono lineari, infatti in questo caso:

$$(30) \quad D_1^\alpha D_2^\beta \dots D_r^q \left(\sum_i a_i u_n^{(i)} \right) = \sum_i a_i D_1^\alpha D_2^\beta \dots D_r^q u_n^{(i)} = \\ = \sum_i a_i \lambda_{1,n}^\alpha \lambda_{2,n}^\beta \dots \lambda_{r,n}^q u_n^{(i)} = \lambda_{1,n}^\alpha \lambda_{2,n}^\beta \dots \lambda_{r,n}^q \sum_i a_i u_n^{(i)}$$

$$(31) \quad f\left(\sum_i \tilde{z}^{(i)}\right) = f\left(\overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_1} \lambda_{2,n}^{\beta_1} \dots \lambda_{r,n}^{q_1} \sum_i a_i u_n^{(i)}}, \dots, \overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_l} \lambda_{2,n}^{\beta_l} \dots \lambda_{r,n}^{q_l} \sum_i a_i u_n^{(i)}}\right) = \\ = \left(\sum_i a_i u_n^{(i)}\right)^N f\left(\overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_1} \lambda_{2,n}^{\beta_1} \dots \lambda_{r,n}^{q_1}}, \dots, \overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_l} \lambda_{2,n}^{\beta_l} \dots \lambda_{r,n}^{q_l}}\right) = 0.$$

Quindi per lo spazio funzionale collegato ad un autovalore si ha superposizione (interferenza), anche in casi non lineari, fatto estremamente notevole.

Per soluzioni non appartenenti allo stesso autovalore, in generale non si ha la possibilità di comporre linearmente. Per orientarci nel caso generale (17), consideriamo il fenomeno di risonanza. Nel caso lineare la legge di composizione delle soluzioni della (1) è la stessa che regge la composizione delle autofunzioni che compaiono nel secondo membro dell'equazione non omogenea (8). L'intuizione fisica suggerisce che il secondo membro rappresenta lo stato di un primo sistema che agisce su un altro e le soluzioni dell'equazione descrivono gli stati del secondo sistema, comandato dal primo. La legge di composizione sarebbe la stessa per il primo e per il secondo sistema. Siamo condotti a ricercare per il caso generale considerato un fatto simile. Indichiamo:

$$(32) \quad \tilde{z}_{\alpha_i \beta_i \dots q_i} = \zeta_i.$$

Astronomia (Astrofisica). — *Osservazioni spettroscopiche e spettrofotometriche della cometa Finsler (1937 f)* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di A. COLACEVICH, presentata dal Corrisp. G. ABETTI.

In questa Nota sono raccolti i risultati di alcuni spettrogrammi della cometa 1937 f (Finsler) ottenuti all'Osservatorio di Arcetri col riflettore prismatico con un prisma (dispersione tra H_{α} ed H_{β} 10 mm.). Furono usati tre tipi di lastre: *Blu Cappelli* (indicate con la lettera B), *Agfa Isopan 20/10 din* (indicate con la lettera P) e *Agfa Isochrom 18/10 din* (indicate con la lettera O). Le lastre B sono sensibili, per spettri stellari e con lo strumento adoperato, tra 3700 e 5050 Å, le lastre P da 3700 a 6770 Å con minimo nel verde e sensibilità circa un decimo delle B nella zona comune; le lastre O infine sono un poco più sensibili delle P nel verde e arrivano verso il rosso fino a circa 5900 Å.

Le pose vennero fatte guidando sulla cometa che era dotata di un moto piuttosto rapido tra le stelle. Per l'identificazione delle righe e per la calibrazione fotometrica vennero inoltre prese delle stelle di confronto come indicato nella tabella I. Ogni lastra venne inoltre calibrata col sensitometro ⁽³⁾ come è indicato nella Tabella stessa.

TABELLA I.

Data		Cometa			Stelle di confronto					Sensitometro			
N.	1937 luglio		posa	$h_{O\equiv}$	* cfr.	gr.	Sp	pose	h_*				
1	27.89	B	45 ^m	22°	—	—	—	—	—	48 Å	1 ^m	—	—
2	28.87	B	60	24	9 Camelop.	4.4	B ₀	3 ^m 1 ^{m.5}	23°	48 Å	1	—	—
3	28.95	P	29	29	9 »	4.4	B ₀	3 -1	25	48 Å	10	RG 1	3 ^s
4	29.89	O	60	25	5 »	4.7	A ₀	6 -3	31	48 Å	10	GG 11	3
5	29.96	P	59	29	10 »	4.2	G ₀	2 -1	19	48 Å	10	RG 1	3

La tabella I contiene i dati di osservazione. Nella seconda colonna vi è la data in T. G.; le tre colonne successive spettano all'osservazione della cometa (tipo di lastra, posa ed altezza media); le cinque colonne per le stelle di confronto il nome, la grandezza, lo spettro, le due pose fatte per

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 agosto 1937.

(3) Pubbl. Arcetri, fasc. 51, p. 77.

ogni stella e la loro altezza media. Le ultime quattro colonne riguardano la calibrazione col sensitometro e danno i filtri adoperati con le pose corrispondenti. Il filtro Wratten 48 A è un filtro blu, il filtro di Jena GG 11 è un filtro giallo e quello RG 1 di Jena è un filtro rosso. Vennero adoperati questi filtri per poter stabilire le curve di calibrazione delle lastre nei vari colori.

Queste vennero misurate allo spettrocomparatore. Gli spettri della cometa appaiono come spettri di emissione, con debole spettro continuo intermedio. Lo spettro di emissione consiste in tante immagini monocromatiche della cometa. Le dimensioni delle parti centrali più intense di queste immagini, per le quali venne determinata la lunghezza d'onda, sono dell'ordine di 0.4 mm. in diametro, ciò corrisponde ad una dimensione angolare di 0.5'. Nelle immagini più forti il diametro della cometa si estende fino ad un massimo di circa 2'. Si capisce che data la dispersione dello strumento adoperato le immagini monocromatiche risultino talvolta sovrapposte, e ciò si verifica specialmente nell'estremo rosso dove la sovrapposizione di esse porta ad uno sfondo luminoso non risolvibile.

Allo spettrocomparatore vennero determinate le posizioni delle varie immagini di emissione. A questo scopo hanno servito le stelle di confronto fotografate accanto alla cometa sul medesimo parallelo (la dispersione dello strumento avviene secondo il meridiano). Le lunghezze d'onda del centro delle immagini monocromatiche, così determinate nelle varie lastre, compaiono nella prima colonna della tabella II. L'identificazione venne fatta in base alle pubblicazioni esistenti sugli spettri delle comete e in particolare a quelle date nell'« Handbuch der Astrophysik », vol. IV, p. 445 e sgg. e nelle « Lick Publ. », vol. XVII, p. 433 e sgg.

TABELLA II.

$\lambda_{oss.}$	Identificazione
3880	CN 3883 ; sistema violetto
4050-90	C ₂ ? CH? ; banda di Raffety
4220	CN 4216 ; sistema violetto
4310	CH? 4315
4380	C ₂ 4370 ; banda di Swan
4730	C ₂ 4737 ; » »
5160	C ₂ 5165 ; » »
5650	C ₂ 5635 ; » »
6000-6600	CN 5992-6635; sistema rosso

Le lastre vennero poi esaminate al microfotometro di Hartmann. Con questo strumento vennero determinate le densità fotografiche, sia delle immagini monocromatiche, sia di alcune zone dello spettro continuo della cometa. Vennero pure misurate le densità delle zone dello spettro continuo delle stelle di confronto di corrispondente lunghezza d'onda. Le misure di densità danno un'idea della visibilità dello spettro della cometa e sono riportate nelle colonne intitolate D della tabella III per le lastre 4 e 5 e nella tabella IV per la lastra 2. In queste misure di densità si assume uguale a zero la densità della lastra non impressionata.

A mezzo delle immagini sensitometriche vennero costruite le curve di calibrazione per le varie lastre. Per la successiva riduzione si fece l'ipotesi che i differenti tempi di posa della cometa, della stella di confronto e al sensitometro non influissero nella forma della curva di calibrazione. Questa ipotesi si usa considerarla valida in prima approssimazione. Dalla differenza di densità tra immagine monocromatica della cometa e corrispondente zona dello spettro continuo della stella di confronto e per mezzo della curva di calibrazione si è ricavato: $\log \mathcal{E}_{\odot\equiv}(\lambda) - \log \mathcal{E}_*(\lambda)$, dove $\mathcal{E}_{\odot\equiv}(\lambda)$ ed $\mathcal{E}_*(\lambda)$ indicano l'energia registrata sulla lastra per la cometa e per la stella di confronto.

Indichiamo ora con:

$E_{\odot\equiv}(\lambda)$ ed $E_*(\lambda)$ l'energia emessa dalla cometa e dallo spettro continuo della stella di confronto per la medesima λ ;

$K_{\odot\equiv}$ e K_* un fattore costante per le varie λ e dipendente dallo splendore apparente della cometa e della stella di confronto e dai tempi di posa;

$\sigma(\lambda)$ un fattore dipendente dall'assorbimento atmosferico, dallo strumento adoperato, dalle lastre fotografiche ecc., funzione della lunghezza d'onda. Questo fattore si può considerare indipendente anche dal tempo di posa ed uguale sia per la stella che per la cometa, poichè entrambi gli spettrogrammi vennero ottenuti nelle medesime condizioni e la stella di confronto si trovava nella medesima zona del cielo della cometa.

Con queste definizioni si potrà dire che l'energia $\mathcal{E}(\lambda)$ registrata dalla lastra per produrre le densità misurate sarà per una di queste lastre data da:

$$\begin{array}{ll} \text{per la cometa} & \mathcal{E}_{\odot\equiv}(\lambda) = E_{\odot\equiv}(\lambda) K_{\odot\equiv} \sigma(\lambda) \\ \text{per la stella} & \mathcal{E}_*(\lambda) = E_*(\lambda) K_* \sigma(\lambda) \end{array}$$

e facendo il rapporto logaritmico

$$(1) \quad \log \frac{K_{\odot\equiv}}{K_*} + \log \frac{E_{\odot\equiv}(\lambda)}{E_*(\lambda)} = \log \frac{\mathcal{E}_{\odot\equiv}(\lambda)}{\mathcal{E}_*(\lambda)} = \log \mathcal{E}_{\odot\equiv}(\lambda) - \log \mathcal{E}_*(\lambda).$$

I valori di $\log \mathcal{E}_{\odot\equiv}(\lambda) - \log \mathcal{E}_*(\lambda)$ si ricavano dalle misure di differenza di densità a mezzo della curva di calibrazione. La formula (1) permette

perciò di ricavare il valore di $\log \frac{E_{O\equiv}(\lambda)}{E_{*}(\lambda)}$ a meno di una costante che è la medesima per tutte le λ .

Se ora si considera un'altra lastra, anche di altro tipo, ma sempre con la medesima stella di confronto, si avrà identicamente;

$$\log \frac{K'_{O\equiv}}{K'_*} + \log \frac{E_{O\equiv}(\lambda)}{E_*(\lambda)} = \log \frac{\mathcal{E}'_{O\equiv}(\lambda)}{\mathcal{E}'_*(\lambda)}$$

cioè si avrà

$$\log \frac{\mathcal{E}_{O\equiv}(\lambda)}{\mathcal{E}_*(\lambda)} - \log \frac{\mathcal{E}'_{O\equiv}(\lambda)}{\mathcal{E}'_*(\lambda)} = \log \frac{K'_*}{K'_{O\equiv}} \frac{K_{O\equiv}}{K_*} = \text{costante}.$$

Ciò significa che due serie di misure per le medesime λ dovranno differire per una costante. Tale costante si potrà stabilire se si disporrà per entrambe le lastre di misure per una stessa λ . Aggiungendo questa costante ai risultati di una delle lastre si potranno rendere paragonabili le misure tra loro. In generale tutte queste si potranno rendere paragonabili a quelle ottenute da una lastra presa come campione. Perciò in tutte le lastre per le quali si è usata la stessa stella di confronto si potrà stabilire la quantità $\log \frac{E_{O\equiv}(\lambda)}{E_*(\lambda)} + \log k$.

Per determinare, a parte la costante, $\log E_{O\equiv}(\lambda)$, bisogna conoscere $\log E_*(\lambda)$. Se assumiamo che la stella irradia come un corpo nero allora, nota la temperatura assoluta T_0 della stella, si potrà calcolare $\log E_*(\lambda)$ dalla formula di Planck. Con queste ipotesi, aggiungendo all'espressione precedente $\log E_*(\lambda, T_0)$, si avrà il valore di $\log E_{O\equiv}(\lambda) + \log k$, che è la quantità che si desidera determinare.

Sia ora la stella di confronto di un altro tipo spettrale. Supponiamo che anch'essa irradia come un corpo nero. Sia T_1 la sua temperatura assoluta. Si calcoli la quantità $\log \frac{E_*(\lambda, T_1)}{E(\lambda, T_0)}$ e la si aggiunga ai due membri dell'equazione

$$(1') \quad \log k' + \log \frac{E_{O\equiv}(\lambda)}{E_*(\lambda, T_1)} = \log \frac{\mathcal{E}'_{O\equiv}(\lambda)}{\mathcal{E}'_*(\lambda)}$$

e si otterrà

$$\log k' + \log \frac{E_{O\equiv}(\lambda)}{E_*(\lambda, T_0)} = \log \frac{\mathcal{E}'_{O\equiv}(\lambda)}{\mathcal{E}'_*(\lambda)} + \log \frac{E_*(\lambda, T_1)}{E_*(\lambda, T_0)}.$$

Questa ultima formula mostra come si possano rendere paragonabili fra loro tutte le misure anche avendo usato differenti stelle di confronto.

In queste osservazioni si è presa come stella di confronto fondamentale la 9 *Camelopardis*, di tipo spettrale B_0 . A questa classe spetta, secondo A. Brill ⁽¹⁾,

(1) « Handbuch der Astrophysik », vol. V, p. 134.

una temperatura assoluta di 23750°. Le altre due stelle adoperate sono di tipo spettrale A_c e G_o con temperature rispettivamente di 11780° e 5986°. Il Brill dà anche tabelle contenenti i valori di $\log E_*(\lambda, T)$ dalle quali vennero interpolati i valori necessari per il nostro caso.

Le misure e le riduzioni fotometriche relative alle lastre 4 e 5 sono date nella tabella III.

TABELLA III.

λ	Lastra n. 4					Lastra n. 5				
	D	$\log \frac{E_{\odot\equiv}}{E_*}$	$\log \frac{E(T_1)}{E(T_0)}$	S	$\log \frac{E_{\odot\equiv}}{E_*}$	D	$\log \frac{E_{\odot\equiv}}{E_*}$	$\log \frac{E(T_1)}{E(T_0)}$	S	$\log \frac{E_{\odot\equiv}}{E_*}$
4730	0.11	— 0.48	— 0.67	— 1.15	0.72	0.15	— 0.14	— 1.78	— 1.92	0.72
5180	0.10	— 0.30	— 0.63	— 0.93	0.94	0.17	— 0.06	— 1.66	— 1.72	0.92
5650	0.13	— 0.40	— 0.60	— 1.00	0.87	0.16	— 0.66	— 1.55	— 2.21	0.43
6000-6600	—	—	—	—	—	0.25	— 0.88	— 1.40	— 2.28	0.36

Per la lastra 4 ad esempio, sono dati, come si è detto, i valori delle densità fotografiche D e nella colonna successiva i valori di $\log \frac{E_{\odot\equiv}}{E_*}$ ricavati a mezzo della curva di calibrazione. La colonna $\log \frac{E(T_1)}{E(T_0)}$ contiene i dati calcolati da Brill per il logaritmo dell'energia emessa da un corpo nero alla temperatura di 11780° rispetto ad uno di temperatura di 23750°. La colonna S dà la somma delle due colonne precedenti, che rappresenta l'energia emessa dalla cometa rispetto alla stella di confronto a meno di una costante. Tutte le misure vennero ridotte paragonabili a quelle ottenute dalla lastra 2 nel modo seguente. Il valore di $\log \frac{E_{\odot\equiv}}{E_*}$ per l'immagine monocromatica della cometa a 4730 Å sulla lastra 2 venne trovato pari a 0.72 (in una scala arbitraria). Ai dati della colonna S per le lastre 4 e 5, venne aggiunta una costante per modo da rendere pari a 0.72 il valore trovato in essa per la radiazione a 4730 Å: questo ultimo valore, indicato con $\log \frac{E_{\odot\equiv}}{E_*}$ è risultato nelle due ultime colonne della Tabella III.

La tabella IV contiene le densità D misurate per le immagini monocromatiche della lastra 2. La seconda colonna dà, sempre per questa lastra, i dati $\log \frac{E_{\odot\equiv}}{E_*}$ che non hanno bisogno di ulteriori riduzioni poichè essa è la lastra campione e la stella di confronto è 9 *Camelopardalis*. Gli ultimi tre numeri

di questa colonna contengono invece le medie dei risultati finali della tabella III. La colonna $\log E_*(T_0)$ dà, a parte una costante, il logaritmo della energia irradiata da un corpo nero alla temperatura di 23750° (Brill). La somma dei dati di questa colonna con quella precedente dà il valore di $\log E_{\odot\equiv}(\lambda)$. Nella tabella IV è data anche l'intensità dello spettro continuo a 4550 \AA , zona per la quale si è notata la massima intensità di questo spettro.

TABELLA IV.

λ	D	$\log \frac{E_{\odot\equiv}}{E_*}$	$\log E_*(T_0)$	$\log E_{\odot\equiv}$
3880	0.49	1.00	1.00	2.00
4050-90	0.25	0.50	0.93	1.43
4220	0.18	0.31	0.88	1.19
4310	0.23	0.30	0.84	1.14
4380	0.23	0.30	0.83	1.13
4550+	0.17	0.24	0.78	1.02
4730	0.65	0.72	0.72	1.44
5160	—	0.93	0.60	1.53
5650	—	0.65	0.47	1.12
6000-6600	—	0.36	0.04	0.40

+ spettro continuo.

Sui risultati ottenuti è da notare ancora quanto segue. Per ciò che riguarda l'identificazione delle varie bande si può dire che in questa cometa compaiono le emissioni caratteristiche degli spettri di questi corpi, allorchè non sono molto vicini al Sole ⁽¹⁾. L'origine della banda di Raffety è ancora incerta, incerta è pure l'identificazione della banda a 4315 \AA . Le bande nell'estremo rosso ($6000-6600 \text{ \AA}$), completamente sovrapposte fra loro si devono probabilmente alla molecola CN, quantunque potrebbero essere in parte dovute anche alle bande di Swan.

Per quanto riguarda le loro intensità è da segnalare la notevole energia della banda del CN a 3880 \AA . Delle quattro bande di Swan identificate, la più intensa risulta quella nel verde, seguita da quella nel blu a 4370 \AA . A queste due bande di Swan, nonchè a quella del CN, si deve il colore verde-blu della cometa che si può paragonare a quello di una stella di tipo spettrale B.

(1) «Lick Publ.», vol. XVII, p. 448.

Chimica. — *Sulla struttura cristallina dei composti delle terre rare con i metalloidi del V gruppo. — Composti 1:1 col Bismuto* ⁽¹⁾. Nota V ⁽²⁾ di A. IANDELLI e E. BOTTI, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Nelle Note precedenti ⁽³⁾ abbiamo esaminato la struttura cristallina dei composti 1:1 degli elementi delle terre rare con i metalloidi del V gruppo (N, P, As e Sb), trovando per tutti un reticolo tipo cloruro di Sodio. Per il Bismuto, il metodo di preparazione seguito negli altri casi non portava mai a un prodotto unico, in modo che non si poteva stabilire con sicurezza neanche la presenza delle fasi MeBi che pure si rivelano all'analisi termica ⁽⁴⁾ come composti a massimo nascosto. La ragione di tale comportamento è probabilmente dovuta proprio a quest'ultimo fatto. La reazione fra il metallo raro e il Bismuto è molto vivace e la massa arriva a una temperatura superiore a quella di decomposizione del composto, per cui, data la rapidità del raffreddamento, la formazione della fase 1:1 è resa estremamente difficile.

Abbiamo quindi cercato di fare avvenire la reazione in un modo più blando, sempre restando al disotto della temperatura di decomposizione. Per far questo si scaldava molto lentamente nel vuoto il miscuglio delle polveri dei due elementi, nella proporzione calcolata per la formula MeBi, in un tubo di vetro Pyrex, fin verso la temperatura di fusione del Bismuto (dalle 20 alle 30 ore); poi si aumentava la temperatura un po' più rapidamente, arrivando fino a 800-850°, e si manteneva il miscuglio a questa temperatura per circa 50 ore.

Con un riscaldamento più rapido, specialmente nella prima fase, la reazione fra i due metalli (forse favorita dalla presenza di piccole quantità di aria rimaste adsorbite) si effettua immediatamente con molta vivacità. Fra i tre composti che abbiamo esaminato, il più difficile a preparare è stato quello col Lantanio, che reagisce con estrema facilità col Bismuto anche a temperatura bassa.

Si ottengono così delle polveri nere, molto stabili sia all'aria che ai reagenti chimici; e si può notare a questo proposito che la stabilità va aumentando dai composti con l'Azoto a questi ultimi col Bismuto.

I campioni così preparati forniscono dei bei fotogrammi delle polveri molto nitidi e che appaiono perfettamente simili fra loro. Tutte le righe

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Genova.

(2) Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1937.

(3) Questi «Rendiconti», XXIV, 459, 1936; XXV, 129, 498, 638, 1937.

(4) R. VOGEL, «Zs. an. allg. Ch.», 84, 327, 1914.

si possono ordinare bene sul grafico di Hull per il reticolo cubico a facce centrate, corrispondentemente ai valori delle costanti reticolari riferite nella tabella I. Nella stessa tabella sono riportati i valori delle intensità delle righe calcolate nell'ipotesi di una struttura tipo cloruro di Sodio, e, come si vede, l'accordo con quelle osservate è buono. Per le righe a indici dispari che non si trovano sui fotogrammi, il calcolo porta appunto a intensità molto più basse delle righe più deboli osservate. Si può quindi concludere che i composti MeBi sono isomorfi con gli altri precedentemente esaminati.

TABELLA I.

Fotogrammi delle polveri di LaBi, CeBi e PrBi.

Anticataldo di Rame, radiazione K: $\lambda_\alpha = 1.539 \text{ \AA}$; $\lambda_\beta = 1.389 \text{ \AA}$.

Intensità		LaBi		CeBi		PrBi		Indici
calc.	osserv.	θ corr.	d/n	θ corr.	d/n	θ corr.	d/n	
5.91	f	19°22'	2.231	19°37'	2.292	19°40'	2.286	2 2 0
3.21	md	23°57'	1.894	24°18'	1.870	24°24'	1.863	2 2 2
2.03	d-md	27°59'	1.640	28°23'	1.619	28°38'	1.606	4 0 0
7.10	f-ff	31°36'	1.469	32°—	1.452	32° 9'	1.446	4 2 0
6.35	f	35° 1'	1.341	35°32'	1.324	35°47'	1.316	4 2 2
2.83	d	41°34'	1.160	42°10'	1.146	42°32'	1.138	4 4 0
6.97	f-ff	44°36'	1.096	45°21'	1.081	45°39'	1.076	6 0 0
								4 4 2
5.81	f	47°55'	1.037	48°35'	1.026	49° 5'	1.018	6 2 0
6.33	f	51° 6'	0.989	51°54'	0.978	52°21'	0.972	6 2 2
2.31	d	54°13'	0.949	55°11'	0.937	55°47'	0.931	4 4 4
8.24	f	57°42'	0.910	58°45'	0.900	59°33'	0.893	6 4 0
20.00	fff	61°16'	0.877	62°26'	0.868	63°17'	0.861	6 4 2
		$a_0 = 6.565 \text{ \AA}$		$a_0 = 6.487 \text{ \AA}$		$a_0 = 6.448 \text{ \AA}$		

Il comportamento delle terre rare con gli elementi metalloidici del V gruppo è caratterizzato dunque dal fatto che in tutti i casi esaminati si formano composti 1:1 con struttura tipo NaCl. La tabella II e la figura 1 riportano i valori delle costanti reticolari trovate.

TABELLA II.
Costanti reticolari dei composti MeX in Å.

Me \ X	N	P	As	Sb	Bi
La	5.27 ₅	6.01 ₃	6.12 ₅	6.47 ₅	6.56 ₅
Ce	5.01 ₁	5.89 ₇	6.06 ₀	6.39 ₉	6.48 ₇
Pr	5.15 ₅	5.86 ₀	5.99 ₇	6.35 ₃	6.44 ₈
Nd	5.14 ₁	5.82 ₆	5.95 ₈	6.03 ₉	—

Come si vede la costante reticolare varia regolarmente, in ogni serie di composti, diminuendo da quelli del Lantanio a quelli del Neodimio.

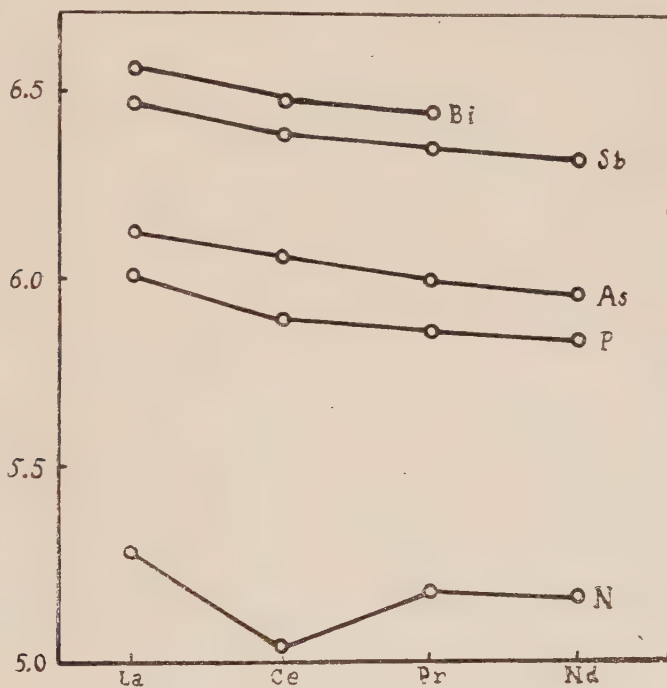


Fig. 1. — Costanti reticolari dei composti MeX.

L'unica eccezione si riscontra per gli azoturi, dove CeN presenta una costante reticolare troppo bassa. Come abbiamo già accennato ⁽¹⁾, questo fatto non può esser messo in relazione con nessuna caratteristica nota che differenzi il composto dagli altri, fatta eccezione per il calore di formazione, che

(1) Questi «Rendiconti», XXV, 129, 1937.

sembra superiore a quello di LaN. Si può forse pensare che in questo caso il Cerio manifesti la valenza superiore (IV), e che il composto abbia una struttura elettronica dello stesso tipo di quella degli azoturi dei metalli tetravalenti (TiN e ZrN).

I composti esaminati rappresentano un tipo di valenza intermedio fra jonico e metallico. Il loro reticolo è caratteristico di un grandissimo numero di composti jonici; e l'andamento delle distanze reticolari è più vicino a quello dei raggi jonici delle terre rare che a quello dei raggi atomici. (I composti con Ce e Pr dovrebbero avere in quest'ultima ipotesi costanti reticolari quasi uguali). Mentre bisogna ritenere che gli ultimi termini della serie (composti con Sb e Bi) abbiano carattere metallico, per i primi (azoturi e fosfuri) può essere invece considerata la possibilità di una valenza quasi jonica, nonostante la deformabilità grandissima degli ipotetici joni N^{3-} e P^{3-} . Infatti nel caso degli azoturi, non sarebbe geometricamente possibile mettere insieme in un reticolo tipo NaCl degli atomi neutri a grande raggio come il Lantanio e a piccolissimo come l'Azoto.

Calcolando con i raggi jonici di Pauling ⁽¹⁾ dell'N, P, As e Sb e con quelli sperimentali degli elementi delle terre rare le costanti reticolari dei nostri composti, si arriva per ogni serie di questi (fatta eccezione per il CeN) a valori superiori a quelli trovati di una quantità fissa. Naturalmente tale contrazione va aumentando dagli azoturi agli antimoniuri. Il calcolo fatto invece usando i raggi atomici porta a valori più bassi di quelli osservati per i primi termini della serie MeN \rightarrow MeBi e a valori superiori per gli ultimi, il che è certamente in relazione all'aumento del carattere metallico.

Il fatto che i composti esaminati siano del tipo NaCl è interessante da un punto di vista più generale. Considerando i composti 1 : 1 formati da un elemento del I gruppo principale del sistema periodico (metalli alcalini) con quelli a carattere metalloidico del VII (alogeni), o da un elemento del II gruppo (alcalino terrosi) e da uno del VI, si trovano sempre, eccetto quando non è più geometricamente possibile tale struttura (CsCl, CsBr e CsJ), dei reticoli tipo NaCl. Si può ora aggiungere che anche unendo un elemento del III gruppo principale (a parte B e Al) con uno del V (N, P, As, Sb e Bi) la stessa struttura viene mantenuta. Oltre ai composti esaminati è conosciuto anche l'azoturo di Scandio ⁽²⁾ e anch'esso soddisfa alla regola.

Esistono pochi dati sui composti 1 : 1 formati dagli elementi dei due sottogruppi del IV gruppo fra loro, ma in tutti i casi finora noti (carburi) si incontrano strutture tipo NaCl. Essi manifestano proprietà sicuramente metalliche; la conducibilità elettrica, p. es., è essenzialmente elettronica. Si ha così, nello stesso tipo reticolare, un passaggio graduale dalla valenza

(1) L. PAULING, « J. A. C. S. », 49, 765, 1927.

(2) K. BECKER, F. EBERT, « Zs. f. Phys. », 31, 268, 1925.

puramente ionica degli alogenuri alcalini a quella perfettamente metallica di questi ultimi.

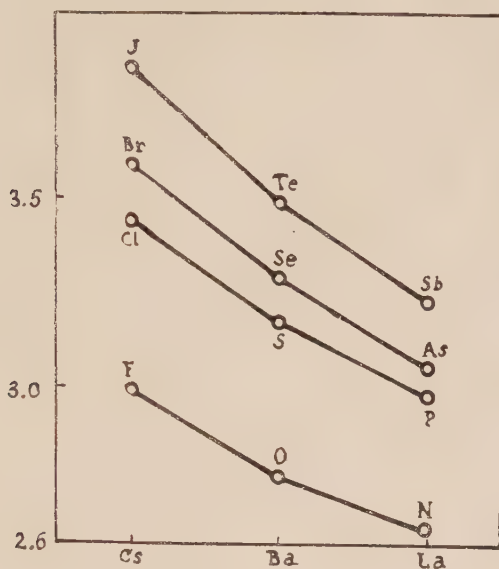


Fig. 2. - Distanze interatomiche per le strutture tipo NaCl.

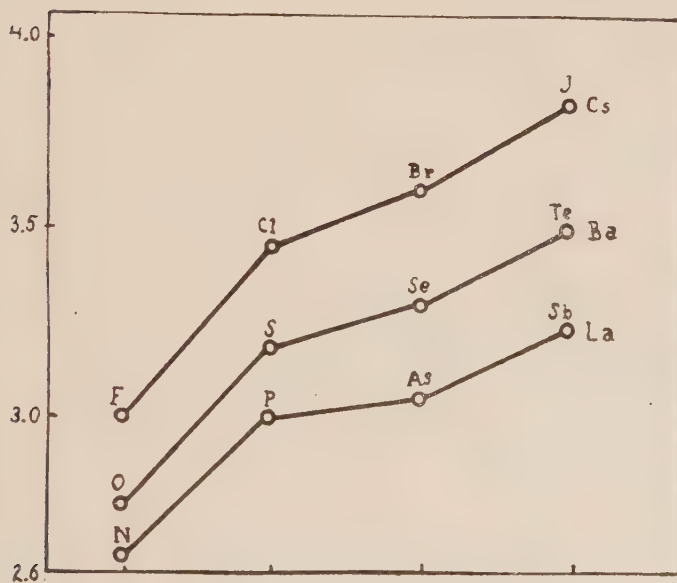


Fig. 3. - Distanze interatomiche per le strutture tipo NaCl.

Come è noto, composti di tipo assai diverso sono invece quelli formati da due elementi situati l'uno 3, 2, 1 posti prima e l'altro 3, 2, 1 posti dopo uno degli elementi C, Si, Ge e Sn. Per questi si osserva un reticolo

del tipo della blenda (o anche wurtzite), nel quale ogni atomo è circondato tetraedricamente da altri quattro. Il legame in questo caso è sicuramente omopolare o intermedio fra omopolare e metallico.

I due tipi di strutture si differenziano anche nettamente, come ha mostrato Goldschmidt, considerando le distanze interatomiche corrispondenti. Aumentando simultaneamente la valenza dei due componenti si trova che, nelle strutture tipo blenda, la distanza fra due atomi resta inalterata (p. es., CuBr, ZnSe, GaAs, Ge; ecc.); mentre per quelle tipo NaCl si ha una diminuzione di tale distanza. Nella figura 2 si vede come i composti esaminati da noi soddisfino perfettamente questa regolarità ⁽¹⁾. La variazione della distanza nel passaggio dei composti del Cesio a quelli del Bario e del Lantanio è quasi lineare. Le distanze reticolari dei composti del Lantanio e di quelli corrispondenti del Bario e del Cesio presentano inoltre lo stesso andamento (fig. 3).

Ci proponiamo di esaminare successivamente il comportamento magnetico dei composti studiati dal punto di vista strutturalistico, per cercare di dedurne qualche conclusione sul loro tipo di valenza.

Chimica. — *Modificazione del metodo di Van Slyke per l'analisi delle proteine* ⁽²⁾. Nota ⁽³⁾ di E. MARIOTTI, presentata dal Corrisp. G. BARGELLINI.

Nel corso di alcuni studi concernenti la separazione e il dosaggio dell'N ammidico nell'idrolisato delle proteine, e il comportamento della cistina durante l'esecuzione del metodo di Van Slyke per l'analisi delle proteine ⁽⁴⁾ ho avuto modo di fare alcune osservazioni che stimo opportuno di segnalare.

Il trattamento per l'allontanamento dell'ammoniaca è, come è noto, di capitale importanza nello svolgimento del metodo.

Infatti un imperfetto allontanamento porta necessariamente un aumento dell'N non amminico nella frazione dei fosfowolframati, mentre un trattamento non appropriato può alterare la cistina e l'arginina presenti, le quali subiscono, in ambiente anche debolmente alcalino ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾ una notevole decomposizione.

(1) Per il Cs le distanze interatomiche sono state calcolate per il numero di coordinazione 6.

(2) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio centrale di Idrobiologia di Roma.

(3) Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1937.

(4) VAN SLYKE, « J. Biol. Chem. », 10, 15-55, 1911; 22, 281, 1915; 23, 411, 1915.

(5) HOFFMANN, « J. Biol. Chem. », 65, 251, 1925.

(6) DENIS, « J. Biol. Chem. », 8, 365.

Inoltre un problema che può dirsi ancora irrisolto nei riguardi del metodo di Van Slyke è quello che concerne le gravi inesattezze derivanti dalla presenza della cistina nella frazione dei fosfowolframati.

La cistina non precipita completamente con acido fosfowolframico⁽¹⁾ anche se resta completamente indecomposta dopo il trattamento alcalino per la separazione dell'N ammidico. Gortner e Sandstrom⁽²⁾ in uno studio di controllo del metodo di Van Slyke trovano in tre esperienze il 64.5-62.1-73.3 % della cistina aggiunta.

La presenza della cistina però, nella frazione dei fosfowolframati, nuoce alla determinazione degli altri amminoacidi che sono, come sappiamo, legati fra loro da relazioni matematiche. Infatti nella reazione con acido nitroso per la determinazione dell'N amminico, parte del suo zolfo reagisce con l'HNO₂ ossidandosi ad acido solforico e liberando azoto⁽³⁾, apportando un errore del 7-8 per cento in più⁽⁴⁾. Inoltre durante il trattamento con soda della parte aliquota in cui si determina l'arginina, la cistina si decompone⁽⁵⁾ dando anche in questo caso degli extra-valori.

Lo scopo delle ricerche è quello di evitare una possibile decomposizione dell'arginina prima della precipitazione con acido fosfowolframico, ottenendo egualmente una perfetta separazione dell'N ammidico, cioè di trovare una base che, senza alterare l'arginina, sposti per ebollizione l'ammoniaca.

Importante scopo è pure quello di eliminare la cistina prima della precipitazione dei fosfowolframati, e possibilmente dosarla.

Mi sono servito delle osservazioni dei precedenti sperimentatori sulla decomposizione della cistina in ambiente alcalino per mezzo di piombiti alcalini o alcalino-terrosi⁽⁶⁾, ed ho cercato di riuscire a decomporre la cistina senza nuocere all'arginina presente.

Ho usato allo scopo un'idrato basico di piombo. Questo si prepara trattando a 60° con la quantità calcolata di NaOH una soluzione di acetato neutro di piombo, e agitando con una bacchetta fino a che tutto il precipitato non sia divenuto cristallino e di colore giallo paglierino. A questo punto si decanta e lava lungamente con acqua bollita scaldata a 60°. Infine si conserva sott'acqua.

(1) HOFFMANN e GORTNER, « J. Am. Chem. Soc. », 44, 341-360, 1922.

(2) GORTNER e SANDSTROM, « J. Am. Chem. Soc. », 47, 1663-1671, 1925.

(3) SCHMIDT, « J. Biol. Chem. », 82, 587, 1929; A. LOUGH e HOWARD B. LEWIS, « J. Biol. Chem. », 104, 601, 1934.

(4) VAN SLYKE, « J. Biol. Chem. », 9, 485, 1911; KENDRICK e HANKE, « J. Biol. Chem. », 114, LVIII, 1936.

(5) GORTNER e SINCLAIR, « J. Biol. Chem. », 83, 681, 1929.

(6) ANDREWS, « J. Biol. Chem. », 80, 191, 1928; CLARK e INOUE, « J. Biol. Chem. », 89, 399, 1930.

Questo idrato basico di piombo sposta completamente l'ammoniaca dai suoi sali per ebollizione. Non ha praticamente azione sull'arginina anche bollendo a 100° fino a piccolo volume.

Bollito con cistina agisce su di essa decomponendola per circa il 90-92 % togliendo lo zolfo che forma PbS e spostando l'azoto sotto forma di ammoniaca.

La durata ottima del trattamento è di circa tre ore. Non sono riuscito ad ottenere una decomposizione in misura superiore al 92 % anche bollendo cinque ore e aggiungendo nuovo idrato di piombo dopo le prime tre ore. In compenso l'errore è discretamente costante, cosicchè si può, dallo zolfo trovato come PbS dopo il trattamento, risalire al valore della cistina presente, nei limiti di un errore di $\pm 2-3$ %.

In ogni modo la cistina è eliminata e non disturba più il dosaggio degli amminoacidi precipitati con acido fosfowolframico.

Il fatto che la cistina con idrato di piombo liberi dell'azoto sotto forma alcalina non nuoce, in quanto, dato che, come vedremo, vi è corrispondenza tra lo zolfo e l'azoto che si liberano, si può dopo il trattamento dell'idrolisato, sottrarre dal valore totale dell'ammoniaca trovata il valore dell'azoto corrispondente allo zolfo che si trova come PbS; si ottiene così per differenza il valore dell'N ammidico.

Riporto qui in una tabella le prove che mi sembrano più rappresentative.

Sono state eseguite con cistina Merck, la cui purezza è stata accertata mediante il dosaggio dell'azoto totale (Kjeldahl).

Il trattamento avviene in un comune apparato Kjeldahl per distillazione. Il pallone in cui si pone la cistina e l'idrato di piombo sospeso in acqua, ha una capacità di 500 cc. Il refrigerante affilato all'estremità pesca in un eccesso di soluzione N/10 di H_2SO_4 . Si fa bollire lentamente per un certo tempo senza distillare quindi si distilla la metà del liquido.

L'acido solforico si titola servendosi di metilarancio come indicatore.

Risulta dalla tabella come dopo tre ore di ebollizione il risultato diventi praticamente costante (prove III, IV, V, VI, VIII, IX) e non aumenti neppure prolungandola fino a cinque ore (prova VII); come in presenza di sola arginina il risultato non vari (prove VIII, IX) e come invece si abbia decomposizione della arginina in presenza di $MgCl_2$ (prova X), ciò che è certamente dovuto al fatto che si forma una certa porzione di $Mg(OH)_2$ durante il trattamento.

Infine come la media dei risultati, quando il tempo di ebollizione sia di tre ore, si aggiri intorno al 90,5 %.

In base a quanto è stato esposto, mi sembrerebbe utile proporre di modificare il metodo di Van Slyke per l'analisi delle proteine, nel modo seguente.

Numero progr.	Tempo di ebolliz. ore	Cistina aggiunta gr.	Cistina trovata gr.	Cistina trovata %	N trovato mgr.	N teor. mgr.	S trovato mgr.	S teor. mgr.	Osservazioni e variazioni
I	1	0.2160	0.1892	87.60	22.10	25.19	50.50	57.65	Prove eseguite su cistina pura
II	2	0.1584	0.1441	88.89	16.62	18.47	37.58	42.28	
III	3	0.1214	0.1084	89.31	12.68	14.16	28.94	32.40	
IV	3	0.3816	0.3448	90.56	40.30	44.50	91.98	101.80	
V	3	0.1400	0.1289	92.04	15.04	16.30	34.40	37.37	
VI	3	0.0824	0.0741	89.91	8.74	9.61	19.78	22.00	Con aggiunta di altro ossido di piombo dopo tre ore.
VII	5	0.0526	0.0485	92.26	5.60	6.13	13.52	14.04	
VIII	3	0.1540	0.1384	89.88	16.20	17.96	36.94	41.10	
IX	3	0.1208	0.1088	90.08	12.70	14.09	29.04	32.24	
X	3	0.1322	0.1195	90.40	13.67	10.49	31.89	35.28	

Allontanato l'HCl dall'idrolisato nel modo usuale, si aggiunge per mezzo di un imbuto a rubinetto una sospensione in acqua di idrato di piombo. Per essere sicuri che sia in eccesso, si introduce nel collo del pallone a contrasto col tappo una strisciolina bagnata di carta al tornasole rossa, o alla fenoltaleina, che accusi la presenza di ammoniaca durante l'ebollizione, quando l'idrato di piombo è in eccesso. Si fa pescare il refrigerante in un eccesso di soluzione N/10 di acido solforico, quindi si bolle per tre ore curando che il liquido si ricondensi sul collo del pallone stesso senza distillare; infine si aggiunge un altro poco di idrato di piombo e si distilla. Dopo di ciò si filtra e si lava il residuo fino a scomparsa della reazione del cloro. Sul filtro si trovano le melanine e lo zolfo labile della cistina sotto forma di PbS.

Si dosa lo zolfo secondo il metodo di Harding, sostituendo lo stagno con qualche granellino di zinco. Si sposta cioè l'H₂S in corrente di idrogeno per mezzo di acido cloridrico concentrato e si raccoglie in acqua ossigenata ammoniacale; si decompone a caldo l'eccesso dell'H₂O₂ previa aggiunta di un cc. di MnCl₂ 1 %, quindi si acidifica con HCl, si aggiunge qualche goccia di acido ossalico per disciogliere l'MnO₂ e si precipita come BaSO₄. È consigliabile di operare il trattamento per lo spostamento dell'H₂S nello stesso pallone in cui si è operata l'ebollizione con idrato di piombo.

Dallo zolfo trovato si risale all'azoto corrispondente alla cistina decomposta, che si sottrae dal valore dell'azoto che si ritrova nel distillato, ottenendo così per differenza l'N ammidico.

Il filtrato si libera del piombo passato in soluzione per mezzo dell'idrogeno solforato e quindi dall'idrogeno solforato in corrente d'aria dopo leggera acidificazione con acido cloridrico.

Dato che, come già ho accennato, l'errore nel valore trovato per la cistina totale presenta una certa costanza, si può correggerlo tenendone conto nel calcolo dell'N amminico totale.

Per differenza fra i valori dell'N totale ed amminico prima e dopo il trattamento con idrato di piombo si ottengono l'N totale e l'N amminico delle melanine solubili.

Sono ora in corso alcune determinazioni di amminoacidi nelle proteine in cui si applica e si controlla la modificazione descritta.

Chimica. — *Contributo alla conoscenza del bifenile e dei suoi derivati.* — XIX. *Preparazione di alcuni nuovi derivati*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di L. MASCARELLI e M. PIRONA, presentata dal Corrisp. G. BARGELLINI.

Descriviamo nella presente Nota la preparazione di alcuni nuovi derivati del bifenile che furono da noi ottenuti durante questa serie di ricerche e di cui non avemmo sinora opportunità di dare notizia. Includiamo inoltre la descrizione di alcune prove nostre che non poterono avere esito positivo, perchè, come già in parecchi precedenti casi, anche in questi si è, a causa della facilità di formazione d'un terzo nucleo eterociclico sulle posizioni 2-2', originato sempre difenilenossido in luogo del prodotto cercato.

PARTE SPERIMENTALE.

2-cloro-2'-metossi-bifenile: $C_{13}H_{11}OCl$. — Si ebbe con un rendimento dell'84,5 % dal 2-amino-2'-metossi-bifenile⁽³⁾ che venne sottoposto alla reazione diazoica e poi al trattamento con cloruro rameoso. Fu purificato per distillazione in vapore d'acqua e cristallizzazione dall'alcool di 70°. Aghetti bianchi che fondono a 53-54°. (Analisi: trovato % C 71.24, H 5.44, Cl 16.13; calcolato 71.38, 5.07, 16.23)⁽⁴⁾.

2-idrossi-2'-amino-bifenile: $C_{12}H_{11}ON$. — Fu preparato demetilando, mediante ebollizione con acido jodidrico, il 2-metossi-2'-amino-bifenile⁽³⁾. Il prodotto della reazione, alcalinizzato con carbonato sodico, si estrae con etere; si purifica la base passando per il cloridrato e rimettendola in libertà con carbonato sodico. Il cloridrato puro si separa dall'acido cloridrico diluito sotto forma di cristalli bianchi fondenti a 268-270° e sublimabili senza alterazione. La base cristallizzata da etere di petrolio (p. eb. 40-70°) fonde a 92-93°. (Analisi: trovato % C 77.56, H 6.15, N 7.65; calcolato 77.80, 5.99, 7.57).

2-idrossi-2'-amino-x-jodio-bifenile: $C_{12}H_{10}ONJ$. — Si è avuto, in piccolissima quantità, dalle acque madri del precedente prodotto. Cristallizzato dall'acqua si presenta in squamette bianchiccie; dall'etere di petrolio

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1937.

(3) MASCARELLI e GATTI, « Atti Congr. Naz. Chim. pura e appl. », 4, 503-505, 1933.

(4) Tutte le analisi riportate in questa Nota sono state eseguite dal dott. B. Longo e siamo lieti di poterlo ringraziare qui pubblicamente.

(p. eb. 40-70°) in aghetti bianchi raggruppati in ciuffi e fondenti a 140°. Essi danno la reazione di Beilstein per gli alogeni. (Analisi: trovato % C 47.16, H 3.68; calcolato 46.30, 3.24). Si tratta di un 2-idrossi-2'-amino-x-jodio-bifenile formatosi per azione dell'acido jodidrico.

2-cloro-2'-idrossi-bifenile (acetilderivato): $C_{14}H_{11}O_2Cl$. — Lo abbiamo preparato diazotando il cloridrato del 2-cloro-2'-amino-bifenile ⁽¹⁾ e decomponendo con vapor d'acqua il diazoderivato. L'olio rossastro ottenuto è stato purificato per distillazione in corrente di vapore. Data la piccola quantità di sostanza così avuta ne abbiamo preparato, per ebollizione con anidride acetica ed acetato sodico, l'acetilderivato; questo si ottiene dall'etere di petrolio (p. eb. 35-50°) in prismetti gialli, p. f. 70°. (Analisi: trovato % C 68.04, H 4.32; calcolato 68.14, 4.50) ⁽²⁾.

3-3'-di-jodio-bifenile: $C_{12}H_8J_2$. — Dal 3-3'-diamino-bifenile ⁽³⁾ mediante diazotazione e reazione di Sandmeyer. Rendimento 65-70 %. Non distilla in corrente di vapore d'acqua; fu purificato cristallizzandolo da alcool di 80-85°. Aghetti bianchi soffici, sottili che fondono a 72°. (Analisi: trovato % C 35.96, H 1.97; calcolato 35.47, 1.98).

Tentativo di preparare il 2-idrossi-2'-jodio-bifenile: $C_{12}H_9OJ$. — Diazotando e decomponendo successivamente con joduro di potassio il 2-idrossi-2'-amino-bifenile abbiamo potuto isolare solo difenilenossido.

Tentativo di preparare il 2-idrossi-2'-metossi-bifenile: $C_{13}H_{12}O_2$. — Abbiamo seguito diversi procedimenti di decomposizione del 2-metossi-2'-diazo-bifenile ma sempre con esito negativo. Applicando il processo brevettato di Cain e Norman ⁽⁴⁾ si ebbe difenilenossido con un rendimento del 90 %.

Tentativo di preparare il 2-metossi-2'-bromo-bifenile: $C_{13}H_{11}OBr$. — Abbiamo diazotato e decomposto con bromuro rameoso ed acido bromidrico il 2-metossi-2'-amino-bifenile ⁽⁵⁾; si ebbe piccola quantità di resina e difenilenossido (95 %). Anche il processo di Schwechten ⁽⁶⁾ ci ha fornito solo difenilenossido.

(1) MASCARELLI e GATTI, Nota VIII. « Gazz. Chim. ital. », 61, 792, 1931.

(2) Dai brevi sunti del « Zentralblatt » riguardanti due brevetti (« Chem. Zentr. », 1936, II, 1385 e « Chem. Zentr. », 1936, II, 1665) non siamo riusciti a comprendere se il 2-cloro-o-fenilfenolo in questi citato e di cui non si riporta nè il p. f. nè altra proprietà, sia identico al 2-cloro-2'-idrossi-bifenile da noi isolato allo stato di acetilderivato.

(3) BRUNNER e WITT, « Ber. », 20, 1028, 1887.

(4) « J. Chem. Soc. », 89, 19, 1906; D. R. P. 95339; FRIEDLÄNDER, 4, 1245.

(5) Loc. cit. in (3) a p. 1.

(6) « Ber. », 65, 1605, 1932.

Chimica (Chimica fisica). — *Impiego del potenziometro per la determinazione delle curve tempo-temperatura nelle analisi termiche*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di C. PERRIER e A. BELLANCA, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Come è ben noto i galvanometri normalmente impiegati nelle ricerche di analisi termica sono galvanometri ad ago, che possono percorrere una rotazione angolare di circa 90° con uno sviluppo lineare di appena 15 cm. all'incirca, pur arrivando a coprire un intervallo di temperatura di ben 1600° , presso a poco un millimetro ogni 10° . Sono invero apparecchi assai pratici e comodi nel loro uso, ma non si può pretendere una eccessiva esattezza dal loro impiego; ben spesso si possono confondere degli arresti con delle semplici variazioni di inclinazione delle curve, cosa, però, assai grave, perchè ciò ha per effetto di falsare completamente i risultati. Nè maggiore esattezza si può sperare con i galvanometri a registrazione normalmente usati, ancora più comodi ma aventi precisione dello stesso ordine di grandezza.

Nel caso, quindi, in cui si voglia o si debba raggiungere una maggiore esattezza onde avere risultati veramente attendibili, è dubbio che essi possano venire ancora utilizzati. È precisamente quanto ci accadde nel corso di alcune ricerche, durante le quali si presentò assoluta la necessità di modificare il sistema di registrazione onde raggiungere la indispensabile sensibilità.

Si sa che la determinazione della temperatura non è che una determinazione indiretta; impiegando le coppie termo-elettriche, essa viene dedotta dalla forza elettromotrice sviluppata alla saldatura di una coppia, misurata o mediante l'intensità della corrente sviluppata nel pirometro (normali galvanometri ad ago) o mediante un potenziometro.

Il primo metodo serve bene, sia quando il potenziale della coppia resta costante, come quando esso varia in conseguenza della variazione della temperatura, il secondo, invece, si adatta solo al caso in cui la forza elettromotrice resta costante, ma è per contro suscettibile di una estrema sensibilità e precisione. Non è difficile raggiungere verso i 1600° una tale esattezza nelle misure da potersi calcolare temperature anche con la precisione di un decimo di grado (secondo alcuni si può avere una precisione anche maggiore).

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Palermo.

(2) Pervenuta all'Accademia il 13 settembre 1937.

L'impiego del potenziometro, connesso con galvanometro ad alta sensibilità, per quanto ci consta, non era, invece, mai stato praticamente effettuato per la determinazione delle curve tempo-temperatura. Si poteva, tuttavia pensare che non dovesse essere, poi, impossibile trovare una adatta disposizione delle sue parti, tale da renderlo adatto allo scopo, pur conservando la sua grande precisione; è questo appunto quanto noi cercammo di realizzare ed i risultati ottenuti confermarono pienamente e brillantemente le previsioni fatte.

Il metodo risulta un tantino più lungo che non il metodo galvanometrico ordinario, ma la esattezza e la sicurezza dei valori ottenuti sono, di regola, tali che il maggior dispendio di tempo che si può avere nella misura e calcolo della temperatura, viene abbondantemente compensato da quello che si risparmia nello studio delle curve ottenute.

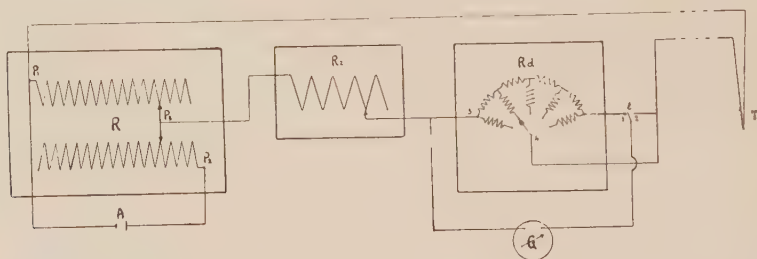


Fig. 1. — Il tratto P_1-P_3 costituisce la prima pila ridotta, su di essa è chiuso il circuito R_x, R_d, T ; la resistenza R_d , compresa tra i punti 3 e 4 costituisce la seconda pila ridotta, su cui è cortocircuitato il Galvanometro G . La levetta l durante la misura è posta sul contatto 2, mentre in posizione di riposo va sul contatto 1, in queste condizioni essa (non visibile dalla figura) interrompe contemporaneamente anche il circuito $P_1 P_3 R_x R_d T P_1$.

In sostanza la realizzazione del dispositivo fu ottenuta con le opportune connessioni di tre circuiti. Uno costituito dal potenziometro propriamente detto (resistenza complessiva costante) da cui poteva derivarsi una pila ridotta: questa era in serie con la coppia termoelettrica, una resistenza zavorra variabile e un'altra resistenza (il cui valore fu mantenuto pure sempre costante per quanto potesse essere variato entro certi limiti) sulla quale era cortocircuitato il galvanometro. Il potenziometro impiegato era un comune potenziometro a decadi costruito da noi stessi in laboratorio e successivamente tarato nelle sue parti, il galvanometro, un galvanometro a riflessione Siemens, resistenza interna 50 ohms, sensibilità $5 \cdot 10^{-9}$ Amperes per millimetro della scala alla distanza di un metro.

Lo schema delle connessioni è facilmente deducibile dall'unito disegno (fig. 1). In esso A rappresenta un elemento con potenziale ben noto e costante (un accumulatore) chiuso su se stesso attraverso il potenziometro R . (Resistenza normalmente impiegata 50.000 ohms corrispondente ai tratti

P_1-P_2). Il tratto $P_1 P_3$ costituisce la così detta *pila ridotta* a cui viene opposta la forza elettromotrice della coppia termoelettrica T , attraverso una resistenza zavorra $R\chi$ e la resistenza galvanometrica messa in parallelo con una resistenza Rd .

La funzione di questa è assai importante e costituisce la caratteristica di questo dispositivo.

Il galvanometro, se chiuso solo sulla resistenza $P_1 P_3 + R\chi$, come di regola avviene nelle ordinarie misure potenziometriche, potrebbe oscillare facilmente quando tale resistenza fosse troppo grande, e questo sarebbe sempre il caso se il valore della pila ridotta P_1-P_3 non fosse molto prossimo a quello della coppia termoelettrica. Se lo si chiude, invece, anche sulla resistenza Rd , abbastanza grande per non alterare l'intensità della corrente circolante nel circuito $P_1 P_3 R\chi G T P_1$, ma sufficientemente lontana dalla resistenza critica del galvanometro, le oscillazioni si smorzano in modo completo. La resistenza Rd rende, quindi, possibile l'impiego di un galvanometro di alta sensibilità per la determinazione delle curve *tempo-temperatura*, e permette anche di elevare notevolmente la sensibilità delle misure, adeguandola a quella richiesta dalle indagini.

È evidente che se la forza elettromotrice della coppia termoelettrica T è esattamente uguale a quella della pila ridotta P_1-P_3 nel circuito $P_1-P_3-R\chi-G-T-P_1$ non circola corrente, e quindi il galvanometro G non accuserà alcuna deviazione; questa si manifesterà invece, in un senso oppure nell'altro, a secondo che prevarrà la forza elettromotrice della pila ridotta o della coppia T .

La resistenza galvanometrica G costituisce una seconda pila ridotta su cui è derivata la resistenza Rd ed il valore di questa pila ridotta, a parità di condizioni del potenziale P_1-P_3 e di T , dipenderebbe sia dalla resistenza zavorra $R\chi$ come da quelle Rd e del galvanometro.

Questa è costante e per ragioni pratiche è conveniente pure mantenere sempre costante il valore di Rd (noi usammo circa 500 ohms) e far variare solamente il valore della resistenza $R\chi$, adeguandolo al valore della pila ridotta P_1-P_3 , valore che a sua volta veniva scelto in relazione a quello della forza elettromotrice della coppia T , cioè, della temperatura. Così facendo si otteneva che nel circuito indicato $P_1 P_3 \dots P_1$ circolassero sempre, nelle varie misure, intensità di corrente dello stesso ordine di grandezza, tali, quindi, da far sì che l'indice luminoso restasse sempre nel campo della scala più adatto per le misure. Con scala disposta a circa m. 1.30 una rotazione dello specchio di 5 gradi a destra o a sinistra dello zero corrispondeva ad uno spostamento su di essa di circa 12 cm. a destra od a sinistra, ed entro questo limite le rotazioni possono ancora essere ben considerate come proporzionali alle intensità delle correnti circolanti.

I valori di $R\chi$ scelti furono di 6000, 4000, 2000 ohms, i valori più alti alle temperature più elevate, quelli più bassi per quelle minori: quando

necessitò una particolare sensibilità dell'apparecchio ci si limitò ad una resistenza zavorra di 500 ohms.

Si tenga presente che la sensibilità del sistema cresce quanto minore è il valore della resistenza R_z , ma bisogna adeguarla alla possibilità delle misure, giacchè con una sensibilità troppo elevata, specie alle temperature più alte, l'indice potrebbe spostarsi tanto velocemente che la lettura della sua posizione sulla scala risulterebbe impossibile.

Per potere eseguire le misure occorre, naturalmente, una taratura della scala; una per ciascun valore della resistenza zavorra, è necessario, cioè conoscere di quanti microvolta bisogna far variare il potenziale della pila ridotta P_1-P_3 , affinchè l'indice luminoso della scala si sposti di un millimetro. Se si tiene conto solo delle resistenze suscettibili di essere fatte variare, l'intensità della corrente circolante nel circuito comprendente R_z dipende, oltre che da questo, anche dalla resistenza del tratto P_1-P_3 , e dalla resistenza R_d . Poichè già R_z è molto grande la resistenza del tratto P_1-P_3 è praticamente trascurabile, di conseguenza il valore del microvolta-millimetro dipenderà solo da R_z ed R_d . Per far che questo dipenda solo più da R_z basta mantenere R_d costante; è questa la ragione per cui come si disse a p. 247 si scelse un valore opportuno per R_d e non lo si mutò più per tutte le misure.

Noto il valore del microvolta-millimetro si può facilmente sapere in modo preciso qual'è il potenziale esatto opposto nei singoli istanti a quello della coppia e poscia dalle tabelle di Adams per la coppia Platino Platino-Rodio, quale fu da noi impiegata, dedurre le temperature corrispondenti.

La cosa è facilmente comprensibile mediante un esempio. Immaginiamo un accumulatore che, confrontato con una pila campione, presenti una forza elettromotrice di volta 2.0534 ad una certa temperatura (se è necessario si può tener conto del coefficiente di temperatura) e sia chiuso su una resistenza di 50.000 ohms. La caduta di tensione per ohm sarà di 41.068 microvolta (un microvolta = $1 \cdot 10^{-6}$ volta). Se il tratto P_1-P_3 comprende 100 ohms, il valore della corrispondente pila ridotta sarà di microvolta 4106.8, in cifra tonda 4107 microvolta.

Prendiamo per R_z 4000 ohms; se la coppia manifestasse una forza elettromotrice esattamente uguale a quella della pila ridotta l'indice del galvanometro si troverebbe sullo zero, reciprocamente se la saldatura della coppia si raffreddasse, all'istante in cui l'indice passasse per lo zero, la coppia avrebbe esattamente la stessa differenza di potenziale della pila ridotta e cioè, nell'esempio fatto, microvolta 4107.

Dalle Tabelle di Adams risulterebbe una temperatura di 488.7° C.

Supponiamo ora, che ad una distanza di 50 mm. dallo zero l'indice del galvanometro avesse segnato un arresto corrispondente ad una trasfor-

mazione invariante del sistema in cui è immersa la coppia, trasformazione che da dati precedenti risultasse avvenire a 538.9°C .

A questa temperatura corrisponderebbe un potenziale di microvolta 4632.

Dunque una variazione di potenziale di $4632 - 4107 = 525$ microvolta determinerebbe uno spostamento di 50 mm. dell'indice luminoso, una variazione di un millimetro corrisponderebbe, di conseguenza, ad una variazione di potenziale di 10.5 microvolta ⁽¹⁾. Questo e gli altri analoghi valori furono ripetutamente controllati; essi si mantennero sempre costanti in modo assai soddisfacente e furono normalmente usati nel corso delle nostre indagini per dedurre dalle curve *microvolta-tempo* il valore delle temperature nei punti interessanti. Naturalmente quando in un sistema c'era un arresto si fece quasi sempre la determinazione del potenziale della coppia anche con l'ordinario metodo potenziometrico dello azzeramento e si ottenne sempre concordanza perfetta. Le temperature dedotte nei due casi differivano sempre di assai poco, al massimo di un grado.

Un altro modo per la determinazione del microvolta-millimetro sarebbe stato quello di mantenere la saldatura della coppia a temperatura ordinaria e costante e far variare, invece, di quantità note il potenziale della pila ridotta P_1-P_3 . I valori ottenuti, però, per quanto assai poco diversi dagli altri ricavati con il primo metodo, risultarono un po' meno buoni per ragioni, del resto, non difficili a spiegarsi. Riteniamo questo modo di determinazione non consigliabile e noi, infatti, non lo abbiamo mai adoperato.

Come esempi di curve ottenibili col metodo descritto ne abbiamo preso tre, appartenenti una (fig. 2 curva *a*) al sistema $\text{KCl}-\text{KBr}$ e le altre due (curve *b* e *c*) al sistema $\text{K}_2\text{SO}_4-\text{Na}_2\text{SO}_4$: la prima si riferisce alla trasformazione *liquido-solido*, le altre due a trasformazioni *solido-solido*.

Nel caso del sistema $\text{KCl}-\text{KBr}$ si ha formazione di cristalli misti in serie continua con un minimo al 30 % molecolare di KCl . La miscela della curva *a* conteneva il 40 % di KCl , aveva quindi una composizione assai prossima a quella del minimo, ciò non ostante si nota benissimo l'intervallo di cristallizzazione che è di soli 4° .

Le curve *b* e *c*, come si disse, si riferiscono alle trasformazioni *solido-solido* ed in questi casi la registrazione è di regola assai più difficile: la *b* fu ottenuta con una miscela al 55 % Mol. di K_2SO_4 e 45 % Na_2SO_4 , la *c* con una miscela al 50 % Mol. di questi stessi sali. Dalla *b* appare riconoscibile ancora l'intervallo, che pure è solo di un grado, invece la *c* lascia riconoscere nettamente l'arresto.

La cosa aveva qui una particolarissima importanza per stabilire la vera natura dell'afitalite come si potrà vedere in un lavoro in corso di stampa su questo minerale e, sotto questo punto di vista, solo con un metodo tanto sensibile si potevano avere dati così sicuri.

(1) Come ordine di grandezza 10-15 microvolta corrispondono ad 1°C .

Come si vede i risultati sono altamente soddisfacenti, e tanto più soddisfacenti in quanto dei vari fenomeni termici non si potè mettere in evidenza il solo inizio, come generalmente si può fare, ma, per lo più, anche la fine, cosa pure assai spesso, di notevolissima importanza per l'interpretazione di quanto avviene nelle masse in via di raffreddamento. Riteniamo quindi che, specialmente nello studio dei sistemi complicati o con effetti termici poco cospicui, in tutti quei casi, cioè, nei quali si richiede una grande sensibilità di registrazione, questo metodo sia veramente raccomandabile.

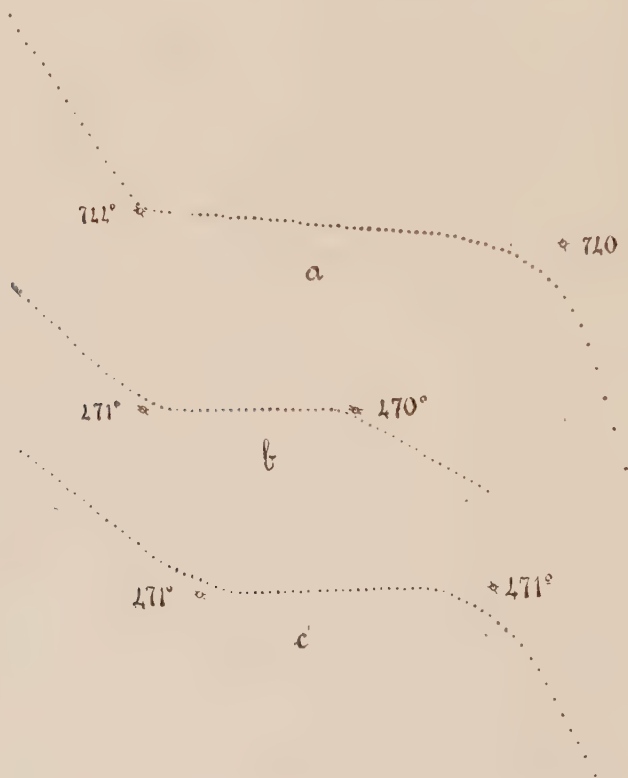


Fig. 2.

L'uso del galvanometro a riflessione suggerisce, poi, subito l'idea di ottenere fotograficamente il tracciato delle curve con tutti i vantaggi che offre una registrazione automatica. È precisamente questo che potemmo realizzare in un secondo tempo e nel lavoro sopra indicato sono riportati alcuni esempi di curve così ottenute.

Il Marzotto nella sua vecchia ma sempre pregevole opera *Le Leghe metalliche* (Vincenzi 1913, Modena) a p. 361, accennando all'apparecchio autoregistratore di Roberts-Austen, dove è fatto impiego di un galvano-

metro Deprez-D'Arsonval, dopo aver notato che alle alte temperature, essendo le deviazioni troppo ampie, bisognerebbe tener conto anche del valore rilevante della torsione del filo perchè altrimenti si introdurrebbero errori non piccoli (?): scrive:

« Per ovviare a questo inconveniente Roberts-Austen pensò di compensare una parte della corrente fornita dalla coppia termoelettrica con la corrente di un elemento normale Clark, introducendo nel circuito un potenziometro per misurare e regolare la corrente di compensazione ».

A parte il fatto che la scelta dell'elemento Clark per un simile scopo risulterebbe assai poco opportuna, noi non abbiamo trovato nei lavori di Roberts-Austen nessun accenno all'idea sopra espressa.

Comunque con la realizzazione dell'apparecchio come la si potrebbe immaginare effettuata, in base a quanto dice il Marzotto, usando cioè il potenziometro come normalmente lo si usa per misure con il metodo di compensazione, non si otterrebbe nessun risultato, a meno, forse, di impiegare un galvanometro di minima sensibilità, con che, però, si perderebbero tutti i vantaggi che si possono ottenere da una elevata sensibilità galvanometrica, quando ciò è necessario. Alle alte temperature occorrerebbe inserire nel circuito del galvanometro delle resistenze zavorre così forti che le oscillazioni del galvanometro non verrebbero più smorzate, oppure bisognerebbe far variare così frequentemente il potenziale della pila ridotta P_1-P_2 , da opporre a quello della coppia T, che non sarebbe più possibile ottenere una curva tempo-temperatura.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 7 novembre 1937 - Anno XVI

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Studi asintotici per alcune equazioni differenziali.* Nota ⁽¹⁾ del Socio G. FUBINI.

Ci occuperemo di un metodo che in qualche caso consente lo studio nel campo reale delle soluzioni di una equazione lineare alle derivate ordinarie nell'intorno di un punto singolare. E, per chiarezza, cominceremo da una equazione del secondo ordine

$$(1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

1. Portato il punto singolare nel punto $x = \infty$, noi supporremo, per cominciare, che, mutando x in kx , y in λy ove $k = \text{cost.}$, e λ è una opportuna funzione della x , la (1) si possa ridurre alla forma:

$$(2) \quad y'' + [1 - Q(x)]y = 0$$

ove $Q(x)$ tende a zero per $x = +\infty$ ed è assolutamente integrabile nell'intorno di tale punto. Così, p. es., l'equazione di Bessel

$$\chi'' + \frac{1}{x}\chi' + \left(b^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)\chi = 0 \quad (b, \nu = \text{cost.}; b \neq 0)$$

(1) Presentata nella seduta del 7 novembre 1937.

diventa, posto $y = \sqrt{x}$, $\chi = bx$

$$(3) \quad \frac{d^2 y}{d\chi^2} + y [1 - Q(\chi)] = 0, \quad \text{ove} \quad Q(\chi) = \frac{4y^2 - 1}{4\chi^2}.$$

Scrivendo x al posto di χ , la (3) è una equazione (2) soddisfacente alle condizioni enunciate. Per studiare in generale la (2) si ponga:

$$(4) \quad y = e^{ix} \zeta_1(x) + e^{-ix} \zeta_2(x)$$

ove ζ_1, ζ_2 sono funzioni soddisfacenti alle:

$$(5) \quad \begin{cases} \zeta_1' = \frac{1}{2i} (\zeta_1 + e^{-2ix} \zeta_2) Q, \\ \zeta_2' = -\frac{1}{2i} (\zeta_1 e^{2ix} + \zeta_2) Q. \end{cases}$$

Dalle (4), (5) segue la (1), come è facile verificare. Le (4) e (5) sono ispirate dal metodo elementare della variazione delle costanti arbitrarie. Se infatti, oltre alla (4), si pone:

$$(4 \text{ bis}) \quad y' = ie^{ix} \zeta_1 - ie^{-ix} \zeta_2$$

le ζ_1 e ζ_2 definite dalle (4) e (4 bis), soddisfano, in virtù di (2), alle (5).

Le (5), si noti, equivalgono alle:

$$(5 \text{ bis}) \quad \zeta_1 = -\frac{i}{2} e^{-ix} y Q \quad ; \quad \zeta_2 = \frac{i}{2} e^{ix} y Q.$$

Per integrarle, trasformiamole in equazioni integrali singolari (del Volterra), supponendo che α_1, α_2 siano i valori di ζ_1, ζ_2 per $x = +\infty$ (e reale). (Si suppone pertanto che le ζ_i tendano per $x = +\infty$ a limiti finiti). Troveremo:

$$(6) \quad \begin{cases} \zeta_1(x) = \alpha_1 + \frac{1}{2i} \int_{+\infty}^x [\zeta_1(\xi) + e^{-2i\xi} \zeta_2(\xi)] Q(\xi) d\xi, \\ \zeta_2(x) = \alpha_2 - \frac{1}{2i} \int_{+\infty}^x [e^{2i\xi} \zeta_1(\xi) + \zeta_2(\xi)] Q(\xi) d\xi, \end{cases}$$

che si risolvono ponendo:

$$(7) \quad \zeta_1(x) = \sum_0^\infty u_n(x) \quad , \quad \zeta_2(x) = \sum_0^\infty v_n(x)$$

ove:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = \alpha_1, \quad v_0(x) = \alpha_2 \\ u_n = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} [u_{n-1}(\xi) + e^{-2i\xi} v_{n-1}(\xi)] Q(\xi) d\xi \\ v_n = -\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{2i\xi} u_{n-1}(\xi) + v_{n-1}(\xi)] Q(\xi) d\xi. \end{array} \right.$$

Scelta dunque una costante positiva α maggiore di $|\alpha_1|$ e di $|\alpha_2|$, sarà:

$$\begin{aligned} |u_0(x)| < \alpha & \quad ; \quad |v_0(x)| < \alpha; \\ |u_0(\xi) + e^{-2i\xi} v_0(\xi)| < 2\alpha & \quad ; \quad |u_0(\xi) e^{2i\xi} + v_0(\xi)| < 2\alpha. \end{aligned}$$

Qui, si noti, ha ufficio essenziale la limitazione dello studio a *variabili reali*. Sarà pertanto poi

$$|u_1| < \alpha \int_x^{+\infty} |Q(\xi)| d\xi, \quad |v_1| < \alpha \int_x^{+\infty} |Q(\xi)| d\xi.$$

E similmente si deduce:

$$|u_2| < \alpha \int_{+\infty}^x |Q(\xi_2)| d\xi_2 \int_{+\infty}^{\xi_2} |Q(\xi_1)| d\xi_1$$

insieme ad una formola analoga per v_2 . In conclusione si prova che tanto $|u_n|$, quanto $|v_n|$ sono minori di

$$(9) \quad \alpha \int_x^{+\infty} |Q(\xi_n)| d\xi_n \int_{\xi_n}^{+\infty} |Q(\xi_{n-1})| d\xi_{n-1} \cdots \int_{\xi_2}^{+\infty} |Q(\xi_1)| d\xi_1.$$

Dalla supposta integrabilità di $|Q(x)|$ per $x = +\infty$ segue che, scelto un numero positivo ε arbitrario (che supporremo minore di 1), si può trovare un numero c tale che per $x > c$ sia

$$\left| \int_x^{+\infty} |Q(x)| dx \right| < \varepsilon.$$

Osservando che, se $x > c$, anche $\xi_i > c$, se ne deduce che per $x > c$, l'espressione (9) non supera $\alpha \varepsilon^n$ in valore assoluto. Pertanto le serie (7) sono per $x > c$ uniformemente e assolutamente convergenti, perchè ammettono per maggiorante la progressione geometrica decrescente $\alpha \sum \varepsilon^n$. Ma

sovente si può provare una convergenza più rapida. Se, p. es., $|Q(x)| \leq \leq kx^{-(1+\epsilon)}$ con $k, \rho = \text{cost.}$, $\rho > 0$, allora (9) non supera in valore assoluto

$$\alpha \left| \frac{k}{\rho} \frac{1}{x^\rho} \right|^n \frac{1}{n!}$$

che, in ogni intervallo $(\epsilon_1, +\infty)$ converge nel modo migliore, perchè è una serie esponenziale.

Così, p. es., per la equazione (3), ove si scriva x al posto di χ , si può porre: $Q(x) = h : x^2$ (ove $h = (4\nu^2 - 1) : 4$); valgono pertanto i risultati precedenti con $\rho = 1$. Se, come talvolta è sufficiente (per x abbastanza grande), ci limitiamo ai primi due termini delle (7) troviamo:

$$(10) \quad \zeta_1 \sim \alpha_1 + \frac{h}{2i} \int_{-\infty}^x (\alpha_1 + e^{-2\xi} \alpha_2) \xi^{-2} d\xi$$

(oltre ad una formola analoga per ζ_2).

Un'integrazione per parti mostra il legame di questa espressione con gli integrali classici $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$.

2. Studiamo ora il caso, in cui la (1) si può ridurre non alla forma (2), ma alla

$$(11) \quad y'' - [1 + Q(x)]y.$$

Si ponga ora

$$(12) \quad y = \tilde{\zeta}_1 e^x + \tilde{\zeta}_2 e^{-x}, \quad y' = \tilde{\zeta}_1 e^x - \tilde{\zeta}_2 e^{-x}$$

donde si deduce, tenendo conto di (11):

$$\tilde{\zeta}_1' e^x + \tilde{\zeta}_2' e^{-x} = 0, \quad \tilde{\zeta}_1' e^x - \tilde{\zeta}_2' e^{-x} = Q(x) [\tilde{\zeta}_1 e^x + \tilde{\zeta}_2 e^{-x}]$$

donde

$$\tilde{\zeta}_1' = \frac{1}{2} Q(x) [\tilde{\zeta}_1 + \tilde{\zeta}_2 e^{-2x}], \quad \tilde{\zeta}_2' = -\frac{1}{2} Q(x) [\tilde{\zeta}_1 e^{2x} + \tilde{\zeta}_2].$$

Con ipotesi analoghe alle precedenti se ne deduce:

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_1 &= \alpha_1 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x Q(\xi) [\tilde{\zeta}_1(\xi) + \tilde{\zeta}_2(\xi) e^{-2\xi}] d\xi \\ \tilde{\zeta}_2 &= \alpha_2 - \frac{1}{2} \int_{+\infty}^x Q(\xi) [\tilde{\zeta}_1(\xi) e^{2\xi} + \tilde{\zeta}_2(\xi)] d\xi. \end{aligned}$$

L'applicazione del metodo precedente richiede non solo la integrabilità di $|Q(x)|$, ma anche quella di $|Q(x)|e^{2x}$ in un intorno di $x = +\infty$. Se questa ipotesi restrittiva non è soddisfatta, invece di trovare le soluzioni con due costanti arbitrarie α_1, α_2 , supporremo $\alpha_1 = 0$. Per queste soluzioni particolari porremo $z_1 = e^{-2x} Z_1, z_2 = Z_2$. Le equazioni precedenti diventano:

$$Z_1 = \frac{e^{2x}}{2} \int_{+\infty}^x Q(\xi) e^{-2\xi} [Z_1(\xi) + Z_2(\xi)] d\xi,$$

$$Z_2 = \alpha_2 - \frac{1}{2} \int_{+\infty}^x Q(\xi) [Z_1(\xi) + Z_2(\xi)] d\xi;$$

e noi porremo:

$$(13) \quad Z_1(x) = \sum_1^{\infty} u_n(x) \quad , \quad Z_2 = \alpha_2 + \sum_1^n v_n,$$

ove:

$$u_1 = \alpha_2 \frac{e^{2x}}{2} \int_{+\infty}^x Q(\xi) e^{-2\xi} d\xi \quad , \quad v_1 = -\frac{\alpha_2}{2} \int_{+\infty}^x Q(\xi) d\xi,$$

$$u_n = \frac{e^{2x}}{2} \int_{+\infty}^x Q(\xi) e^{-2\xi} [u_{n-1}(\xi) + v_{n-1}(\xi)] d\xi \quad , \quad (n > 1)$$

$$v_n = -\frac{1}{2} \int_{+\infty}^x Q(\xi) [u_{n-1}(\xi) + v_{n-1}(\xi)] d\xi \quad , \quad (n > 1).$$

Osservando che nell'intervallo d'integrazione è $\xi \geq x$, $e^{2x} e^{-2\xi} \leq 1$, ne dedurremo:

$$|u_1| \leq \frac{|\alpha_2|}{2} \int_x^{+\infty} |Q(\xi)| d\xi \quad , \quad |v_1| \leq \frac{|\alpha_2|}{2} \int_x^{+\infty} |Q(\xi)| d\xi,$$

$$|u_n| \leq \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} |Q(\xi) [u_{n-1}(\xi) + v_{n-1}(\xi)]| d\xi$$

oltre ad una analoga equazione per la v_n . La convergenza della (13) si dimostra come sopra; e viene così, in questo caso, studiata almeno una delle soluzioni della equazione data.

Se esiste una soluzione nulla all'infinito con la sua derivata prima, la sua ricerca si potrebbe ridurre alla risoluzione della equazione integrale:

$$2iy(x) = \int_{-\infty}^x [e^{i(x-\xi)} - e^{-i(x-\xi)}] y(\xi) Q(\xi) d\xi$$

oppure

$$y(x) = \int_{-\infty}^x \sin(x - \xi) y(\xi) Q(\xi) d\xi$$

ottenuta applicando il metodo di Cauchy, anzichè quello della variazione delle costanti arbitrarie.

3. Sembra interessante notare che alle funzioni $e^{\pm ix}$, $e^{\pm x}$ qui usate si possono sostituire altre funzioni, la cui scelta può essere guidata da una intuizione che preveda l'andamento asintotico della soluzione cercata in casi che non rientrino nei precedenti. Così, per studiare l'equazione generale (1), si ponga:

$$(14) \quad y = \lambda_1 \tilde{\chi}_1 + \lambda_2 \tilde{\chi}_2$$

ove λ_1, λ_2 sono funzioni prescelte a piacere, di cui indicheremo con r_1, r_2 le derivate logaritmiche (nel caso precedente $r = \pm 1$, oppure $r = \pm i$). Le $\tilde{\chi}$ soddisfino ad equazioni del tipo:

$$(15) \quad \begin{cases} \tilde{\chi}_1' = \alpha \tilde{\chi}_1 + \beta \tilde{\chi}_2 \\ \tilde{\chi}_2' = \gamma \tilde{\chi}_1 + \delta \tilde{\chi}_2 \end{cases}$$

ove le $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ siano funzioni assolutamente integrabili tali che le (14) e (15) equivalgano alla equazione (1) di partenza. In tale caso si potranno applicare i metodi precedenti. È facile scrivere le equazioni, a cui devono soddisfare le $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Sostituendo (14) in (1), tenendo conto di (15) si trova un'equazione $A\tilde{\chi}_1 + B\tilde{\chi}_2 = 0$, ove le A, B dipendono dalle λ , dalle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, dalle loro derivate e dai coefficienti p, q della (1). Per l'applicazione del metodo precedente basterà che le equazioni $A = B = 0$ siano soddisfatte da un sistema di funzioni integrabili $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Tra i sistemi di soluzioni di queste equazioni sembra notevole quello definito dalle:

$$(16) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\lambda_1 \Phi_1 - (r_1' - r_2')}{r_1 - r_2}, & \delta = \frac{\lambda_2 \Phi_2 - (r_2' - r_1')}{r_2 - r_1} \\ \gamma = \lambda_1 \frac{\Phi_2}{r_1 - r_2}, & \beta = \lambda_2 \frac{\Phi_1}{r_1 - r_2} \end{cases}$$

ove, posto $l_i = 1 : \lambda_i$, e quindi $r_i = -l_i' : l_i$, è:

$$\Phi_i = \frac{1}{\lambda_i} (p' - q + r_i' - r_i^2 - p r_i) = -[l_i'' - (p l_i')' + q l_i].$$

In questo caso, Φ_i è il valore per $u = l_i = 1 : \lambda_i$ del polinomio $u'' - (pu)' + qu$, aggiunto del primo membro della equazione data. Se le $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ testè definite sono assolutamente integrabili, il nostro metodo è applicabile

anche a questo caso. Alle (16) si può giungere anche per altre vie. Posto $y = \lambda Y$, $\lambda' : \lambda = r$, $1 : \lambda = l$, la (1) diventa:

$$[Y' + (p + 2r)Y]' = (r' + p' - r^2 - pr - q)Y$$

equivalente alla:

$$(17) \quad [ly' + y(pl - l')]' = y\Phi[l(x)]$$

ossia

$$ly' + y(pl - l') = c + \int_{\alpha}^x y(\xi) \Phi[l(\xi)] d\xi$$

ove c è il valore del primo membro per $x = \alpha$ e dove:

$$-\Phi(l) = l'' - (pl)' + ql$$

è il polinomio aggiunto del primo membro della (1).

A questa stessa equazione (17) il Dini (cfr. due Memorie in « Annali di Matematica », ser. III, vol. 2 e 3) è giunto integrando l'identità

$$[y'' + py' + qy]l - y[l'' - (pl)' + ql] = [ly' + (pl - l')y]'$$

Posto in (17) col Dini $l = l_1$ ed $l = l_2$, indicando con c_1, c_2 i corrispondenti valori della costante c , e risolvendo le due equazioni trovate rispetto ad y , si trova facilmente:

$$(18) \quad y = \lambda_1 \frac{c_1 + \int_a^x y(\xi) \Phi(l_1(\xi)) d\xi}{r_1 - r_2} + \lambda_2 \frac{c_2 + \int_a^x y(\xi) \Phi(l_2(\xi)) d\xi}{r_2 - r_1}.$$

Si ritorna alle formole del precedente caso particolare, indicando con λ_1, λ_2 i coefficienti di λ_1, λ_2 nel secondo membro di (18), e supponendo $a = \infty$.

Per $a = \infty$ già il Dini fece notevolissime applicazioni di questa formola, caso assai particolare dei precedenti teoremi.

È forse inutile osservare che tutte queste considerazioni sono applicabili anche ad equazioni di ordine superiore al secondo.

Meccanica (Meccanica celeste). — *Sulla impossibilità d'una stratificazione d'equilibrio omotetica per gli astri fluidi rotanti.*
Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. C. MINEO.

Il Volterra, partendo dall'ipotesi molto generale di densità positive, finite e integrabili, dimostrò, nel 1903, l'impossibilità d'una stratificazione per ellissoidi omotetici per le masse fluide eterogenee rotanti in equilibrio relativo ⁽²⁾. Recentemente, il Wavre ha esteso questa impossibilità a una stratificazione di forma qualunque, nell'ipotesi, però, di densità verificanti l'equazione del Poisson ⁽³⁾. A questo scopo, egli si serve di proprietà delle linee di forza del campo di gravità dell'astro e d'una formola del Bruns. In questa Nota, ammettendo sempre densità verificanti l'equazione del Poisson, darò una dimostrazione semplicissima dell'impossibilità d'una stratificazione omotetica qualsivoglia, senza bisogno d'introdurre nè le linee di forza nè il teorema del Bruns: basta escludere, come fa lo stesso Wavre, che al centro dell'astro la densità possa divenire infinita o essere inferiore alla densità media dell'astro stesso. Queste condizioni per la densità possono essere, del resto, anche inutili; giacchè esse si connettono a condizioni soltanto necessarie per l'equilibrio relativo: altre condizioni devono essere verificate, le quali possono escludere la stratificazione in discorso, indipendentemente da qualunque ipotesi sulla densità. In particolare, l'esclusione della stratificazione omotetica sussisterà anche per densità semplicemente integrabili; giacchè la legge di densità è in fondo un dato del problema, e le equazioni fondamentali dell'equilibrio (le equazioni di Clairaut generalizzate) mostrano che se una configurazione d'equilibrio esiste per densità semplicemente integrabili, essa sussiste ancora certamente per densità verificanti l'equazione del Poisson.

Noto infine che la mia dimostrazione porta all'equazione cui deve verificare, dal punto di vista strettamente geometrico, ogni stratificazione omotetica, indipendentemente dalla densità e da ogni altro elemento meccanico.

1. Sia, in coordinate polari r, θ, Φ ,

$$(1) \quad r(1 + \zeta) = a \quad , \quad (\zeta = \zeta(\theta, \Phi)),$$

(1) Presentata nella seduta del 7 novembre 1937.

(2) L'elegante dimostrazione del Volterra richiede lunghi sviluppi analitici, appunto per la generalità lasciata alla densità: nel caso di una densità verificante l'equazione del Poisson, il Volterra dà una dimostrazione semplicissima, e una più elementare senza calcolo ne dà nel caso d'una densità crescente dalla superficie al centro. Cfr. « Acta Mathematica », 27, 1903, pp. 105-124.

(3) Vedi WAVRE, *Figures planétaires et Géodésie*. Gauthier-Villars, 1932.

l'equazione delle superficie d'equilibrio omotetiche (e di connessione sferica) dell'astro, essendo a un parametro (positivo), che va dal valore zero (corrispondente al centro dell'astro) al valore A (corrispondente alla superficie libera dell'astro). Introduciamo i due parametri differenziali del Lamé

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta_1 a = (1 + \zeta)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \Phi}\right)^2, \\ \Delta_2 a = \frac{2(1 + \zeta)}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \sin \theta\right) + \frac{1}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \Phi^2}. \end{cases}$$

Come si sa, l'unica condizione per l'equilibrio relativo è che il potenziale totale (newtoniano e della forza centrifuga) sia una funzione di sola a . Detto W questo potenziale e denotando con accenti le derivazioni rispetto al parametro a , abbiamo:

$$\Delta_2 W = W' \Delta_2 a + W'' \Delta_1 a.$$

Sopra ogni superficie a , dobbiamo dunque avere, per densità verificanti l'equazione del Poisson:

$$(3) \quad \frac{W'}{a} (a \Delta_2 a) + W'' \Delta_1 a = 2 \omega^2 - 4 \pi f \rho,$$

dove ω è la velocità di rotazione (costante) dell'astro, ρ è la densità, funzione di sola a , f è la costante dell'attrazione universale, e

$$(4) \quad a \Delta_2 a = 2(1 + \zeta)^2 + \frac{1 + \zeta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \sin \theta\right) + \frac{1 + \zeta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \Phi^2}$$

non dipende da a , ma è, come $\Delta_1 a$, funzione soltanto di θ e Φ .

Segue dalla (3):

$$\frac{W'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} (a \Delta_2 a) + W'' \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta_1 a) = 0,$$

e quindi

$$(5) \quad -\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} (a \Delta_2 a)}{\frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta_1 a)} = \frac{a W''}{W'} = c_1,$$

dove c_1 è una costante indipendente da a , θ e Φ .

Si deduce dalle (5):

$$(6) \quad W' = c_2 a^{c_1}, \quad W'' = c_1 c_2 a^{c_1-1}.$$

Tenendo conto delle (6), la (3) diventa:

$$a \Delta_2 a + c_1 \Delta_1 a = \frac{2 \omega^2 - 4 \pi f \rho}{c_2 a^{c_1 - 1}}.$$

Quindi

$$(7) \quad a \Delta_2 a + c_1 \Delta_1 a = \frac{2 \omega^2 - 4 \pi f \rho}{c_2 a^{c_1 - 1}} = c_3,$$

dove c_3 è una costante (indipendente da a , θ e Φ).

Segue

$$(8) \quad 2 \omega^2 - 4 \pi f \rho = c_2 c_3 a^{c_1 - 1}.$$

Per $c_1 = 1$, l'astro è omogeneo.

Per $c_1 > 1$, si avrebbe al centro una densità inferiore alla densità media dell'astro (in virtù della celebre disequaglianza del Poincaré).

Per $c_1 < 1$, la densità diverrebbe infinita al centro.

Dunque la stratificazione omotetica è impossibile per gli astri fluidi rotanti eterogenei.

Nel caso delle masse fluide omogenee omoteticamente stratificate, la stratificazione deve verificare l'equazione

$$(9) \quad c_3 = 3 (1 + \zeta)^2 + \frac{1 + \zeta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \\ + \frac{1 + \zeta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \Phi^2} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \Phi} \right)^2.$$

La (9), naturalmente, è verificata dagli ellissoidi di Maclaurin e di Jacobi.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *La cinématique du corps solide dans l'espace ordinaire à trois dimensions.* Nota⁽¹⁾ di R. WOINAROSKY, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Je me propose de trouver dans ce que va suivre l'expression des éléments cinématiques du mouvement rigide le plus général, en fonction des éléments géométriques des deux surfaces réglées, lieu de l'axe instantané de rotation dans l'espace fixe et dans l'espace mobile.

X. Antomari⁽²⁾ traite un problème analogue dans la seconde partie de sa thèse. Mais la méthode dont il fait emploi, de même que les éléments géométriques à l'aide desquels il définit une surface réglée, le conduisent, quand il résout diverses problèmes, à des équations de Riccati qu'il faut intégrer. Les résultats que j'obtiens me permettront de surmonter cette difficulté, en résolvant les mêmes problèmes par des simples quadratures.

2. Je m'occuperai seulement du cas où les deux surfaces réglées ne sont pas développables, l'autre cas ne présentant aucune difficulté en ce que concerne l'application de la méthode.

Je prends comme éléments géométriques définissant une surface réglée, une trajectoire orthogonale des génératrices et l'angle formé par la binormale de cette courbe et une génératrice de la surface au point où elles se coupent. Je désigne avec (S) la surface réglée située dans l'espace fixe et avec (C) et φ la courbe et l'angle — considéré comme fonction de l'arc de la courbe — qui la définissent. De même (Σ) sera la surface réglée située dans l'espace mobile, et (Γ) et ψ les éléments géométriques correspondants.

A chaque instant (S) et (Σ) ont une génératrice commune G, qui coupe les courbes (C) et (Γ) aux points \bar{I} et \bar{I}' . La position relative des deux surfaces sera déterminée par la distance $\bar{I}\bar{I}' = S$ et par l'angle θ , que font les tangentes en \bar{I} et \bar{I}' aux courbes (C) et (Γ).

La méthode que j'emploie consiste dans la décomposition du mouvement rigide à étudier, en trois mouvements rigides élémentaires :

1° le mouvement de l'espace mobile par rapport au trièdre de Frenêt attaché à (Γ);

2° le mouvement du trièdre de Frenêt attaché à (Γ) par rapport à celui attaché à (C);

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1937.

(2) X. AN TOMARI, *Thèse*. Paris, 1894. Voir aussi: A. SCHOENFLIES, *Kinematick*. «Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaft». Bd. IV, Heft I, drittes Referat.

3° le mouvement du trièdre attaché à (C) par rapport à l'espace fixe. Un point quelconque participant au mouvement rigide général, aura une vitesse dans chacun de ces mouvements. En les ajoutant et en écrivant que leur somme doit être une rotation et une translation instantanées le long de G, on obtiendra les expressions cherchées pour les éléments cinématiques du mouvement rigide général.

En écrivant, par exemple, que la rotation instantanée $\bar{\omega}$ se réduit à sa composante le long de G, on aura les relations:

$$(I) \quad \begin{cases} -\frac{v_{oc}}{R_c} \sin \varphi + \left(\frac{v_{or}}{R_r} \cos \theta \cdot \sin \psi + \frac{v_{or}}{R_r} \sin \theta \right) + \dot{\psi} \sin \theta = 0 \\ \frac{v_{oc}}{T_c} + \left(\frac{v_{or}}{R_r} \sin \theta \cdot \sin \psi - \frac{v_{or}}{T_r} \cos \theta \right) - \dot{\psi} \cos \theta - \dot{\phi} = 0 \end{cases}$$

et pour ω l'expression

$$(2) \quad \omega = \frac{v_{oc}}{R_c} \cos \varphi - \frac{v_{or}}{R_r} \cos \psi + \dot{\theta}$$

v_{oc} et v_{or} étant les vitesses des points \dot{I} et \dot{I}' sur leurs trajectoires (C) et (I'), R_c , T_c et R_r , T_r les rayons de courbure et de torsion de ces deux courbes. De même, en écrivant que la translation instantanée $\bar{\tau}$ est dirigée selon G, on obtiendra les relations:

$$(3) \quad \begin{cases} v_{oc} - v_{or} \cos \theta = \delta \frac{v_{oc}}{R_c} \sin \varphi \\ -v_{or} \sin \theta = -\delta \frac{v_{oc}}{T_c} + \delta \dot{\phi} \end{cases}$$

et pour τ l'expression:

$$(4) \quad \tau = \delta$$

3. Il faut montrer maintenant que les expressions obtenues pour ω et τ sont indépendantes du choix des deux trajectoires orthogonales (C) et (I'). À cet effet je montrerai qu'elles ne changent pas quand on change (I') avec une autre trajectoire orthogonale (I'') de (Σ). Soit \dot{I}'' le point où (I'') coupe G et θ' l'angle que font les tangentes en \dot{I}' et \dot{I}'' à (I') et à (I''). Il est facile de montrer qu'en partant des deux courbes (C) et (I'') on aura pour ω l'expression:

$$(5) \quad \omega = \frac{v_{oc}}{R_c} \cos \varphi - \frac{v_{or'}}{R_{r'}} \cos \psi' + \dot{\theta}' + \dot{\theta}$$

avec des significations évidentes pour $R_{r'}$, $v_{or'}$, ψ' . Mais on voit immédiatement que

$$-\frac{v_{or'}}{R_{r'}} \cos \psi' + \dot{\theta}'$$

est l'expression de la composante sur G , de la rotation instantanée dans le mouvement rigide r^0 , exprimée avec les éléments correspondante à (Γ) , de sorte qu'elle peut être remplacée par l'expression

$$-\frac{v_{or}}{R_r} \cos \psi :$$

ce que prouve l'invariance de ω par rapport au changement de (Γ) . D'autre part, comme la distance $\bar{I}'\bar{I}''$ doit être constante tout le long de (Γ) , il résulte que τ lui aussi ne change pas.

4. Je vais appliquer maintenant la méthode exposée, pour résoudre un problème dont la solution se trouve dans la seconde partie de la thèse d'Antomari, à fin qu'on puisse voir la simplification qu'elle introduit. Le problème est le suivant: connaissant la surface (S) et la trajectoire d'un point du solide en mouvement, déterminer la surface (Σ) .

La surface (S) étant connue, on connaît les coordonnées du point \bar{I} , par rapport à un trièdre fixe $Ox y z$. Soient:

$$x_i(s), y_i(s), z_i(s)$$

leurs expressions en fonction de l'arc de (C) . De même soient:

$$x_P(\lambda), y_P(\lambda), z_P(\lambda)$$

les coordonnées du point du solide, dont on connaît la trajectoire. Si l'on prend l'arc s de (C) comme paramètre représentant le temps, ce que ne réduit pas la généralité, on aura pour les composantes de la vitesse de P les expressions:

$$(6) \quad v_x = \frac{dx_P}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{ds} \quad , \quad v_y = \frac{dy_P}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{ds} \quad , \quad v_z = \frac{dz_P}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{ds} .$$

Il reste à établir la relation entre s et λ , qui fait correspondre au point \bar{I} de (C) le point P sur la trajectoire connue. Si l'on désigne par $\omega(s)$, $\tau(s)$ les intensités de la rotation et de la translation instantanées, on aura pour leurs composantes les expressions:

$$(7) \quad \begin{cases} \omega_x = \omega \cdot \sin \varphi \cdot \alpha_1 + \omega \cdot \cos \varphi \cdot \alpha_2 \\ \omega_y = \omega \cdot \sin \varphi \cdot \beta_1 + \omega \cdot \cos \varphi \cdot \beta_2 \\ \omega_z = \omega \cdot \sin \varphi \cdot \gamma_1 + \omega \cdot \cos \varphi \cdot \gamma_2 \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} \tau_x = \tau \cdot \sin \varphi \cdot \alpha_1 + \tau \cdot \cos \varphi \cdot \alpha_2 \\ \tau_y = \tau \cdot \sin \varphi \cdot \beta_1 + \tau \cdot \cos \varphi \cdot \beta_2 \\ \tau_z = \tau \cdot \sin \varphi \cdot \gamma_1 + \tau \cdot \cos \varphi \cdot \gamma_2 . \end{cases}$$

Ces expressions contiennent l'angle $\varphi(s)$, connu parcequ'on connaît la surface (S), et les cosinus directeurs $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, de la normale principale et de la binormale de la courbe (C), qui sont également connus. De même c'est évident qu'on aura les relations

$$(9) \quad \begin{cases} v_x = \tau_x + \omega_y (z_p - z_1) - \omega_z (y_p - y_1) \\ v_y = \tau_y + \omega_z (x_p - x_1) - \omega_x (z_p - z_1) \\ v_z = \tau_z + \omega_x (y_p - y_1) - \omega_y (x_p - x_1) \end{cases}$$

Éliminant ω et τ de ces relations, on obtiendra une relation entre λ et s , à l'aide de laquelle on peut exprimer x_p, y_p, z_p en fonction de s . On déduit alors des deux premières relations (9) les expressions de ω et τ en fonction du même paramètre. Ces expressions une fois connues, on pourra déduire, des relations (1), (2), (3) et (4), les expressions de R_r, T_r, ψ , qui déterminent la surface (Σ). Il est à remarquer qu'on doit faire une seule quadrature pour calculer δ .

5. Pour terminer je remarquerai que la méthode exposée aux paragraphes 2 et 3 est susceptible d'être généralisée pour les espaces euclidiens à un nombre quelconque de dimensions, permettant, pour ce espaces aussi, un traitement simple des problèmes analogues au problème résolu au paragraphe précédent.

Meccanica. — *Estensione del teorema di Jacobi sul viriale e riferimenti di minima energia cinetica.* Nota di G. LAMPARIELLO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Osservazioni della Cometa 1936 a (Peltier).*
Nota ⁽¹⁾ di G. L. ANDRISSI, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

1. In questa Nota riporto le osservazioni, da me eseguite, sulla Cometa 1936 a (Peltier) nel R. Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario.

La Cometa 1936 a venne scoperta il 16 maggio 1936 dall'astronomo dilettante Peltier a Delphos (Ohio) ed è la quinta Cometa scoperta dal Peltier stesso. Subito dopo, la sera del 18 maggio osservai questa Cometa con il grande Equatoriale Steinheil, stimando il nucleo di nona grandezza e notando una coda corta a forma di ventaglio. Dopo alcune sere, durante le quali non mi fu possibile osservare per le cattive condizioni atmosferiche, ripresi le osservazioni il 24 maggio e le continuai sino alla fine di luglio.

La luminosità della Cometa andò man mano crescendo nel mese di giugno e di luglio, passando essa al perielio il 9 luglio ed al perigeo il 4 agosto, tanto che la notte del 15 luglio riuscii a vederla ad occhio nudo. Nel corso delle osservazioni, notai vari cambiamenti nel nucleo e nella coda della Cometa; verso la fine di luglio la Cometa appariva con un nucleo brillante, dal quale si dipartivano tre specie di « aigrettes » dirette dalla parte della coda, che aveva raggiunto nel frattempo una notevole lunghezza. Ai primi di agosto, stimai la luminosità del nucleo della Cometa fra la terza e la quarta grandezza e la coda della lunghezza di circa un grado. Nell'agosto, essendo la declinazione divenuta notevolmente australe, non mi fu più possibile continuare le osservazioni.

Le osservazioni qui riportate sono state tutte da me compiute a Monte Mario, con l'Equatoriale Steinheil la cui lente obbiettiva ha un diametro di m. 0.386 ed una distanza focale di m. 5.248, e che è stato solidamente installato sopra un robustissimo pilastro, il quale, collegandosi con i muri maestri, attraversa tutto l'edificio dell'Osservatorio dal basso all'alto e raggiunge con le fondamenta circa sei metri di profondità nel terreno ⁽²⁾. Il Grande Equatoriale viene così ad avere una assoluta stabilità.

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1937.

(2) Per maggiori dettagli sulla installazione dell'Equatoriale Steinheil a Monte Mario, vedi: G. ARMELLINI, *Attività del R. Osservatorio Astronomico del Campidoglio nell'anno 1934*. « Calendario del R. Osservatorio Astronomico di Roma », 1935.

TABELLA I.

Cometa 1936 a (Peltier).

1936 ¹	T. U.	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	N.	$\alpha_{app.}$	$\delta_{app.}$	Red. a. l. app.	*
Maggio 24	1 ^h 25 ^m 36 ^s	— 13 ^m 54 ^s .90	— 4' 36".0	3.3	0 ^h 1 ^m 45 ^s .65	+ 72° 41' 24".3	+ 0 ^s .05	— 3".5
» 25	0 26 5	— 11 48 .95	+ 0 33 .8	3.3	0 2 49 .51	+ 72 36 1 .1	+ 0 .16	— 3 .6
» 25	23 22 22	— 11 3 .75	— 4 56 .6	3.3	0 3 34 .78	+ 72 30 30 .6	+ 0 .23	— 3 .7
» 25	23 22 22	— 30 11 .60	— 1 59 .7	3.3	0 3 34 .69	+ 72 30 31 .5	+ 0 .17	— 3 .0
Giugno 6	22 11 46	— 12 21 .62	— 6 5 .6	2.2	0 9 47 .20	+ 71 21 0 .9	+ 1 .21	— 3 .8
» 8	20 47 24	— 8 41 .28	— 0 17 .6	2.2	0 9 54 .90	+ 71 8 41 .0	+ 1 .40	— 3 .8
» 12	21 25 9	— 19 43 .04	+ 4 7 .4	3.3	0 9 47 .05	+ 70 41 48 .6	+ 1 .67	— 3 .5
» 13	22 54 22	— 19 59 .86	— 3 11 .5	2.2	0 9 30 .31	+ 70 34 29 .8	+ 1 .75	— 3 .4
» 15	22 27 47	— 27 35 .01	— 1 30 .8	3.3	0 8 55 .48	+ 70 19 52 .5	+ 1 .88	— 3 .2
» 16	21 21 43	+ 7 7 .74	+ 4 46 .2	3.3	0 8 32 .66	+ 70 12 28 .3	+ 2 .12	— 3 .5
» 16	23 36 36	— 3 26 .54	— 1 8 .2	3.3	0 8 30 .86	+ 70 11 45 .2	+ 2 .07	— 3 .5
» 16	23 36 36	+ 7 6 .39	+ 4 4 .0	3.3	0 8 31 .31	+ 70 11 46 .2	+ 2 .12	— 3 .4
» 17	22 24 18	+ 6 39 .80	— 3 15 .9	1.1	0 8 4 .79	+ 70 4 26 .3	+ 2 .19	— 3 .4
» 17	22 24 18	— 3 20 .64	+ 4 12 .3	1.1	0 8 5 .41	+ 70 4 25 .3	+ 2 .15	— 3 .3
» 19	2 13 30.	— 3 58 .41	— 5 43 .2	2.2	0 7 27 .72	+ 69 54 29 .9	+ 2 .23	— 3 .2
» 19	2 13 30	+ 7 7 .46	— 2 22 .9	2.2	0 7 28 .93	+ 69 54 33 .0	+ 2 .23	— 3 .2
» 19	22 27 2	+ 3 41 .34	— 1 35 .0	4.4	0 7 2 .13	+ 69 47 9 .1	+ 2 .34	— 3 .1
» 21	2 3 56	+ 3 47 .51	+ 5 11 .2	3.3	0 6 19 .93	+ 69 36 54 .6	+ 2 .47	— 3 .0
» 21	23 59 16	— 2 3 .09	+ 2 51 .9	2.2	0 5 42 .64	+ 69 28 16 .5	+ 2 .50	— 2 .9
» 23	1 23 7	+ 7 2 .30	+ 4 50 .7	1.1	0 4 53 .30	+ 69 17 58 .8	+ 2 .58	— 2 .7
» 24	2 27 15	+ 6 9 .93	— 6 22 .5	3.3	0 4 1 .01	+ 69 6 45 .8	+ 2 .66	— 2 .5
» 26	0 53 42	— 1 54 .78	+ 2 42 .2	3.3	0 2 14 .47	+ 68 46 3 .4	+ 2 .77	— 2 .2
» 26	21 11 7	— 2 49 .83	— 7 16 .2	2.2	0 1 19 .48	+ 68 36 5 .1	+ 2 .83	— 2 .1
» 27	0 12 58	— 2 58 .78	— 8 44 .3	4.4	0 1 10 .53	+ 68 34 37 .0	+ 2 .83	— 2 .1
» 28	0 4 35	— 1 54 .96	— 9 17 .6	5.5	0 0 6 .82	+ 68 22 20 .0	+ 2 .91	— 1 .9
» 28	23 14 16	+ 2 46 .18	+ 8 29 .9	2.2	23 58 58 .37	+ 68 10 6 .3	+ 2 .99	— 1 .6
» 28	23 14 16	+ 1 14 .13	+ 4 2 .4	2.2	23 58 58 .46	+ 68 10 6 .1	+ 2 .98	— 1 .7
» 29	1 20 50	+ 2 40 .42	+ 7 0 .6	3.3	23 58 52 .61	+ 68 8 37 .0	+ 2 .99	— 1 .6
» 29	1 20 50	+ 1 8 .28	+ 2 33 .5	3.3	23 58 52 .62	+ 68 8 37 .3	+ 2 .99	— 1 .6
» 30	1 6 53	+ 1 30 .62	— 6 37 .1	3.3	23 59 15 .02	+ 67 59 26 .8	+ 3 .05	— 1 .5

Segue: TABELLA I.

1936	T. U.	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	N.	$\alpha_{app.}$	$\delta_{app.}$	Red. a. l. app.		*	
Luglio	3	1 ^h 0 ^m 25 ^s	— 1 ^m 32 ^s .07	— 4' 9".7	3.3	23 ^h 53 ^m 31 ^s .21	+ 67° 8' 29".6	+ 3 ^s .24	— 0'.8	21
»	3	20 54 38	— 2 40.52	— 0 11.6	3.3	23 52 10.78	+ 66 53 58.8	+ 3.28	— 0.6	22
»	3	22 55 26	— 2 47.94	— 1 36.8	3.3	23 52 3.37	+ 66 52 33.6	+ 3.29	— 0.6	22
»	4	0 27 51	— 2 53.45	— 2 44.6	3.3	23 51 57.86	+ 66 51 25.9	+ 3.29	— 0.5	22
»	4	20 45 56	+ 3 13.44	+ 2 31.2	3.3	23 50 30.68	+ 66 55 35.7	+ 3.36	— 0.2	23
»	4	23 2 54	+ 3 4.74	+ 0 48.1	3.3	23 50 21.98	+ 66 53 52.8	+ 3.36	— 0.2	23
»	5	1 3 57	+ 2 56.02	— 0 51.1	3.3	23 50 13.25	+ 66 52 13.4	+ 3.35	— 0.2	23
»	5	21 38 59	+ 3 32.18	— 2 10.3	3.3	23 48 44.24	+ 66 15 15.9	+ 3.43	+ 0.1	24
»	5	23 42 2	+ 3 22.82	— 3 52.6	3.3	23 48 34.87	+ 66 13 33.6	+ 3.42	+ 0.1	24
»	6	1 41 57	+ 3 13.45	— 5 34.1	3.3	23 48 25.51	+ 66 11 52.1	+ 3.43	+ 0.1	24
»	8	0 34 29	— 4 34.76	+ 3 42.2	3.3	23 44 41.69	+ 65 28 39.7	+ 3.50	+ 0.6	25
»	8	0 34 29	— 6 22.98	+ 2 58.5	3.3	23 44 41.54	+ 65 28 40.3	+ 3.50	+ 0.6	26
»	8	2 30 19	— 4 44.77	+ 1 49.6	3.3	23 44 31.69	+ 65 26 47.2	+ 3.51	+ 0.7	25
»	8	2 30 19	— 6 32.83	+ 1 5.2	3.3	23 44 31.66	+ 65 26 47.0	+ 3.47	+ 0.6	26
»	9	0 38 3	+ 7 31.51	— 0 49.8	1.1	23 42 38.83	+ 65 3 56.5	+ 3.58	+ 1.2	27
»	10	0 27 51	+ 2 13.15	— 8 8.9	3.3	23 40 28.99	+ 64 37 36.3	+ 3.62	+ 1.4	28
»	10	21 29 43	— 54.75	+ 2 47.9	3.3	23 38 28.21	+ 64 12 28.2	+ 3.66	+ 1.7	29
»	10	23 31 36	— 1 6.80	+ 0 23.0	3.3	23 38 16.03	+ 64 10 3.4	+ 3.53	+ 1.8	29
»	11	1 38 48	— 1 19.70	— 1 29.2	3.3	23 38 3.24	+ 64 8 11.2	+ 3.64	+ 1.8	29
»	11	20 46 16	— 1 31.04	— 0 23.2	3.3	23 36 8.12	+ 63 42 33.2	+ 3.69	+ 2.1	30
»	11	22 41 52	— 1 42.63	— 2 59.9	3.3	23 35 56.53	+ 63 39 56.5	+ 3.69	+ 2.1	30
»	14	1 27 14	+ 3 21.52	+ 3 1.5	3.3	23 30 21.03	+ 62 25 4.2	+ 3.77	+ 3.2	32
»	15	1 9 8	— 17 59.77	— 6 15.4	1.1	23 27 46.30	+ 61 45 18.1	+ 3.77	+ 3.1	33
»	16	0 10 18	+ 1 37.90	— 3 14.3	2.2	23 24 39.53	+ 61 1 47.8	+ 3.48	+ 4.1	34
»	16	0 10 18	— 1 29.10	— 2 50.4	2.2	23 24 39.62	+ 61 1 46.6	+ 3.82	+ 4.0	35
»	16	2 22 24	+ 1 19.90	— 7 39.4	3.3	23 24 21.88	+ 60 57 22.7	+ 3.83	+ 4.1	34
»	16	23 49 45	— 3 10.90	— 0 13.1	3.3	23 21 31.88	+ 60 13 7.1	+ 3.81	+ 4.5	36
»	17	1 43 59	— 3 27.50	— 4 25.8	3.3	23 21 15.28	+ 60 8 54.5	+ 3.84	+ 4.5	36
»	17	22 9 35	— 3 0.30	— 34.5	2.2	23 18 25.36	+ 59 22 17.8	+ 3.86	+ 5.1	37
»	17	22 9 35	— 4 33.60	+ 3 17.9	2.2	23 18 25.08	+ 59 22 17.7	+ 3.85	+ 5.1	38
»	17	22 9 35	— 6 37.70	+ 1 37.5	2.2	23 18 25.58	+ 59 22 18.5	+ 3.85	+ 4.9	39
»	18	0 47 42	+ 0 59.43	— 1 8.9	3.3	23 18 2.35	+ 59 15 55.0	+ 3.86	+ 5.2	40
»	18	0 47 42	— 4 56.07	— 3 3.8	3.3	23 18 2.62	+ 59 15 55.9	+ 3.86	+ 5.0	38

Segue: TABELLA I.

1936	T. U.	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	N.	$\alpha_{app.}$	$\delta_{app.}$	Red. a. l. app.		*
Luglio 18	22 ^h 11 ^m 23 ^s	— 1 ^m 55 ^s .43	— 4' 31".1	3.3	23 ^h 14 ^m 54 ^s .97	+ 58° 21' 50".2	+ 3 .88	+ 5".6	41
» 19	2 57 30	— 1 17 .31	— 1 50 .2	3.3	23 14 6 .64	+ 58 18 3 .3	+ 3 .89	+ 5 .8	42
» 23	0 14 19	— 3 31 .30	+ 3 43 .5	3.3	22 58 22 .33	+ 52 45 24 .5	+ 3 .90	+ 8 .5	43
» 25	21 13 54	— 4 35 .10	+ 10 5 .7	3.3	22 44 29 .93	+ 46 34 0 .0	+ 3 .89	+ 11 .1	44
» 25	23 53 42	— 6 10 .25	+ 3 0 .6	3.3	22 43 52 .35	+ 46 15 47 .6	+ 3 .88	+ 17 .7	45
» 26	20 45 25	+ 1 26 .07	— 10 18 .5	2.2	22 39 11 .84	+ 43 46 23 .0	+ 3 .90	+ 12 .1	46
» 27	20 34 5	+ 2 51 .90	+ 1 13 .7	3.3	22 33 46 .68	+ 40 52 8 .8	+ 3 .89	+ 13 .2	47
» 29	1 59 0	— 1 57 .50	— 0 31 .1	3.3	22 26 3 .82	+ 35 40 46 .9	+ 4 .08	+ 15 .0	48

Per le misure micrometriche mi sono valso di un ottimo micrometro Mioni, già studiato dai proff. E. Bianchi⁽¹⁾ e G. Abetti⁽²⁾, e munito di due viti micrometriche, di cui la principale (A) porta il telarino ed il contagiri, mentre la secondaria (B) porta il filo mobile. Rideterminai i passi delle due viti, per vedere se vi erano state variazioni dall'epoca delle osservazioni del Bianchi e dell'Abetti, ma mi ritrovai in perfetto accordo con il valore medio⁽³⁾ $R = 19''.7073$ per il passo della vite A; valore che adottai nelle presenti misure. Per le differenze di ascensione mi sono valso di un buon cronografo Mioni a secco, regolato da un orologio siderale a pendolo invar di Dent.

Nella prima colonna della tabella I è la data, nella seconda è l'istante dell'osservazioni in T. U., nella terza e quarta colonna sono le differenze di A. R. e di declinazione, nella quinta il numero delle osservazioni, nella sesta e settima le coordinate apparenti della Cometa, nell'ottava e nona colonna le correzioni per la riduzione al luogo apparente della stella di confronto, della quale nella decima colonna è dato il numero che corrisponde nella tabella II alle posizioni della stella stessa per il 1936.0 ridotte dall'A. G.

Ogni osservazione, indicata nella colonna quinta, si compone di cinque appulsii ai fili orari della cometa e delle stelle di confronto, per le differenze di ascensione retta; e di tre letture alla vite micrometrica per le differenze di declinazione.

(1) G. BIANCHI, *Studio del nuovo micrometro del grande equatoriale*. «Memorie del R. Osservatorio Astronomico al Collegio Romano», ser. III, vol. V, parte I.

(2) G. ABETTI, *Misure micrometriche di coppie di stelle*. «Memorie del R. Osservatorio Astronomico al Collegio Romano», ser. III, vol. VI, parte II ed ultima.

(3) G. ABETTI, cfr. numero precedente.

TABELLA II.

Stelle di confronto.

N.	$\alpha_{1936.0}$	$\delta_{1936.0}$	Autorità	N.	$\alpha_{1936.0}$	$\delta_{1936.0}$	Autorità
			A. G.				A. S.
1	0 ^h 15 ^m 40 ^s .50	+ 72° 46' 3".8	31	25	23 ^h 49 ^m 12 ^s .95	+ 65° 24' 56".9	3879
2	0 14 38.30	+ 72 35 30.9	27	26	23 51 1.02	+ 65 25 41.2	3888
3	0 33 46.12	+ 72 32 34.2	69	27	23 35 3.74	+ 65 4 45.1	14218
4	23 55 15.41	+ 72 13 26.6	3443	28	23 38 12.22	+ 64 45 43.8	14265
5	0 22 7.61	+ 71 27 10.3	45	29	23 39 19.30	+ 64 9 38.6	14285
6	0 18 34.78	+ 71 9 2.4	40	30	23 37 35.47	+ 63 42 54.3	14254
7	0 29 28.42	+ 70 37 44.7	58	31	23 25 8.56	+ 62 39 42.8	14080
8	0 36 28.61	+ 70 21 26.5	77	32	23 26 55.74	+ 62 21 59.5	14104
9	0 1 22.80	+ 70 7 45.6	3939	33	23 45 42.30	+ 61 51 30.4	14406
10	0 11 55.33	+ 70 12 56.9	36	34	23 22 58.15	+ 61 4 58.0	14048
11	0 11 23.90	+ 70 0 16.3	33	35	23 26 4.90	+ 61 4 33.0	14090
12	0 0 19.24	+ 69 56 59.1	3933	36	23 24 38.94	+ 60 13 15.7	14073
13	0 3 18.45	+ 69 48 47.2	1	37	23 21 21.80	+ 59 22 47.2	14021
14	0 2 29.95	+ 69 31 46.4	3947	38	23 22 54.83	+ 59 18 54.7	14047
15	0 7 43.23	+ 69 25 27.5	18	39	23 24 59.43	+ 59 20 36.1	14075
16	23 57 48.42	+ 69 13 10.8	3918	40	23 16 59.06	+ 59 16 58.7	13950
17	0 4 6.48	+ 68 43 23.4	7	41	23 16 46.52	+ 58 26 15.7	13944
18	0 1 58.87	+ 68 31 39.5	3946	42	23 15 20.06	+ 58 19 47.7	13925
19	23 56 9.20	+ 68 1 38.0	3908	43	23 1 49.73	+ 52 41 32.5	8080
20	23 57 41.35	+ 68 6 5.4	3915	44	22 49 1.14	+ 46 23 43.2	17182
21	23 55 0.04	+ 67 12 40.1	3902	45	22 49 58.72	+ 46 12 29.3	17198
22	23 54 48.02	+ 66 54 11.0	3900	46	22 37 41.87	+ 43 56 29.4	16991
23	23 47 13.88	+ 66 33 4.7	3872	47	22 30 50.89	+ 40 50 41.9	16870
24	23 45 8.63	+ 66 17 26.1	3879	48	22 27 57.24	+ 35 41 3.0	10705

Astronomia. — *Osservazioni meridiane di GIOVE, SATURNO, URANO e della LUNA nel 1936* ⁽¹⁾. Nota di L. GIALANELLA, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. ARMELLINI.

1. Anche nel decorso anno 1936 ho continuato ad osservare per mezzo dell'invertibile meridiano *Bamberg* del R. Osservatorio Astronomico di Roma, allora sul Campidoglio, i grandi e medi Pianeti. Seguendo la pubblicazione delle serie intraprese negli anni precedenti, raccolgo in questa Nota i risultati delle osservazioni di *Giove*, *Saturno*, *Urano* e della *Luna*; osservazioni che comprendono la determinazione delle *ascensioni rette* apparenti dei quattro Pianeti, nonchè la misura, per mezzo del micrometro autoregistratore, di cui lo strumento è stato sempre dotato, dei *diametri orizzontali* di *Giove* e di *Saturno*. Il metodo adoperato per la misura dei diametri è stato da me escogitato ed esposto per esteso in una Nota precedente ⁽³⁾.

I dettagli riguardanti lo strumento adoperato (*Bamberg* grande modello, 88 mm. di apertura, cm. 95 di distanza focale, ingrandimento 120), il metodo di osservazione e di calcolo sono i medesimi già altre volte descritti, e ampiamente esposti nella recente mia Memoria della Pontificia Accademia delle Scienze sulla longitudine del Campidoglio.

2. *Ascensioni rette e diametro orizzontale di Giove.* — Il Pianeta è stato osservato subito dopo l'opposizione. Le stelle di confronto, per la determinazione delle ascensioni, sono state scelte tra le fondamentali del *Nautical Almanac*, avendo cura che avessero coordinate prossime a quelle di Giove e precisamente in modo che il Pianeta riuscisse, per quanto possibile, simmetricamente disposto in mezzo alle quattro *orarie* generalmente adoperate; oltre queste sono state osservate una o due circumpolari per sera per la determinazione dell'azimut strumentale. Nella seguente tabella I riporto l'elenco delle stelle di confronto, dandone le posizioni medie e per ognuna anche la correzione complessiva $C_{\sec \delta}$ comprendente la correzione per l'*aberrazione diurna meridiana* e quella per la *larghezza dei contatti* e *passo morto della vite micrometrica*, computata mediante la formula:

$$C_{\sec \delta} = + 0^s.009 \sec \delta \text{ (per le culminazioni superiori).}$$

I valori delle costanti strumentali sono i seguenti:

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Roma.

(2) Nella seduta del 7 novembre 1937.

[(3) Questi « Rendiconti », vol. XXIII, 1936, I semestre.

Parte della grande livella orizzontale . . 0^s.085
 Passo della vite micrometrica 7^s.598
 Semicontatto e passo morto 0^s.0251

Il pendolo adoperato è stato il *Dent* n. 956 ad asta invar.

TABELLA I.

N.	Stella	Mg.	$\alpha_{1936.0}$	$\delta_{1936.0}$	$C_{\text{sec } \delta}$
1	δ Ophiuchi . .	3.03	16 ^h 10 ^m 59 ^s .313	— 3° 31' 51".25	+ 0 ^s .009
2	σ Scorpii . . .	3.10	17 17 .589	— 25 26 26 .58	+ 0 .009
3	η Draconis . .	2.89	23 07 .085	+ 61 39 31 .26	+ 0 .018
4	ζ Ophiuchi . .	2.70	33 37 .894	— 10 26 20 .16	+ 0 .009
5	24 Scorpii . . .	5.04	37 52 .052	— 17 37 11 .36	+ 0 .009
6	20 Ophiuchi . .	4.73	46 17 .397	— 10 40 16 .79	+ 0 .009
7	ζ Draconis . .	3.22	17 08 35 .746	+ 65 47 36 .08	+ 0 .021
8	θ Ophiuchi . .	3.37	18 04 .568	— 24 56 14 .22	+ 0 .009
9	β Draconis . .	2.99	28 59 .046	+ 52 20 53 .13	+ 0 .014

Per il calcolo della correzione dell'orologio ho impiegato la formula di Mayer:

$$\Delta t = \alpha - t_{\text{oss}} - i \cos \chi \sec \delta - a \sin \chi \sec \delta$$

essendo: α e δ l'ascensione retta e la declinazione (apparenti) della stella; t_{oss} il tempo di osservazione desunto dalle strisce cronografiche (in cui è stata conglobata la correzione $C_{\text{sec } \delta}$); χ la distanza zenitale (apparente); i il coefficiente d'inclinazione; a il coefficiente azimutale. Il coefficiente d'inclinazione è stato ottenuto applicando a ciascuna stella la correzione quale è risultata dalla corrispondente lettura della grande livella orizzontale, fatta avanti l'inizio dell'osservazione nella prima posizione del cannocchiale e dopo la fine dell'osservazione nella seconda posizione, a rovesciamento eseguito. Nella tabella II ho raccolto i risultati delle osservazioni stellari di tutte le serate e i Δt medî conclusi per ognuna di esse.

Per osservare il Pianeta *Giove* ho adoperato i medesimi procedimenti che per le predette stelle di confronto; le osservazioni sono del 1° lembo. Per mezzo poi del valore del diametro orizzontale fornito dalle osservazioni ho ricavato l'ascensione retta del centro del Pianeta, riportata nell'ultima colonna della successiva tabella III. I confronti, sia per le ascensioni che per i diametri sono stati fatti con l'Effemeride del *Nautical Almanac*.

TABELLA II.

Data	Stella	Oculare	$\alpha_{app.}$	$t_{oss.}$	$i \cos \gamma$ sec δ	$a \sin \gamma$ sec δ	Δt	Medie serali Δt
1936								
Luglio 5	1	WE	11 ^m 03 ^s .07	10 ^m 37 ^s .12	0 ^s .00	— 1 ^s .41	+ 27 ^s .36	+ 27 ^s .35
	2	EW	17 21 .91	16 56 .58	— 0 .01	— 1 .99	+ 27 .33	
	4	EW	33 41 .88	33 16 .14	0 .00	— 1 .61	+ 27 .35	
	6	WE	46 21 .44	45 55 .69	0 .00	— 1 .61	+ 27 .36	
	9	EW	29 02 .30	28 34 .34	0 .00	+ 0 .60	+ 27 .36	
Luglio 6	1	WE	11 03 .07	10 36 .40	+ 0 .02	— 1 .45	+ 28 .10	+ 28 .13
	2	EW	17 21 .91	16 55 .86	+ 0 .01	— 2 .08	+ 28 .12	
	4	WE	33 41 .88	33 15 .37	+ 0 .01	— 1 .65	+ 28 .15	
	6	EW	46 21 .44	45 54 .96	— 0 .03	— 1 .65	+ 28 .16	
Luglio 7	1	EW	11 03 .06	10 35 .48	+ 0 .02	— 1 .46	+ 29 .02	+ 29 .05
	5	EW	37 56 .24	37 29 .02	+ 0 .02	— 1 .85	+ 29 .05	
	7	WE	08 38 .84	08 07 .69	+ 0 .05	+ 2 .04	+ 29 .06	
	8	EW	18 09 .13	17 42 .07	+ 0 .05	— 2 .06	+ 29 .07	
Luglio 8	2	WE	17 21 .91	16 54 .10	— 0 .01	— 2 .51	+ 30 .33	+ 30 .29
	3	EW	23 10 .01	22 39 .01	— 0 .06	+ 1 .77	+ 30 .29	
	4	WE	33 41 .88	33 13 .66	— 0 .01	— 2 .03	+ 30 .26	
	5	EW	37 56 .24	37 28 .24	— 0 .02	— 2 .27	+ 30 .29	
	6	WE	46 21 .44	45 53 .18	— 0 .01	— 2 .03	+ 30 .30	
Luglio 9	4	EW	33 41 .88	33 12 .84	— 0 .01	— 1 .65	+ 30 .70	+ 30 .67
	5	WE	37 56 .23	42 27 .49	— 0 .01	— 1 .94	+ 30 .69	
	6	EW	46 21 .44	45 58 .41	0 .00	— 1 .65	+ 30 .68	
	7	EW	08 38 .79	08 06 .09	+ 0 .02	+ 2 .02	+ 30 .66	
	8	WE	18 09 .13	17 40 .52	0 .00	— 2 .04	+ 30 .65	
Luglio 10	3	EW	23 09 .95	22 37 .17	+ 0 .03	+ 1 .46	+ 31 .29	+ 31 .29
	4	WE	33 41 .87	33 12 .22	0 .00	— 1 .67	+ 31 .32	
	5	EW	37 56 .23	37 26 .84	0 .00	— 1 .86	+ 31 .25	
	6	WE	46 21 .43	45 51 .82	0 .00	— 1 .67	+ 31 .30	
Luglio 11	4	WE	33 41 .87	33 11 .28	+ 0 .02	— 1 .13	+ 31 .70	+ 31 .67
	5	EW	37 56 .22	37 25 .82	+ 0 .01	— 1 .25	+ 31 .64	
	6	WE	46 21 .43	45 50 .82	+ 0 .03	— 1 .13	+ 31 .71	
	7	EW	08 38 .73	08 04 .62	+ 0 .05	+ 1 .38	+ 31 .68	
	8	WE	18 09 .13	17 38 .88	0 .00	— 1 .39	+ 31 .64	
Luglio 13	5	WE	37 56 .22	37 24 .06	— 0 .04	— 1 .21	+ 33 .41	+ 33 .42
	6	EW	46 21 .43	45 49 .12	— 0 .04	— 1 .09	+ 33 .44	
	8	WE	17 09 .13	17 37 .06	+ 0 .01	— 1 .34	+ 33 .40	

TABELLA III.
Osservazioni di GIOVE

Data	Oculare	$t_{\text{oss.}}$	$i \cos \zeta$ sec δ	$a \sin \zeta$ sec δ	Δt	α 1° lembo	O - C	$d_{\text{oss.}}$	O - C	α_{centro}
Luglio 5	EW	01 ^m 23 ^s .72	— 0 ^s .02	— 1 ^s .83	+ 27 ^s .35	01 ^m 49 ^s .22	— 0 ^s .12	3 ^s .24	0 ^s .00	01 ^m 50 ^s .84
6	WE	00 57 .22	0 .00	— 1 .98	+ 28 .13	01 23 .37	— 0 .14	3 .29	+ 0 .05	01 25 .01
7	EW	00 30 .06	+ 0 .01	— 2 .00	+ 29 .05	00 58 .12	— 0 .09	3 .29	+ 0 .05	00 59 .76
8	EW	00 05 .49	— 0 .01	— 2 .42	+ 30 .29	00 33 .35	— 0 .09	3 .37	+ 0 .13	00 35 .03
9	WE	59 40 .42	+ 0 .01	— 1 .98	+ 30 .67	00 09 .12	— 0 .14	3 .37	+ 0 .15	00 10 .80
10	EW	59 16 .25	+ 0 .01	— 2 .00	+ 31 .29	59 45 .55	— 0 .08	3 .25	+ 0 .02	59 47 .17
11	EW	58 52 .16	+ 0 .01	— 1 .35	+ 31 .67	59 22 .49	— 0 .10	3 .24	+ 0 .02	59 24 .11
13	WE	58 06 .14	+ 0 .02	— 1 .30	+ 33 .42	58 38 .28	— 0 .04	3 .34	+ 0 .14	58 39 .95

3. *Ascensioni rette di Saturno, Urano, Luna e diametro orizzontale di Saturno.* — Alla stessa maniera di Giove ho osservato Saturno, Urano e la Luna. La seguente tabella IV riporta l'elenco delle stelle di confronto adoperate, scelte tutte tra le fondamentali del *Nautical Almanac*.

La tabella V, poi, raccoglie i risultati delle osservazioni stellari e i Δt medî conclusi per ogni serata. Il pendolo adoperato è stato sempre il Dent siderale n. 956, meno che il 5 novembre in cui è stato sostituito dal Kobell, pure ad asta invar. Come nelle osservazioni degli anni precedenti, ho osservato di *Saturno* sempre il 1° lembo, portando il filo mobile del micrometro autoregistratore tangente al bordo, internamente al sistema degli anelli. Di esso ho determinato anche — come per Giove — il *diametro orizzontale*, di cui mi son servito, al solito, per ricavare i valori dell'ascensione retta del centro del Pianeta, riportati nell'ultima colonna della tabella VI.

Anche *Urano* è stato osservato subito dopo l'opposizione; il persistente cattivo tempo degli ultimi mesi dell'anno mi ha però costretto ad utilizzare soltanto un numero molto esiguo di serate. Tuttavia, le osservazioni sono state fatte sempre a campo bene illuminato e fili oscuri, adoperando l'ingrandimento solito di 120. Le ascensioni sono naturalmente dell'intero disco, che nel campo appare puntiforme.

La *Luna* è stata osservata occasionalmente durante il corso dell'anno. Le ascensioni rette sono del 1° lembo.

Tutti gli O-C sono ricavati dal confronto con le rispettive Effemeridi del *Nautical Almanac*.

L'ultima tabella VI riassume tutte queste osservazioni.

TABELLA IV.

N.	Stella	Mg.	$\alpha_{1936.0}$	$\delta_{1936.0}$	$C_{\text{sec } \delta}$
1	ζ Cephei	3.62	22 ^h 08 ^m 37 ^s .798	+ 57° 53' 07".61	+ 0 ^s .016
2	θ Aquarii	4.32	13 27.448	— 8 06 09.34	+ 0.009
3	γ Aquarii	3.97	18 21.051	— 1 42 37.31	+ 0.009
4	σ Aquarii	4.89	27 15.691	— 11 00 21.72	+ 0.009
5	κ Aquarii	5.33	34 26.544	— 4 33 31.26	+ 0.009
6	η Pegasi	3.10	39 59.881	+ 29 53 09.93	+ 0.010
7	ι Cephei	3.68	47 23.764	+ 65 51 48.89	+ 0.022
8	α Piscis Aust. . .	1.29	54 07.093	— 29 57 42.55	+ 0.010
9	β Piscium	4.58	23 00 37.118	+ 3 28 30.65	+ 0.009
10	ϵ^2 Aquarii	3.80	06 02.212	— 21 31 12.22	+ 0.009
11	κ Piscium	4.94	23 39.034	+ 0 54 18.32	+ 0.009
12	ι Piscium	4.28	36 39.406	+ 5 16 45.64	+ 0.009
13	γ Cephei	3.42	36 42.016	+ 77 16 30.29	+ 0.040
14	δ Sculptoris . . .	4.64	45 35.717	— 28 29 02.96	+ 0.010
15	27 Piscium	5.07	55 23.763	— 3 54 39.70	+ 0.009
16	44 Piscium	5.99	0 22 07.214	+ 1 35 08.01	+ 0.009
17	α Cassiopeiae . .	var.	36 51.644	+ 56 11 12.38	+ 0.016
18	ζ^1 Piscium	5.57	1 10 23.053	+ 7 14 14.91	+ 0.009
19	δ Cassiopeiae . .	2.80	21 36.566	+ 59 54 12.43	+ 0.017
20	ϵ Cassiopeiae . .	3.44	49 45.988	+ 63 21 21.34	+ 0.020
21	υ Ceti	4.18	56 59.329	— 21 23 13.69	+ 0.009
22	α Arietis	2.23	2 03 33.568	+ 23 09 38.61	+ 0.010
23	ξ^1 Ceti	4.54	09 36.233	+ 8 32 51.09	+ 0.009
24	ξ^2 Ceti	4.34	24 45.137	+ 8 10 27.29	+ 0.009
25	ν Ceti	5.04	32 30.713	+ 5 18 54.12	+ 0.009
26	γ^2 Ceti	3.69	39 58.888	+ 2 58 01.85	+ 0.009
27	σ Arietis	5.46	47 57.255	+ 14 49 10.23	+ 0.009
28	γ Persei	3.08	3 00 08.750	+ 53 15 26.59	+ 0.015

TABELLA V.

Data	Stella	Oculare	$\alpha_{app.}$	$t_{oss.}$	$i \cos \gamma$ sec δ	$a \sin \gamma$ sec δ	Δt	Medie serali Δt
1936								
Ottobre 5	2	EW	13 ^m 31 ^s .87	12 ^m 03 ^s .98	— 0 ^s .04	— 14 ^s .48	+ 1 ^m 42 ^s .41	+ 1 ^m 42 ^s .41
	4	WE	27 20 .18	25 53 .03	— 0 .01	— 15 .23	+ 1 42 .39	
	5	EW	34 30 .97	33 02 .30	— 0 .03	— 13 .72	+ 1 42 .44	
	10	EW	06 06 .91	04 42 .54	+ 0 .01	— 18 .04	+ 1 42 .40	
Ottobre 14	8	WE	54 11 .89	54 44 .56	— 0 .01	— 20 .68	— 11 .98	— 11 .99
	9	EW	00 41 .50	01 05 .24	— 0 .06	— 11 .66	— 12 .02	
	10	WE	06 06 .85	06 36 .87	— 0 .01	— 18 .04	— 11 .97	
	11	WE	23 43 .51	24 07 .88	+ 0 .02	— 12 .40	— 11 .99	
Ottobre 15	8	WE	54 11 .88	54 43 .96	— 0 .02	— 20 .68	— 11 .38	— 11 .39
	9	EW	00 41 .50	01 04 .70	— 0 .02	— 11 .66	— 11 .42	
	10	WE	06 06 .85	06 36 .32	— 0 .03	— 18 .04	— 11 .40	
	11	EW	23 43 .51	24 07 .30	— 0 .02	— 12 .40	— 11 .37	
Ottobre 16	8	EW	54 11 .88	54 19 .50	+ 0 .03	+ 3 .17	— 10 .82	— 10 .82
	9	WE	00 41 .49	00 50 .52	0 .00	+ 1 .79	— 10 .82	
	10	EW	06 06 .84	06 14 .94	— 0 .01	+ 2 .76	— 10 .85	
	11	EW	23 43 .51	23 52 .46	— 0 .03	+ 1 .90	— 10 .82	
Ottobre 17	7	EW	47 28 .39	47 40 .95	+ 0 .08	— 2 .62	— 10 .02	— 10 .01
	8	WE	54 11 .87	54 18 .91	+ 0 .04	+ 2 .91	— 9 .99	
	9	EW	00 41 .48	00 49 .78	+ 0 .08	+ 1 .64	— 10 .02	
	10	WE	06 06 .83	06 14 .30	0 .00	+ 2 .54	— 10 .01	
	11	WE	23 43 .50	23 51 .76	+ 0 .01	+ 1 .75	— 10 .01	
Ottobre 19	10	EW	06 06 .81	06 13 .13	+ 0 .02	+ 2 .50	— 8 .84	— 8 .84
	11	EW	23 43 .49	23 50 .49	+ 0 .07	+ 1 .77	— 8 .84	
	12	WE	36 43 .91	36 51 .13	+ 0 .08	+ 1 .56	— 8 .86	
Ottobre 21	11	EW	23 43 .47	23 49 .26	+ 0 .01	+ 1 .72	— 7 .52	— 7 .52
	12	WE	36 43 .90	36 49 .87	+ 0 .01	+ 1 .56	— 7 .54	
	14	EW	45 40 .44	45 45 .14	+ 0 .01	+ 2 .80	— 7 .51	
	15	WE	55 28 .31	55 33 .92	+ 0 .05	+ 1 .87	— 7 .53	

Segue TABELLA V.

Data	Stella	Oculare	$\alpha_{app.}$	$l_{oss.}$	$i \cos \zeta$ sec δ	$a \sin \zeta$ sec δ	Δt	Medie serali Δt
1936								
Ottobre 23	11	WE	23 ^m 43 ^s .45	23 ^m 47 ^s .84	+ 0 ^s .04	+ 1 ^s .70	— 6 ^s .13	— 6 ^s .12
	12	EW	36 43 .88	36 48 .40	+ 0 .05	+ 1 .54	— 6 .11	
	14	WE	45 40 .39	45 43 .78	+ 0 .01	+ 2 .74	— 6 .14	
	16	WE	22 11 .83	22 16 .29	— 0 .01	+ 1 .67	— 6 .12	
	17	EW	36 57 .60	37 04 .94	— 0 .09	— 1 .13	— 6 .12	
Ottobre 25	4	WE	27 19 .98	27 22 .96	+ 0 .03	+ 1 .59	— 4 .60	— 4 .64
	5	EW	34 30 .79	34 33 .97	+ 0 .02	+ 1 .43	— 4 .63	
	7	WE	47 28 .12	47 34 .67	+ 0 .07	— 1 .97	— 4 .65	
	9	WE	00 41 .42	00 44 .87	0 .00	+ 1 .22	— 4 .67	
Ottobre 26	4	EW	27 19 .98	27 22 .40	— 0 .04	+ 1 .72	— 4 .10	— 4 .10
	5	WE	34 30 .78	34 33 .36	— 0 .01	+ 1 .52	— 4 .09	
	6	EW	40 03 .92	40 07 .62	+ 0 .01	+ 0 .38	— 4 .08	
	10	WE	06 06 .75	06 09 .07	— 0 .01	+ 1 .82	— 4 .13	
Ottobre 29	5	WE	34 30 .75	34 31 .75	— 0 .02	+ 2 .07	— 3 .05	— 3 .00
	9	WE	00 41 .38	00 42 .60	0 .00	+ 1 .76	— 2 .98	
	10	EW	06 06 .72	06 06 .98	— 0 .01	+ 2 .73	— 2 .98	
Novembre 4	10	WE	06 06 .62	06 03 .42	0 .00	+ 2 .73	+ 0 .47	+ 0 .46
	11	WE	23 43 .35	23 40 .98	+ 0 .04	+ 1 .87	+ 0 .46	
	13	WE	36 48 .76	36 53 .71	0 .00	— 7 .38	+ 0 .43	
	14	EW	45 40 .31	45 36 .98	+ 0 .02	+ 2 .84	+ 0 .47	
Novembre 5	4	WE	27 19 .85	27 50 .76	— 0 .06	+ 4 .96	— 35 .81	— 35 .81
	5	EW	34 30 .66	35 02 .02	+ 0 .01	+ 4 .43	— 35 .80	
	7	WE	47 27 .72	48 09 .55	— 0 .02	— 6 .01	— 35 .80	
	8	EW	54 11 .63	54 40 .82	+ 0 .01	+ 6 .60	— 35 .80	
	9	WE	00 41 .31	01 13 .34	+ 0 .03	+ 3 .76	— 35 .82	
Novembre 6	7	WE	47 27 .68	47 34 .07	+ 0 .08	— 8 .37	+ 1 .90	+ 1 .90
	8	EW	54 11 .61	54 00 .54	+ 0 .01	+ 9 .19	+ 1 .87	
	10	WE	06 06 .62	05 56 .60	+ 0 .01	+ 8 .11	+ 1 .92	
	11	EW	23 43 .35	23 35 .90	+ 0 .01	+ 5 .58	+ 1 .86	
	12	WE	36 43 .87	36 36 .89	+ 0 .02	+ 5 .09	+ 1 .87	

Segue TABELLA V.

Data	Stella	Oculare	$\alpha_{app.}$	$t_{oss.}$	$i \cos \gamma$ sec δ	$a \sin \gamma$ sec δ	Δt	Medie serali Δt
1936								
Novembre 11	4	WE	27 ^m 19 ^s .77	27 ^m 08 ^s .34	— 0 ^s .03	+ 6 ^s .00	+ 4 ^s .46	+ 4.41
	8	EW	54 11 .53	53 57 .93	— 0 .01	+ 9 .20	+ 4 .41	
	9	WE	00 41 .24	00 31 .54	+ 0 .01	+ 5 .23	+ 4 .46	
Novembre 18	18	EW	10 27 .83	10 25 .08	+ 0 .02	— 5 .60	+ 8 .33	+ 8.33
	19	WE	21 43 .42	21 29 .11	— 0 .07	+ 6 .05	+ 8 .33	
	22	WE	03 38 .91	03 34 .03	0 .00	— 3 .47	+ 8 .35	
	24	WE	24 50 .11	24 47 .54	+ 0 .02	— 5 .55	+ 8 .30	
Novembre 21	1	WE	08 40 .43	08 25 .41	— 0 .10	+ 5 .33	+ 9 .79	+ 9.82
	3	EW	18 24 .87	18 22 .14	— 0 .01	— 7 .10	+ 9 .84	
	4	WE	27 19 .65	27 18 .28	— 0 .03	— 8 .39	+ 9 .79	
	5	EW	34 30 .46	34 28 .09	— 0 .02	— 7 .47	+ 9 .86	
	9	WE	00 41 .16	00 37 .70	— 0 .01	— 6 .38	+ 9 .82	
Novembre 22	7	WE	47 27 .01	47 06 .26	— 0 .10	+ 10 .30	+ 10 .55	+ 10.54
	8	EW	54 11 .37	54 12 .18	+ 0 .01	— 11 .34	+ 10 .52	
	11	WE	23 43 .18	23 39 .48	+ 0 .01	— 6 .86	+ 10 .55	
	12	EW	36 43 .64	36 39 .31	+ 0 .02	— 6 .24	+ 10 .55	
Novembre 30	21	EW	57 03 .89	56 59 .46	— 0 .01	— 9 .79	+ 14 .23	+ 14.21
	23	EW	09 41 .26	09 32 .70	+ 0 .08	— 5 .71	+ 14 .19	
	24	EW	24 50 .22	24 41 .64	+ 0 .06	— 5 .81	+ 14 .23	
	25	WE	32 35 .76	32 27 .60	+ 0 .08	— 6 .12	+ 14 .20	
Dicembre 2	20	WE	49 53 .63	49 30 .04	+ 0 .04	+ 8 .36	+ 15 .19	+ 15.21
	21	EW	57 03 .88	56 58 .43	+ 0 .02	— 9 .79	+ 15 .22	
	23	WE	09 41 .25	09 31 .63	+ 0 .01	— 5 .71	+ 15 .22	
	24	WE	24 50 .22	24 40 .79	+ 0 .01	— 5 .81	+ 15 .23	
Dicembre 4	23	EW	09 41 .25	09 19 .08	+ 0 .08	+ 6 .44	+ 15 .65	+ 15.68
	25	WE	32 35 .77	32 13 .13	+ 0 .04	+ 6 .90	+ 15 .70	
	26	EW	40 03 .91	39 40 .93	+ 0 .01	+ 7 .25	+ 15 .72	
	27	WE	48 02 .61	47 41 .55	+ 0 .01	+ 5 .41	+ 15 .64	

Segue TABELLA VI.

Pianeta e Data	Oculare	$t_{\text{oss.}}$	$i \cos \gamma$ sec δ	$a \sin \gamma$ sec δ	Δt	$\alpha_1^{\text{O}} \text{ lembo}$	O - C	$d_{\text{oss.}}$	O - C	α_{centro}
1936		23 ^h				23 ^h				23 ^h
Novembre 4	EW	11 ^m 47 ^s .38	+ 0 ^s .05	+ 2 ^s .19	+ 0 ^s .46	11 ^m 50 ^s .08	— 0 ^s .13	1 ^s .34	+ 0 ^s .10	11 ^m 50 ^s .75
5	EW	12 15.74	— 0.01	+ 4.53	— 35.81	11 44.55	+ 0.01	1.37	+ 0.13	11 45.24
6	WE	11 30.88	— 0.01	+ 6.51	+ 1.90	11 39.28	+ 0.03	1.18	— 0.06	11 39.87
11	EW	11 17.30	+ 0.03	+ 6.51	+ 4.44	11 18.28	— 0.09	1.30	+ 0.06	11 18.93
21	WE	11 03.64	— 0.04	— 7.90	+ 9.82	11 05.52	— 0.09	1.30	+ 0.10	11 06.17
22	EW	11 03.98	— 0.02	— 8.01	+ 10.54	11 06.49	— 0.01	1.29	+ 0.09	11 07.14
URANO		2 ^h				2 ^h				2 ^h
Novembre 18	WE	18 33.48	+ 0.01	— 4.90	+ 8.33	18 36.92	+ 0.05	—	—	18 36.92
30	WE	16 47.76	+ 0.07	— 5.00	+ 14.21	16 57.05	+ 0.03	—	—	16 57.05
Dicembre 2	EW	16 31.68	+ 0.09	— 5.00	+ 15.21	16 41.98	+ 0.08	—	—	16 41.98
4	WE	16 05.96	+ 0.06	+ 5.63	+ 15.68	16 27.33	+ 0.06	—	—	16 27.33
LUNA										
Ottobre 25	EW	01 49.37	+ 0.01	+ 1.51	— 4.64	01 46.25	+ 0.17	—	—	—
Novembre 22	WE	33 09.04	— 0.02	— 7.90	+ 10.54	33 11.66	+ 0.19	—	—	—

Fisica. — *Sulla teoria delle particelle elementari.* Nota ⁽¹⁾ di G. WATAGHIN, presentata dal Socio G. FUBINI.

Ci proponiamo di esaminare una possibilità di superare alcune difficoltà della teoria quantica, applicando la seconda quantizzazione ai campi di tutte le particelle elementari, scrivendo le equazioni di movimento senza termini contenenti la costante m della massa, e considerando tale massa originata dall'interazione con i campi di altre particelle elementari. Questo metodo si basa sull'introduzione dei fattori relativistici che limitano l'interazione tra particelle aventi elevata energia relativa. Tali limitazioni devono essere formulate tenendo conto del sistema di riferimento in cui si fanno le misure ⁽²⁾. Data la legge dell'interazione, la massa o l'energia propria può essere calcolata col calcolo delle perturbazioni. Nei casi più semplici si ottengono per la massa espressioni del tipo:

$$(1) \quad \sum_l \frac{H'_{il}{}^* H'_{li}}{E_l - E_i}$$

ove H' è l'operatore che rappresenta l'interazione. Circa l'interpretazione della (1) si deve notare che le soluzioni delle equazioni di movimento rappresentano osservabili o stati in funzione del tempo e quindi per ogni valore del tempo $t = t_0$ si riferiscono ad una sezione dell'asse dei tempi con l'incertezza nulla. Di conseguenza l'energia di un tale stato è completamente indeterminata. Notando che le (1) presuppongono la \sum fatta rispetto ad un gran numero di stati intermedi, concludiamo che solo considerando risultati medi riferiti a intervalli di tempo grandi rispetto al reciproco della frequenza media dei processi indotti dall'interazione H' , si può dare un significato a espressioni del tipo (1) e quindi alle masse delle particelle. Ovviamente l'incertezza nel tempo deve essere grande rispetto al periodo $\frac{h}{mc^2}$ caratteristico per la massa m .

Incontriamo un importante esempio di applicazione della (1) in cui è necessario attribuire una vita media finita agli stati intermedi e quindi riferire le misure a intervalli di tempo grandi nello studio del momento magnetico

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 settembre 1937.

(2) G. WATAGHIN, «La Ricerca Scientifica», ser. II, anno VIII, vol. II, n. 1-2, giugno 1937. Usando la 2ª quantizzazione e considerando gli impulsi \vec{p} come indici degli stati si può conciliare l'introduzione di queste limitazioni anche col principio della «Ei. chinvarianz.». ».

del protone-neutrone di Wick. Un altro esempio si ha nell'interpretazione della « Zitterbewegung » da noi proposta.

Si giunge a un punto di vista nuovo considerando i processi quantici elementari (per es., quelli che figurano nella (1)) da un sistema di riferimento accelerato. Dalla teoria della relatività generale segue che le leggi di conservazione valgono soltanto per il tensore somma del pseudo-tensore gravitazionale e del pseudo-tensore della materia. Di modo che, per es., la conservazione degli impulsi appare determinata dall'intervento delle reazioni d'inerzia in un sistema non galileano. In una Nota recente ⁽¹⁾ abbiamo tentato di collegare queste reazioni d'inerzia con onde gravitazionali quantizzate, e precisamente abbiamo identificato i neutrini di Pauli-Fermi con dei corpuscoli gravitazionali che appaiono quando si assoggettano alla seconda quantizzazione le equazioni gravitazionali del primo ordine da noi recentemente proposte:

$$(2) \quad \nabla_l \gamma_i = k \cdot \tau_{li}$$

ove γ_i sono matrici del quarto ordine aventi come elementi $(\gamma_i)_{rs}$ degli operatori-funzioni di coordinate x_k . La metrica è definita dall'elemento lineare $ds = \gamma_i dx^i$, e si hanno le relazioni:

$$\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = 2 g_{ik} \cdot \mathbf{1} \quad (\text{Tetrode})$$

$$\nabla_l = \frac{\partial}{\partial x_l} - \Gamma_l$$

sono le derivate covarianti di uno spinore (Fock e Iwanenko). Le equazioni di Dirac in coordinate generali (con $m = 0$) sono:

$$(3) \quad \gamma^r \nabla_r \psi = 0.$$

Nel secondo membro delle (2) k indica la costante della gravitazione mentre τ_{li} è un tensore caratteristico della materia, formato con operatori e spinori che rappresentano gli elettroni, i fotoni e le particelle pesanti.

In questa Nota ci limitiamo a far vedere alcuni risultati che derivano dalle idee sopra esposte, riguardanti la teoria dell'elettrone in un sistema

(1) « La Ricerca Scientifica », ser. II, a. VIII, vol. II, p. 361, settembre 1937; « Phys. Rev. » (in corso di stampa).

In questa Nota è stato messo in evidenza, che nelle equazioni (3) si hanno termini d'interazione del tipo $\psi^* \gamma^r \Gamma_r \psi$; ne deduciamo l'esistenza di un accoppiamento tra processi quantici relativi agli elettroni (ψ), ai fotoni (Γ_r) e ai neutrini (γ^r). Applicando la 2^a quantizzazione si può mostrare come ad es. l'apparente non conservazione dell'impulso in un sistema accelerato risulta compensata dall'emissione dei neutrini (γ^r) che diventano responsabili del « campo metrico » $g_{\mu\nu}$.

inerziale (con γ'' costanti). I termini d'interazione tra elettroni e fotoni nelle equazioni di Dirac sono del tipo $\varepsilon \alpha_i A_i \psi$, ove α_i è una matrice di Dirac, ε è la carica dell'elettrone, A_i è una componente del quadrivettore potenziale e ψ è lo spinore soluzione delle equazioni di Dirac.

Operando con onde piane, passando alla rappresentazione nello spazio degli impulsi e assoggettando alla seconda quantizzazione tanto A_i come ψ si trova l'interazione del tipo:

$$(4) \quad H' = \frac{\varepsilon}{c} [a^*(\vec{p}'') (V + V^*) a(\vec{p}') + \dots] G$$

$$\vec{p}'' - \vec{p}' = \vec{k},$$

ove $V = \vec{\alpha} \cdot \vec{A} - A_0(\vec{k})$, $a^*(\vec{p}'') a(\vec{p}')$ sono operatori corrispondenti alla creazione e l'assorbimento di un elettrone, e G sono i fattori relativistici che limitano l'interazione.

Seguendo le idee di Dirac, ammettiamo che le equazioni di movimento per elettroni e fotoni sono del tipo lineare e omogeneo ((3) per gli elettroni o risp. $\square A_i = 0$ per i fotoni). Inoltre definiamo la carica elettrica ε come il coefficiente di proporzionalità nella (4).

Recentemente abbiamo fatto vedere che dalla (4) risulta l'interpretazione della « Zitterbewegung » e la seguente espressione dell'energia propria dell'elettrone quando questo si trova in uno stato di energia positiva:

$$(5) \quad mc^2 = \frac{1}{137} \int_0^{E_0} d(h\nu).$$

Ricordiamo che la (5) segue con un facile calcolo dalle (1) e (4), quando si tiene conto delle note regole di commutazione per le A_i e delle seguenti regole per le a_k :

$$a_k^* a_k \sim 1 \quad a_k a_k^* \sim 0$$

$$a_k^* a_k^* \sim 0 \quad a_k a_k \sim 0.$$

Ci sembra assai notevole che per uno stato di energia negativa i precedenti calcoli danno il valore zero per la massa, d'accordo colla circostanza che un elettrone nello stato di energia negativa non può emettere un fotone e quindi ha una energia propria nulla. Ciò può servire per illustrare l'idea degli stati negativi occupati nella teoria del positrone. Dalla (5) si ricava anche che il rapporto tra l'energia media E_0 dei fotoni che contribuiscono alla formazione dell'energia propria degli elettroni e l'energia mc^2 è eguale a 137.

Nel caso di equazioni (3) riferite a coordinate qualsiasi, la seconda quantizzazione deve essere applicata tanto ai campi dei neutrini γ^r , quanto alle Γ_i (Spur $\Gamma_i = A_i$).

Dalle equazioni (2) seguono le equazioni gravitazionali di Einstein⁽¹⁾. Con ciò la formulazione della teoria dei campi basata sulle idee qui discusse si riduce alle assunzioni seguenti: l'introduzione di relazioni di commutazioni relativistiche per le γ_i e Γ_i ; l'introduzione delle equazioni di movimento del tipo (2) e (3); l'introduzione dei fattori di limitazioni relativistici dipendenti dai sistemi di riferimento; la considerazione di misure riferite a intervalli di tempo grandi rispetto a $\frac{h}{mc^2}$ nelle quali la costante della massa appare originata dalle interazioni.

Fisica (Fisica matematica). — *Sopra un sistema di equazioni gravitazionali del primo ordine.* Nota I di G. WATAGHIN, presentata⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota precedente⁽³⁾ abbiamo mostrato che le equazioni gravitazionali di Einstein nel vuoto

$$(1) \quad R_{\alpha\beta} = R^{\dots\alpha}_{\dots\beta} = 0$$

possono essere derivate dal seguente sistema di equazioni del 1° ordine:

$$(2) \quad \nabla_\alpha \gamma^\mu = \frac{\partial \gamma^\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu \gamma^\sigma + \gamma^\mu \Gamma_\alpha - \Gamma_\alpha \gamma^\mu = 0$$

che sono state trovate (in una forma lievemente diversa) da Fock⁽⁴⁾. Nella presente Nota ci proponiamo di esaminare le possibilità di introdurre gli spinori ψ e i vettori-matrici γ^μ in una varietà S_4 affine e dare una interpretazione geometrica delle (2) in base alla nozione del trasporto parallelo del vettore-matrice γ^μ , e in base alla bella teoria di Fock e Iwanenko delle equazioni dell'elettrone in un campo gravitazionale.

Una trasformazione generale T di coordinate:

$$(3) \quad \bar{x}^\mu = f_\mu(x_1 \dots x_4)$$

(1) Loc. cit. (1) a p. 283.

(2) Nella seduta del 7 novembre 1937.

(3) «La Ricerca Scientifica», ser. II, a. VIII, vol. II, p. 361, settembre 1937.

(4) V. FOCK e D. IWANENKO, «ZS. f. Phys.», 54, 798, 1929; «C. R.», 188, 1470, 1929; V. FOCK, «ZS. f. Phys.», 57, 261, 1929; E. WIGNER, «ZS. f. Phys.», 53, 592, 1928; H. TETRODE, «ZS. f. Phys.», 50, 336, 1928; E. SCHRÖDINGER, «Berlin. Akad.», 1932.

subordina nell'infinitesimo la seguente T affine « controvariante' » dei differenziali:

$$(3') \quad d\bar{x}^\mu = a_\nu^\mu dx^\nu \quad \text{ove} \quad a_\nu^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}.$$

Accanto agli usuali tensori affini definibili partendo dalla legge (3') vogliamo considerare il vettore-matrice affine

$$(4) \quad \bar{\gamma}^\mu = a_\nu^\mu \gamma^\nu \quad \gamma^\nu = \begin{pmatrix} \gamma_{11}^\nu & \dots & \gamma_{41}^\nu \end{pmatrix}$$

che è formato con 4×4 vettori affini:

$$(4') \quad \bar{\gamma}_{\sigma}^\mu = a_\nu^\mu \gamma_{\sigma}^\nu.$$

Considerando due quaterne di funzioni, ordinate in forma di matrici:

$$(5) \quad \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (\psi_1^+ \psi_2^+ \psi_3^+ \psi_4^+)$$

e assumendo che gli elementi ψ_k, ψ_l^+ sono degli scalari invarianti per sostituzioni (3); si deduce dalle (5) che le quattro forme bilineari nelle ψ_k, ψ_l^+ :

$$(6) \quad J^\mu = \psi^+ \gamma^\mu \psi$$

si trasformano come le componenti di un vettore affine

$$(7) \quad \bar{\psi}^+ \bar{\gamma}^\mu \bar{\psi} = a_\nu^\mu (\psi^+ \gamma^\nu \psi)$$

e $\psi^+ \psi$ è un invariante.

Tale risultato non cambia se si assoggettano le ψ a una trasformazione con una matrice S a 4×4 linee e colonne, formata con funzioni complesse delle x_i , non singolare, mentre le ψ^+ subiscono una trasformazione controvariante

$$(8) \quad \psi' = S \psi \quad \psi^+ S^{-1} = \psi'^+$$

e nello stesso tempo si trasformano le γ^μ

$$\gamma^{\mu'} = S \gamma^\mu S^{-1}$$

giacchè:

$$J^\mu = \psi^+ S^{-1} \cdot S \gamma^\mu S^{-1} \cdot S \psi.$$

Possiamo perciò scegliere la S in modo che questa rappresenti la T affine (3').

Assumendo S unitaria si ha ancora a disposizione un numero di parametri sufficiente (32-16) per la rappresentazione isomorfa delle (3').

Chiameremo spinori affini le quaterne delle ψ che subiscono una T isomorfa alla (3').

Stabiliamo ora la legge del trasporto per gli spinori affini, assumendo in analogia con le considerazioni di Fock e Iwanenko sugli spinori lorentziani:

$$(9) \quad \delta\psi = \Gamma_\nu \psi dx^\nu, \quad \delta\psi^+ = dx^\nu \psi^+ \Gamma_\nu^+$$

ove Γ_ν è una matrice del quarto ordine. Essendo per ipotesi $\psi^+ \psi$ un invariante abbiamo $\Gamma_\nu^+ = -\Gamma_\nu$.

Il trasporto generale per i vettori sia (Levi-Civita):

$$(10) \quad \delta J^\mu = \Gamma_{\rho\sigma}^\mu J^\sigma dx^\rho.$$

Per rendere compatibili le (10) colle (7) e (9), ossia perchè il trasporto delle $(\psi^+ \gamma^\mu \psi)$ sia quello di un vettore occorre fissare opportunamente il trasporto delle γ^μ (tale compatibilità è richiesta nella teoria degli elettroni).

Infatti:

$$(11) \quad \delta J^\mu = \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \psi^+ \gamma^\sigma \psi dx^\rho = \delta\psi^+ \cdot \gamma^\mu \psi + \psi^+ \gamma^\mu \cdot \delta\psi + \psi^+ (\delta\gamma^\mu) \psi = \\ = \psi^+ [\Gamma_\rho^+ \gamma^\mu + \gamma^\mu \Gamma_\rho + \chi_{\rho\sigma}^\mu \gamma^\sigma] \psi dx^\rho$$

ove abbiamo indicato con

$$(12) \quad \delta\gamma^\mu = \chi_{\rho\sigma}^\mu \gamma^\sigma dx^\rho$$

la variazione pel trasporto delle γ^μ . Ne segue (essendo $\Gamma_\rho^+ = -\Gamma_\rho$):

$$(13) \quad \chi_{\rho\sigma}^\mu \gamma^\sigma = \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \gamma^\sigma - \gamma^\mu \Gamma_\rho + \Gamma_\rho \gamma^\mu.$$

Concludiamo che la derivata covariante del vettore-matrice è:

$$(14) \quad \nabla_\rho \gamma^\mu = \frac{\partial \gamma^\mu}{\partial x^\rho} - \chi_{\rho\sigma}^\mu \gamma^\sigma = \frac{\partial \gamma^\mu}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \gamma^\sigma + \gamma^\mu \Gamma_\rho - \Gamma_\rho \gamma^\mu.$$

Imponendo al trasporto delle γ^μ la condizione di essere integrabile, otteniamo che per tale integrabilità occorre e basta l'annullarsi delle derivate covarianti (14) ossia otteniamo le equazioni (2).

Notiamo che la condizione $\Gamma_\rho^+ = -\Gamma_\rho$, che non si trova verificata nei casi contemplati da Fock deriva dalla condizione d'invarianza della $\psi^+ \psi$.

Passiamo ora ad esaminare le conseguenze dell'introduzione di una metrica riemanniana. Assegnato un elemento lineare $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ consideriamo con Fock, Iwanenko e Tetrode le equazioni

$$(15) \quad \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \cdot I$$

[ove $\mathbf{1}$ è la matrice unità], e il seguente elemento lineare matriciale:

$$(16) \quad (ds) = \gamma_\mu dx^\mu \quad [(\gamma_\mu dx^\mu)^2 = ds^2 \cdot \mathbf{1}]$$

ove $\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu$ sono le componenti covarianti del vettore-matrice γ^μ .

È ben noto che le equazioni (15) ammettono soluzioni (vedi (18)).

Possiamo servirci (con Fock e Wigner) di un sistema di quattro congruenze ortogonali (« Vierbeine ») per avere in ogni punto un sistema di riferimento che in un intorno infinitesimo è lorentziano. Per scrivere le equazioni di Dirac in relazione al « Vierbein » locale risolviamo le equazioni

$$(17) \quad \hat{\gamma}^k \hat{\gamma}^l + \hat{\gamma}^l \hat{\gamma}^k = 2 e_k \delta_{kl} \cdot \mathbf{1}$$

con matrici $\hat{\gamma}_k$ costanti e indicando con λ_k^μ e $\lambda_{k/\nu}$ i parametri ed i momenti dei Vierbein, poniamo

$$(18) \quad \gamma^\mu = \sum_k e_k \hat{\gamma}^k \lambda_k^\mu \quad \gamma_\nu = \sum_k e_k \hat{\gamma}_k \lambda_{k/\nu}.$$

Queste assunzioni differiscono alquanto da quelle proposte da altri Autori, perchè noi introduciamo la quarta coordinata $x_4 = ct$ reale e usiamo gli indici d'inerzia e_k ($e_1 = e_2 = e_3 = 1$; $e_4 = -1$). Si verifica immediatamente che le (18) soddisfano le (15).

Per soddisfare le (17) possiamo porre $\hat{\gamma}^k = -i\beta\alpha^k$ ($k = 1, 2, 3$) $\hat{\gamma}^4 = -i\beta$ ove α^k, β sono le matrici di Dirac. Con ciò le γ^μ risultano tutte combinazioni lineari di tre matrici hermitiane $\hat{\gamma}^k$ e una antisimmetrica $\hat{\gamma}^4$.

Si verifica facilmente, ripetendo i noti calcoli di Fock colle matrici $\hat{\gamma}^k$ invece delle matrici α^k, β che il trasporto delle ψ di Fock e Iwanenko può essere scelto in modo che le matrici $\Gamma_q = -\Gamma_q^+$ risultino antisimmetriche.

Mostriamo ora che dalle (2) (15) e dalle equazioni analoghe per le γ_μ covarianti seguono le equazioni einsteiniane (1).

Infatti dalle (2) segue $(\nabla_q \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_q) \gamma^\mu = 0$; oppure:

$$(19) \quad R_{q\sigma\nu}^{\dots\alpha} \gamma^\nu = \Phi_{q\sigma} \gamma^\alpha - \gamma^\alpha \Phi_{q\sigma} \quad \left[\text{ove } \Phi_{q\sigma} = \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial x_q} - \frac{\partial \Gamma_q}{\partial x_\sigma} + \Gamma_\sigma \Gamma_q - \Gamma_q \Gamma_\sigma \right]$$

e, analogamente

$$(20) \quad R_{q\sigma\beta}^{\dots\mu} \gamma_\mu = \Phi_{q\sigma} \gamma_\beta - \gamma_\beta \Phi_{q\sigma}.$$

Moltiplicando la (19) a sinistra per γ_α e la (20) a destra per γ^β e sommando si ottiene:

$$2 R_{q\sigma\nu}^{\dots\alpha} \gamma_\alpha \gamma^\nu = \Phi_{q\sigma} \gamma_\beta \gamma^\beta - \gamma_\alpha \gamma^\alpha \Phi_{q\sigma}.$$

Moltiplicando la (19) a destra per γ_α e la (20) a sinistra per γ^β si ha:

$$2 R_{q\sigma\nu}^{\dots\alpha} \gamma^\nu \gamma_\alpha = \Phi_{q\sigma} \gamma^\alpha \gamma_\alpha - \gamma^\beta \gamma_\beta \Phi_{q\sigma}.$$

Sommando le precedenti membro a membro e ricordando che

$$\gamma_{\alpha} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma_{\alpha} = 2 \delta_{\alpha\nu} \mathbf{1}$$

si ottengono le equazioni (1). Concludiamo che il trasporto (13) può risultare integrabile soltanto nel caso delle metriche einsteiniane (1).

Per ottenere le equazioni gravitazionali generali in presenza della materia è necessario considerare trasporti (12) non integrabili delle γ^{μ} . Ci sembra che le equazioni (2) debbano essere sostituite da

$$(21) \quad \nabla_{\epsilon} \gamma^{\mu} = k \tau_{\epsilon}^{\mu}$$

ove k è la costante della gravitazione, mentre il tensore τ_{ϵ}^{μ} dipende da tensori e spinori che descrivono la materia. Infatti, applicando alle (21) le operazioni colle quali abbiamo dedotto le (1) dalle (2), si giunge alle equazioni einsteiniane contenenti il tensore della materia $k T_{\epsilon\sigma}$. In una teoria quantica della gravitazione i campi delle γ^{μ} debbono essere assoggettate alla seconda quantizzazione.

Con ciò si introduce la nozione di un corpuscolo gravitazionale che, in una Nota precedente, abbiamo identificato col neutrino di Pauli-Fermi ⁽¹⁾.

A questo problema e all'esame del modo più opportuno di utilizzare la trasformazione S degli spinori affini è dedicata la seconda parte del presente lavoro.

(1) Notiamo che si arriva ad una teoria dei raggi β introducendo nelle equazioni del protone-neutrone l'interazione cogli elettroni nel modo seguente:

$$\gamma^{\mu} (\nabla_{\mu} - G \cdot \psi^{+} \gamma_{\mu} \psi) \Psi = 0$$

ove Ψ si riferisce alla particella pesante, ψ rappresenta gli elettroni, e G è una costante universale. Applicando la 2ª quantizzazione si hanno termini d'interazione del tipo:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu\epsilon\sigma} a_{\alpha}^{*} a_{\beta} b_{\mu}^{*} b_{\nu}^{o} c_{\epsilon}^{*} c_{\sigma}^{o}$$

ove a, b, c sono operatori che rappresentano la creazione e l'assorbimento risp. del protone-neutrone, degli elettroni e dei neutrini, e l'indice o si riferisce ad uno stato « zero » (cfr. DIRAC, *The Principles...*, p. 237, 2ª ed.).

Geologia. — *Osservazione alla Nota di S. Vardabasso: « Contributo alla conoscenza del vulcanismo recente in Sardegna »*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di A. CAVINATO, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Nella Nota⁽³⁾ dal titolo indicato il prof. Vardabasso scrive: « ... in occasione del XII Congresso Geografico Italiano, tenutosi in Sardegna nel 1934, abbiamo appreso che ai cicli vulcanici oligocenico e plio-plistocenico se ne dovrebbe aggiungere uno anteriore, cioè eocenico, come con riserva è stato annunciato da M. Gortani e più decisamente affermato in un importante studio da A. Cavinato »⁽⁴⁾. E più oltre quale conclusione scrive: « Ad ogni modo ..., il “vulcanismo eocenico” di Escalaplano — unico in Sardegna — dovrebbe essere per ora considerato come assai problematico ».

Dunque secondo quanto scrive il Vardabasso io avrei *decisamente affermato* una attività vulcanica eocenica. Basta leggere la mia Memoria in ogni parte ove si tratta del vulcanismo di cui è qui questione, per leggere nei titoli, nel testo, nell'indice, negli spaccati geologici le più precise e più chiare documentazioni e conclusioni che *escludono una tale attività vulcanica*, anzichè ammetterla, ed affermano, con la più palmare evidenza, un ciclo magmatico « posteocenico » e « preelveziano » ossia oligocenico: proprio in pieno accordo, con quanto scrive nella Nota in esame il Vardabasso.

È vero sì che a p. 222 della mia Memoria, a proposito di alcune rocce vulcaniche di Escalaplano-Mulargia (quelle di cui è qui questione, che ad Escalaplano-Mulargia si trovano anche formazioni eruttive paleozoiche, quaternarie, e molto probabilmente permiane), si trova scritto « eocenico » in luogo di « posteocenico », come è scritto, affermato, concluso in ogni altra parte della Memoria, soprattutto nei capitoli particolarmente dedicati alla età del vulcanismo; ma è troppo evidente che qui si tratta di un errore di stampa.

Infatti a p. 12 sotto al titolo: « Il vulcanismo » si legge che nell'area da me studiata nella quale è incluso il territorio di Escalaplano, « Il vulcanismo è stato attivo nel Sarrabus e Gerrei nel paleozoico, NEL POSTEOCENE e nel postmiocene. *Mancano fenomeni di attività vulcanica dalla fine del paleo-*

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Cagliari.

(2) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1937.

(3) Questi « Rendiconti », vol. XXVI, p. 14, 1937.

(4) A. CAVINATO, *Studi petrografici sulla Sardegna sud-orientale*. Padova, 1935.

zoico alla fine dell'eocene, e dall'inizio della sedimentazione dell'elveziano al quaternario. In alcune parti dell'Isola l'attività vulcanica è durata dal posteocone al quaternario: in esse non è reperibile quella lacuna così chiara nell'area che ci occupa ».

A p. 14 si legge: « *b*) La (attività vulcanica), *posteoconica*. Le formazioni vulcaniche di questa epoca si trovano sia nella zona di Escalaplano che ... ». E più sotto, stessa pagina, ultime due righe: « Il magma (ad Escalaplano) trovò la sua via di ascesa traverso spaccature più o meno potenti, e l'eocene già sedimentato fu qua e là sollevato, in parte rotto ... ». A p. 238 scrivendo sulla età di queste rocce vulcaniche si legge: « Sulla età di queste formazioni ci siamo già intrattenuti nella parte geologica (cfr. cap. I, § 6); ed ivi abbiamo fatto rilevare come in alcune zone dell'Isola l'attività vulcanica abbia durato ininterrottamente dalla fine dell'eocene sino al quaternario come a M. Ferru ed a M. Arci, mentre invece in altre zone questa attività abbia avuto una pausa che va dallo inizio della sedimentazione dei primi depositi elveziani al quaternario, come nella Sardegna nord-occidentale e come nell'area da noi studiata ». A p. 262 si legge: « : chiude il vulcanismo paleozoico ... Succede una lunga pausa che va sino al posteocone: qui un risveglio ... ».

Si legga inoltre a p. 16 ultimo a capo; a p. 209 il titolo, sotto titolo e prime sei righe; a p. 279 dalla 5^a riga in poi; ecc. ecc.

E potrei continuare nelle citazioni, ma credo che bastino a dimostrare l'infondatezza dell'appunto mossomi.

In quanto poi alle finalità, al valore, ed alle pretese della mia Memoria credo opportuno ricordare quanto è scritto a p. x della prefazione, cioè che nel mio lavoro non ho punto avuto la pretesa di dar fondo alla petrografia del Sarrabus ed ai problemi di geologia più strettamente ad essa legati: tutt'altro. Molte questioni vi sono solamente enunciate; di altre è solamente affacciata od abbozzata una soluzione. *La parte geologica non ha poi altro scopo che di inquadrare la parte petrografica.*

Chimica. — *Contributo alla conoscenza del bifenile e dei suoi derivati.* — XX. Nuovo esempio di passaggio dal sistema bifenilico a quello fluorenico: sintesi del 3-metil-fluorene ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di L. MASCARELLI e B. LONGO, presentata dal Corrisp. G. BARGELLINI.

Già nella Nota XV uno di noi ⁽³⁾ — ripresa più ampiamente la trattazione delle sostituzioni in 2-2'-6-6' e delle condizioni necessarie affinché, applicando ai derivati del bifenile la reazione di Mascarelli, avvenga il passaggio al sistema fluorenico — pose in rilievo il fatto che il 2-2'-di-metil-6-6'-tetrizo-bifenile [a differenza del 2-metil-2'-amino ⁽⁴⁾, del 2-4'-di-metil-2'-amino ⁽⁵⁾ e del 2-6'-di-metil-2'-amino-bifenile ⁽⁶⁾] non dà origine a derivato fluorenico quando lo si bolle con acqua; e questo contegno venne attribuito alla contemporanea presenza di quattro sostituenti nelle posizioni *orto*, per cui veniva a crearsi un impedimento alla complanarità dei due nuclei benzenici contenuti nella molecola bifenilica.

Nella presente Nota esponiamo i particolari delle dette esperienze condotte sul 2-2'-di-metil-6-6'-tetrizo-bifenile e siamo inoltre in grado, avendo proseguito le ricerche nella direzione prefissaci, di esporre i risultati positivi conseguiti con il 2-5-di-metil-2'-amino-bifenile, derivato avente le posizioni 6-6' non sostituite e contenente rispettivamente in 2-2' il gruppo aminico e quello metilico. Siamo così riusciti ad avere per sintesi il 3-metil-fluorene, sostanza preparata per la prima volta da D. Vorländer e A. Pritzsche ⁽⁷⁾ per eliminazione di anidride carbonica dal 3-metil-9-carbossi-fluorene, i quali hanno trovato il p. f. 88°; poi riottenuta da A. Sieglitz e J. Schatzkes ⁽⁸⁾ per riduzione del corrispondente fluorenone e che O. Kruber ⁽⁹⁾

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1937.

(3) L. MASCARELLI, «Gazz. Chim. Italiana», 66, 843, 1936.

(4) L. MASCARELLI, *Stato attuale degli studi nella serie del bifenile*, «L'Industria Chim.», Torino, 910, 1932.

(5) L. MASCARELLI e B. LONGO: Nota XVI, «Atti R. Accad. Sc. di Torino», 72, I, 109, 1936.

(6) L. MASCARELLI e A. ANGELETTI: Nota XVII, «Atti R. Accad. Sc. di Torino», 72, I, 115, 1936.

(7) «Ber.», 46, 1795, 1913.

(8) «Ber.», 54, 2071, 1921.

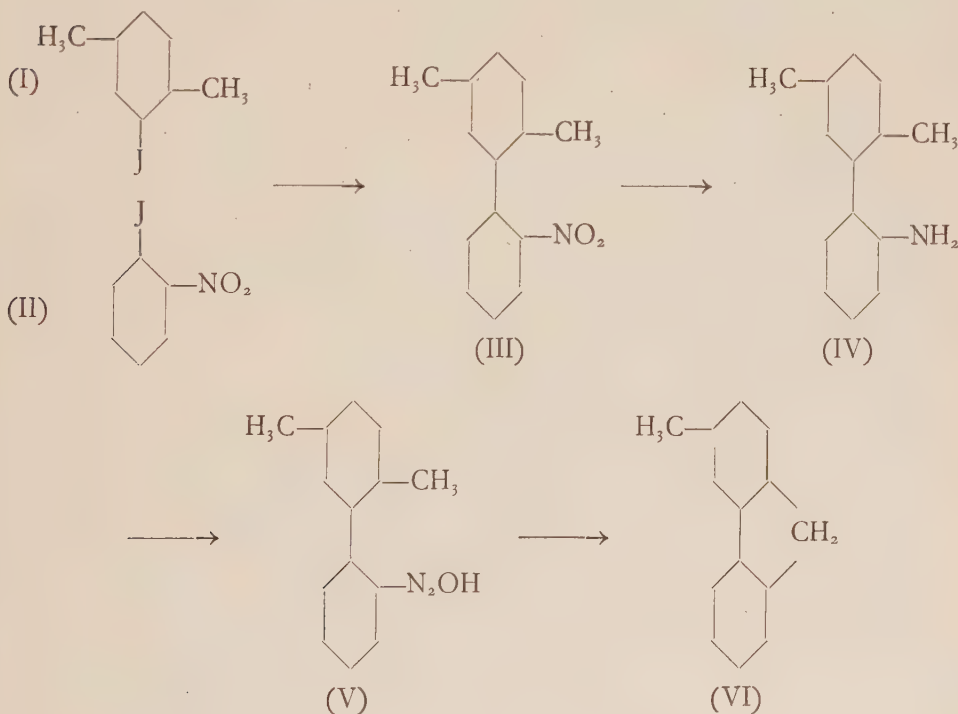
(9) «Ber.», 65, 1393, 1395, 1932.

ha recentemente avuto, in piccola quantità e non allo stato puro, dalle frazioni bollenti alto dell'olio pesante di catrame di carbon fossile.

Le difficoltà che si incontrano nel preparare i prodotti di partenza, e di cui già è stato detto nelle Note precedenti, vennero ora in parte superate col tralasciare di separare dalla miscela dei vari prodotti bifenilici, che contemporaneamente si formano nella reazione di Ullmann, il 2-5-di-metil-2'-nitro-bifenile allo stato puro e col tralasciare altresì di isolare il 2-5-di-metil-2'-amino-compuesto proveniente dalla sua riduzione. Per tal modo, eliminate le maggiori cause di dispersione della tenue quantità di prodotto asimmetrico fornito (assieme agli altri due simmetricamente sostituiti) dalla reazione di Ullmann, si riesce a giungere sino al corrispondente derivato fluorenico, anche se il necessario composto bifenilico di partenza si è formato in quantità tanto esigua da non potersi praticamente isolare.

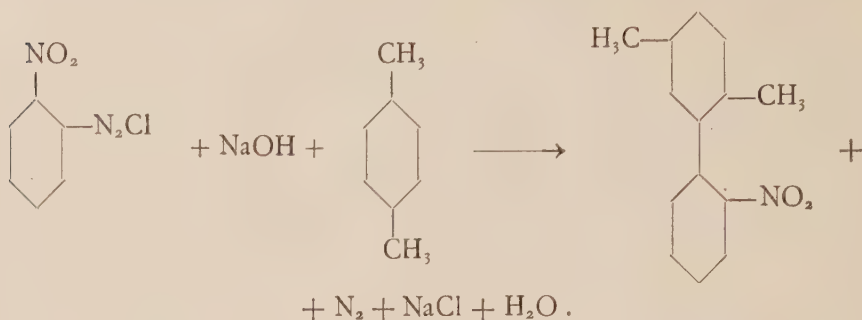
Esporremo in altro luogo i particolari del nostro modo di procedere per accumulare in una piccola frazione tutto il derivato bifenilico asimmetricamente sostituito.

Il 2-5-di-metil-2'-nitro-bifenile (III) occorrente per le trasformazioni da noi compiute ed indicate nel seguente schema:



venne preparato facendo agire il Naturkupfer C sulla miscela di 2-jodio-para-xilolo (I) e o-jodio-nitro-benzene (II) dopo che fallirono, come già

fu accennato nella Nota XVI, le ripetute prove di ottenerlo dalla condensazione del p-xilolo con il diazoderivato della o-nitro-anilina:



Il 2-jodio-p-xilolo (I) non potè essere preparato dalla para-xilidina purificata del commercio, poichè, contenendo questa ancora degli isomeri, lo jodio-xilolo non mostrò punto di ebollizione costante: abbiamo quindi scelto, per essere sicuri di ottenere il prodotto (I) puro, il procedimento di jodurazione diretta del p-xilolo adottato da Varma e Raman ⁽¹⁾. Ottenemmo così, con relativa facilità, una quantità considerevole di 2-jodio-p-xilolo bollente a temperatura costante di 228-229° ed alcuni altri prodotti secondari (ved. parte sperimentale) che sono tuttora oggetto di studio da parte nostra.

Come già poc'anzi dicemmo, non vennero isolati allo stato puro nè il 2-5-di-metil-2'-nitro-bifenile (III) nè l'amino derivato corrispondente (IV): però siamo riusciti ad avere, sebbene in piccolissima quantità, il 3-metil-fluorene (VI) allo stato puro ed a caratterizzarlo come sostanza bianca, cristallizzabile dall'alcool ordinario in aghetti fusibili a 88°-89°.

Con questo siamo al quarto esempio riconfermante il passaggio che ci interessa.

PARTE SPERIMENTALE.

Diazotazione del 2-2'-di-metil-6-6'-di-amino-bifenile e successiva scomposizione con acqua del tetrazo-derivato (Formazione del 4-5-di-metil-difenilenossido). — Il 2-2'-di-metil-6-6'-di-nitro-bifenile p. f. 110-111° ⁽²⁾ viene ridotto a 2-2'-di-metil-6-6'-di-amino-bifenile p. f. 133-134° ⁽³⁾ e questo diazotato nel solito modo. Di poi si bolle a b. m. per circa due ore, indi si distilla in corrente di vapor d'acqua: la piccolissima quantità di sostanza bianca cristallina che passa nel distillato si ricristallizza da alcool

(1) « Chem. Zentr. », 1936, I, 47.

(2) F. ULLMANN e L. FRENTZEL, « Ber. », 38, 727, 1905; J. MEISENHEIMER e M. HÖRING, « Ber. », 60, 1429, 1927.

(3) J. KENNER e W. V. STUBBINGS, « J. Chem. Soc. », 119, 600, 1921.

di 60° e si ottengono aghetti bianchi fondenti a 61–62°. (Analisi per $C_{14}H_{12}O$: trovato % C 85.48, H 6.44; calcolato 85.67, 6.17). È quindi 4-5-di-metil-difenilenossido già preparato per altra via da Y. Sugii e H. Shindo⁽¹⁾. Nessun altro prodotto potemmo isolare dalla resina nera che contemporaneamente si forma.

2-5-di-metil-2'-nitro-bifenile (III). — Nè il processo di Gomberg⁽²⁾ nè quello di Bamberger⁽³⁾ ci permisero di ottenere questo prodotto.

In una prima operazione seguimmo le indicazioni di Gomberg ed operammo con gr. 70 di o-nitro-anilina, gr. 93 di acido cloridrico concentrato, gr. 100 di acqua e gr. 40 di nitrito sodico. Nel versare la soluzione del diazoderivato in una miscela fredda di gr. 125 di p-xilolo e cc. 120 di soluzione al 40 % di idrossido di sodio si ha formazione di molta sostanza peciosa nerastra inutilizzabile.

In una seconda operazione si operò con acido solforico e nella soluzione del solfato di o-nitro-fenil-diazonio si versarono gr. 100 di p-xilolo e poi, agitando e raffreddando, si aggiunse a goccia a goccia la soluzione al 40 % di idrossido di sodio sino ad avere circa 1–2 % di alcali in eccesso. La successiva distillazione in corrente di vapor acqueo ci permise di isolare pochissimi cristalli di color aranciato p. f. 172–173° (da alcool ordinario) che per la loro scarsità non vennero individuati.

In una terza operazione gr. 14 di orto-nitro-anilina vennero, secondo le indicazioni di Bamberger⁽⁴⁾, trasformati nel sale sodico dell'o-nitro-isodiazobenzene che poi, dopo essere asciugato fra carta bibula, si aggiunse a piccole porzioni ad una miscela di p-xilolo e di acido acetico glaciale. Il prodotto di questa reazione si alcalinizzò e si distillò in vapor d'acqua (piccola quantità di olio rosso-bruno), poi si acidificò e si continuò la distillazione: come nell'operazione precedente si ebbe pochissimo prodotto fondente a 172–173° (dall'alcool ordinario). A causa della ben nota decomponibilità talvolta violenta dei sali alcalini degli isodiazobenzeni non abbiamo ritenuto cosa prudente il ripetere la prova con maggiore quantità di sostanza.

Pure ammettendo, ciò che resta ancora da dimostrare, che si possa in queste reazioni formare il biarile asimmetricamente sostituito, è certo che coi processi ora descritti non lo si potrà mai ottenere nella quantità a noi necessaria e perciò, salvo a studiare meglio in altra occasione i prodotti che così si formano, abbiamo nuovamente ripreso il metodo alla polvere di rame. Per questo occorre o-jodio-nitro-benzene e 2-jodio-p-xilolo. Il primo venne preparato⁽⁵⁾ dall'o-nitro-anilina (A. C. N. A.); il secondo invece

(1) «Chem. Zentr.», 1935, I, 698.

(2) «J. Am. Chem. Soc.», 46, 2339, 1924; 48, 1372, 1926.

(3) «Ber.», 28, 403, 1895.

(4) «Ber.», 28, 236, 1895.

(5) M. BUSCH e W. WOLBRING, «J. prakt. Chem.» (2), 71, 374, 1905.

(per le ragioni già esposte in precedenza) per diretta iodurazione del p-xilolo puro.

2-jodio-p-xilolo. — La iodurazione diretta del p-xilolo secondo il metodo di Varma e Raman (loc. cit.) consiste nel far agire l'acido nitrosil-solforico (in soluzione nitrica)⁽¹⁾ su una miscela di p-xilolo, jodio e acido acetico glaciale. Variando lievemente le particolarità del processo, come descriveremo in altro luogo, siamo riusciti ad avere da gr. 60 di p-xilolo un rendimento del 60-70 % del teorico in 2-jodio-p-xilolo bollente a 228-230°. Contemporaneamente avemmo 2-5-di-jodio-p-xilolo p. f. 104-105° già riscontrato da Varma e Raman (loc. cit.) ed un altro prodotto fondente più basso.

Formazione del 2-5-dimetil-2'-nitro-bifenile (III) (reazione di Ullmann). — In un tubo di vetro Pirex munito di agitatore meccanico a palette e di refrigerante a ricadere si introducono gr. 43 di o-jodio-nitro-benzene e gr. 40 di 2-jodio-p-xilolo; si riscalda in bagno di lega a 230-240° e si aggiungono a piccole porzioni gr. 100 di rame in polvere (Naturkupfer C), poi si porta il bagno a 250-260° continuando ancora l'agitazione per mezz'ora. Si estrae il prodotto della reazione con etere in apparecchio Soxhlet; per eliminazione del solvente si ottiene un estratto nero semifluido (gr. 32) che viene sottoposto a distillazione in corrente di vapor d'acqua: passa un prodotto oleoso giallo (gr. 14). Si estrae poi con etere la parte che non distilla, si elimina l'etere e si ottiene un estratto oleoso nero (gr. 15) che viene sciolto a caldo in alcool di 95°. Per raffreddamento si separano dapprima sostanze resinose nere frammiste a 2-2'-dinitro-bifenile e per graduale concentrazione delle acque madri si separa, insieme con altro di-nitro un prodotto oleoso rossastro. Mediante lavaggi con etere di petrolio (p. eb. 40-70°) si asporta la parte oleosa. Eliminato l'etere di petrolio rimangono gr. 4 circa di olio nerastro che, dopo il trattamento fatto, deve contenere il 2-5-di-metil-2'-nitro-bifenile eventualmente formatosi. Essendo riusciti vani i tentativi di ulteriore purificazione si trattò questo prodotto impuro con cloruro stannoso e acido cloridrico concentrato.

Formazione del 2-5-dimetil-2'-amino-bifenile (cloridrato) (IV). — L'olio nerastro (gr. 4 circa) ottenuto precedentemente viene sciolto in cc. 25 di acido acetico glaciale, poi si aggiungono gr. 35 di cloruro stannoso biidrato e vi si fanno gocciolare gr. 35 di acido cloridrico concentrato mantenendo la temperatura a 35-40°. Tosto si separa grande quantità di sostanza nera pecciosa ed il liquido assume colorazione brunastra. Si completa la reazione scaldando su bagno maria; si alcalinizza con idrossido di sodio, si estrae

(1) VARMA e KULKARNI, «Chem. Zentr.», 1927, I, 1432.

con etere e la soluzione eterea, previo lavaggio con acqua, si dibatte con acido cloridrico al 10 %. Si concentra la soluzione cloridrica a piccolissimo volume (3-4 cc.) e si ottiene una piccola quantità di aghetti grigiastri che vengono sottoposti al processo di diazotazione.

3-metil-fluorene (VI). — Il cloridrato precedente viene diazotato nel solito modo aggiungendo soluzione acquosa di nitrito sodico finchè la cartina amido-jodurata indica la fine della reazione; poi si scalda su bagno-maria. Verso i 50-60° si nota rapido sviluppo di gas e formazione di olio denso nerastro. Si distilla in corrente di vapor d'acqua: passa con facilità una sostanza lievemente colorata in giallo (gr. 0.4 circa), solubilissima a freddo in etere di petrolio (p. eb. 40-70°) e che, ricristallizzata prima da alcool diluito e poi da alcool ordinario, si presenta in aghetti bianchi, finissimi, fondenti a 88-89°. La sostanza riscaldata blandamente con acido solforico concentrato, vi impartisce intensa colorazione rosso-viola, contegno questo caratteristico dei composti fluorenici: il 2-metil-fluorene dà colorazione azzurro-verde; il 4-metil-fluorene colorazione verde. (Microanalisi, per $C_{14}H_{12}$: trovato % C 93.25, 93.21; H 6.74, 6.70; calcolato 93.33, 6.67: valori che concordano con quelli richiesti dal 3-metil-fluorene).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente annuncia la morte avvenuta durante le ferie dei Soci MARCONI GUGLIELMO, MAGGI GIAN ANTONIO, LUSTIG ALESSANDRO e dei Soci Stranieri HEIM ALBERTO e HERTWIG RICCARDO. Commemora brevemente la figura di Guglielmo Marconi come Socio dei Lincei e assicura i presenti che la Presidenza curerà che del grande Scomparso sia tenuta in una delle prossime sedute dell'Accademia una degna commemorazione. Ricorda brevemente la figura di studioso di Gian Antonio Maggi e alla Sua memoria invia il saluto deferente dell'Accademia. Comunica quindi ai Colleghi una lettera del Socio Lustig, scritta nel 1929, nella quale Egli esprime il desiderio di non essere commemorato e dichiara che l'Accademia non può fare altro che inchinarsi al desiderio del defunto Socio.

Il Presidente procede quindi alla proclamazione dei nuovi Soci eletti durante le ferie, consegnando ai presenti prof. SCORZA, prof. RASETTI, prof. CARANO la tessera in bronzo di Socio Nazionale con i relativi decreti di nomina; e ai Soci Corrispondenti presenti BRUNELLI e SERGI i decreti di nomina. Al Socio Corrispondente MINEO CORRADINO, che non è presente, il decreto sarà inviato a domicilio insieme al diploma.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario aggiunto prof. AMALDI presenta i libri inviati in omaggio all'Accademia segnalando il volume di « Studi Vinciani » del Socio MARCOLONGO ripubblicati recentemente per il suo collocamento a riposo; il « Trattato di Chimica generale ed inorganica » del Socio GIUSEPPE BRUNI; gli « Scritti geometrici scelti » del prof. EDGARDO CIANI; la « Théorie des groupes finis et continus » del Socio Straniero ELIE CARTAN; i sei grossi volumi che illustrano i risultati scientifici della spedizione polare di Nansen.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Socio LEVI-CIVITA presenta due Note dei proff. LAMPARIELLO e WATAGHIN per l'inserzione nei « Rendiconti ».

RELAZIONI DI COMMISSIONI

L'Accademico Segretario aggiunto, legge a nome dei Soci GIACOMINI e Russo, assenti, la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria del dott. MARIO BENAZZI dal titolo: « Ricerche sulla riproduzione delle Planarie Tricladi Paludicole con particolare riguardo alla moltiplicazione sessuale ».

L'Assemblea approva.

RELAZIONI SU TEMI DATI

Relativamente ai lavori del prossimo anno accademico, il Presidente comunica ai Colleghi che, per accordi intervenuti tra la Presidenza e i diversi relatori, le relazioni dei Soci RASETTI, ENRIQUES e GINORI CONTI saranno svolte rispettivamente nelle sedute del 9 gennaio, del 6 febbraio e del 6 marzo, contrariamente a quanto era stabilito nel calendario dell'anno accademico, distribuito ai Soci. Si trattiene quindi a parlare largamente delle ragioni che hanno consigliato il rinvio della discussione sulla relazione del Socio Ginori Conti, il quale ha voluto organizzare a sue spese una missione scientifica nell'isola di Vulcano per raccogliere nuovi dati sull'attività endogena quale sorgente di energia utilizzabile.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente dà inizio alla seduta col saluto a S. M. il Re Imperatore e al Duce e comunica ai Colleghi che l'Accademia ha particolare dovere di gratitudine verso S. E. il Capo del Governo per la recente concessione di L. 50.000 occorrenti per il pareggio del bilancio 1936-37.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 7 novembre 1937.

- ALZONA CARLO e ALZONA BISACCHI JOLE. — Malacofauna italiana. Vol. I, fascicolo I. Quinto al Mare, 1937. 8°, pp. 1-89.
- ASCARI MARIO C. — Il Museo Civico di Storia Naturale « Giacomo Doria » in Genova e il suo contributo allo studio faunistico delle Colonie Italiane. Prefazione di Oscar de Beaux. Genova, 1936. 8°, pp. 1-32.
- BRUNI GIUSEPPE. — Chimica generale ed inorganica. Milano, Libreria Editrice Politecnica, 1937. 8°, pp. 1-XV, 1-594.
- BUHL M. A. — Analogies corpusculaires et ondulatoires. (Mémorial des Sciences Physiques, fasc. XXXIV). Paris, 1937. 8°, pp. I-VI, 1-62.
- CARNERA LUIGI. — Commemorazione del Socio Straniero Federico Küstner, (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali ». Vol. XXV, serie VI, pp. 65-71). Roma, 1937. 4°.
- CARNERA LUIGI. — Lo stato attuale del problema delle variazioni delle latitudini. (Estr. dagli « Atti della Società per il Progresso delle Scienze ». Vol. III). Roma, 1936. 8°, pp. 1-8.
- CARTAN ELIE. — La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile. Paris. Éditeur Gauthier-Villars, 1937. 8°, pp. I-VI, 1-269.
- CATERINA A. — Vedi FASIANI G. M.
- CHAPMAN V. J. — Note on a dune drainage system. (From « Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society ». Vol. 81, pp. 77-85). Manchester, 1937. 8°.
- CIANI EDGARDO. — Scritti geometrici scelti. Vol. I, II. Padova, Casa Editrice dott. Antonio Milani, 1937. 8°, pp. I-X, 1-495, 497-902.
- CILLIE G. G. — Vedi MENZEL D. H.
- CIOLI RINALDO. — Per la determinazione delle effettive possibilità di applicazione del « metodo Rinaldi » nella cura delle artropatie. Roma, 1937. 8°, pp. 1-11.
- CISOTTI UMBERTO. — Gian Antonio Maggi. (Estr. dai « Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere ». Vol. LXX). Milano, 1937. 8°, pp. 1-3.
- CISOTTI UMBERTO. — Sul calcolo degli effetti di zavorra (Estr. da « Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari »). Pavia, 1936. 4°, pp. 1-8.
- CISOTTI UMBERTO. — Sulle azioni dinamiche nei moti fluidi piani. (Estr. dai « Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere ». Volume LXIX, fasc. XVI-XX). Milano, 1936. 8°, pp. 1-8.
- Convegno interprovinciale per la sericoltura nei suoi aspetti tecnici. Milano, 25-29 settembre 1936. Milano, 1937. 8°, pp. 1-287.
- CRAIG WALLACE and PEAR T. H. — Observations on internal speech. (From « Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society ». Vol. 81). Manchester, 1937. 8°, pp. 1-14.
- CROCCO LUIGI. — Moderni problemi sul raffreddamento di motori d'aviazione. (Estr. da « L'aerotecnica ». Vol. XIII). Roma, 1937. 8°, pp. 1-26.
- CROCCO LUIGI. — Singolarità della corrente gassosa iperacustica nell'interno di una prora a diedro. (Estratto da « L'aerotecnica ». Vol. XVII). Roma, 1937. 8°, pp. 1-18.
- CROCCO LUIGI. — Una proprietà approssimata dalle eliche e sua applicazione al calcolo delle caratteristiche

- di un motovelivolo. (Estr. da « L'aerotecnica ». Vol. XVII). Roma, 1937. 8°, pp. 1-19.
- EDMONDSON FRANK K. — Stellar Kinematics and Mean Parallaxes. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 97, pp. 473-485). Edinburgh, 1937. 8°.
- EDWARDS D. L. — Two New Short Period Spectrum Variables. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Volume 97, pp. 99-104). Edinburgh, 1936. 8°.
- FASIANI G. M. e CATTERINA A. — Scritti di chirurgia erniaria per commemorare il cinquantenario della operazione di Bassini. Vol. I, II. Padova, 1937. 8°, pp. I-VIII, 1-630, 1-535.
- FERRARI F. — « Cemento Ferrari ». (Estr. dalla Rivista « Il cemento armato. Le industrie del cemento ». N. 5, 1937). Casale Monferrato, 1937. 8°, pp. 1-15.
- GINORI CONTI PIERO. — L'opera dell'Istituto del Boro e Silicio per il vetro d'ottica scientifico italiano. (Estr. dal « Bollettino dell'Associazione Ottica Italiana ». N. 3). Firenze, 1937. 4°, pp. 1-31.
- GRASSI G. — Nozioni pratiche di igiene zootecnica e veterinaria ad uso degli allevatori. (Estr. da « Agricoltura Libica ». Anno VI). Tripoli, 1937. 8°, pp. 1-37.
- GREENSTEIN JESSE L. — Radiation pressure in galactic nebulae. (Reprinted from the « Astrophysical Journal ». Vol. 85, pp. 241-248). s. l. 1937. 8°.
- GREENSTEIN JESSE L. — Vedi WIPPLE FRED L.
- GUERRIERI E. — Recentissimo bolide rimarchevole, osservato a Capodimonte il 3 ottobre 1934. (Estr. dalla « Rivista di fisica, matematica e scienze naturali del R. Osservatorio Astronomico di Capodimonte ». Anno IX). Napoli, 1934. 8°, pp. 1-4.
- HARTREE D. R. — Note on a set of solutions of the equation $y'' + (2/x)$
 $y' - y^2 = 0$ (From « Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society ». Vol. 81). Manchester, 1937. 8° pagine 1-9.
- HENSKE WOLFGANG. — Ueber das Bessel'sche Fadenpendel. Würzburg, 1936. 8°, pp. 1-25.
- HOFFLEIT DORRIT. — Spectroscopic absolute magnitudes of three hundred and seventy southern stars. (Reprinted from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XXIII, pp. 111-114). Cambridge, 1937. 8°.
- LONGO BIAGIO, — Relazione per l'anno 1936 sulla Stazione Sperimentale per le piante officinali annessa al R. Orto Botanico di Napoli. (Estr. dal « Bull. dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli ». Vol. XIV, pp. 15-27). s. l. s. d. 8°.
- JACKSON J. M. and TYSON H. — Energy exchange between a gas and a solid surface. (From « Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society ». Vol. 81, pp. 87-102). Manchester, 1937. 8°.
- MARCHAL PAUL. — Recherches sur la biologie et le développement des hyménoptères parasites. Les Trichogrammes. (Extr. des « Annales des Épiphyties et de Phytogénétique ». Tome II, fasc. 5°, pp. 447-550). Paris, 1936. 8°.
- MARCOLONGO ROBERTO. — Memorie sulla geometria e la meccanica di Leonardo da Vinci. Napoli, Stabilimento Industrie editor. Meridionali, 1937. 8°, pp. I-XII, 1-364.
- MENZEL D. H. and CILLIE G. G. — Hydrogen emission in the chromosphere. (Reprinted from the « Astrophysical Journal ». Vol. 85, pp. 88-106). s. l., 1937. 8°.
- MILLOTT NORMAN. — A histological study of the renal sac of the nudibranch mollusc, *Joruma tormentosa* (Cuvier). (From « Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Phi-

- losophical Society». Volume, 81, pp. 29-35). Manchester, 1937. 8°.
- Ministero dell'Agricoltura e delle Foreste. — La razza chianina e il suo miglioramento. Firenze, 1937. 8°, pp. 1-62.
- MOREAU GEORGES. — Les déformations élastiques et plastiques des réseaux cristallins. (Mémorial des Sciences Physiques, fasc. XXXV). Paris, 1937. 8°, pp. 1-62.
- MURANI ORESTE. — Sulla conduttività elettrica delle limature metalliche (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere ». Vol. LXX, fasc. III). Milano, 1937. 8°, pp. 1-8.
- NANSEN FRIDTJOF. — The Norwegian North Polar Expedition 1893-1896. Scientific Results. Vol. I-VI. London, Longmans, Green and. C. 1901-1906, 4°, pp. I-VIII, I-141, pl. I-XXXVI, I-III, I-90, I-XI, I-427, pl. I-XXXII, I-87, I-231, pl. I-XXVIII, I-350, pl. I-XXVI, I-XIV, I-656, I-XX.
- OHASHI S. und HONG. L. Y. — Beitrag zur Kulturmethode der Staphylokokken für die Gewinnung von Filtratgift. (Separate print of the « Journal of the Shanghai Science Institute », Section IV, vol. III, pp. 83-91). Shanghai, 1937. 8°.
- PARENTI GIOVANNI. — La città senza mosche. Montecatini, 1937. 8°, pagine 1-15.
- PEAKE HAROLD J. E. — Some problems of the New Stone Age. (From « Memoirs et Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society ». Vol. 81, pp. 37-75). Manchester, 1937. 8°.
- PEAR T. H. — Vedi CRAIG WALLACE.
- POLLACCI GINO. — Sull'impiego delle atmosfere artificiali nella conservazione dei prodotti ortofrutticoli. Risposta al prof. Scurti della R. Stazione Chimico-Agraria di Torino. Pavia, 1937. 4°, pp. 1-12.
- ROFFO ANGEL H. — Libro de oro dedicato al prof. dott. Angel H. Roffo en occasion de sus bodas de plata con la Cancerologia (1910-1935). Buenos Aires, 1936. 8°, pp. I-CLXXXIII, I-2088.
- RUATA G. — La lotta contro le mosche in Italia (Estr. dalla Rivista. « Annali d'Igiene ». Anno 1937, n. 4). Roma, 1937. 8°, pp. 1-13.
- RUSSO GIUSEPPE. — V Contributo alla conoscenza dei coleotteri Scolitidi. Fleotribo: *Phloeotribus scarabaeoides* (Bern) Fauv. Parte I^a. (Estr. dal « Bollettino di Entomologia Agraria di Portici ». Vol. I). Portici, 1937. 8°, pp. 1-262.
- SCAËTTA H. — La genèse climatique des sols montagnards de l'Afrique Centrale. Bruxelles, 1937. 4°, pp. 1-351, planche I-X.
- SERONO C. — Prof. Ferdinando Micheli Senatore del Regno. Commemorazione. (Estr. dalla « Rassegna di Clinica, Terapia e Scienze Affini ». Anno XXXVI, fasc. III). Torino, 1937. 8°, pp. 1-8.
- SIMON B. — Rapport sur l'activité de l'Observatoire sismologique de Budapest pendant les années 1933 a 1935. Budapest, 1936. 8°, pp. 1-5.
- TAYLOR H. F. — Notes on explosions attributed to interaction between éthylperoxide and sulphur. (From « Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society ». Vol. 81, pp. 15-18). Manchester, 1937. 8°.
- THAYER OJEDA LUIS. — Exposicion del proceso general de condensacion de la materia primordial. Valparaiso, 1937. 8°, pp. 1-20.
- THAYER OJEDA LUIS. — Exposicion succincta de la teoria de la formacion de la materia. Valparaiso, 1937. 8°, pp. 1-19.
- TOSINI ENRICO. — L'alimentazione del bovino in provincia di Tripoli in relazione alle sue esigenze ed al contenuto in sostanze proteiche dei foraggi locali. (Estr. da « Agricoltura Libica ». Anno VI). Tripoli, 1937. 8°, pp. 1-22.

- TYSON H. — Vedi JAKSON J. M.
- VOLTA LUIGI. — Giovanni Schiaparelli. Discorso tenuto in Savigliano (Cuneo), il 5 ottobre 1935. (Estr. dal volume II delle «Celebrazioni piemontesi»). Urbino, 1935. 8°, pp. 1-37.
- VOLTA LUIGI. — I movimenti del mondo Siderale. Conferenza tenuta il 13 gennaio 1936. (Estr. dal volume «Conferenze di fisica e matematica tenute presso la R. Università e R. Scuola di Ingegneria di Torino». Anni 1935-1936). Torino, 1936. 8°, pp. 1-20.
- WHIPPLE FRED L. and FREESTAIN JESSE L. — On the origin of interstellar radio disturbances. (Reprinted from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XXIII, pp. 177-181). Cambridge, 1937. 8°.
- ZAUNICK RUDOLPH. — Das Erfurter Fischbüchlein vom Jahre 1498. (Sonderabdruck aus «Mitteilungen zur Geschichte der Medizin, der Naturwissenschaften und der Technik». Bd. 32). Leipzig, 1933. 8°, fol.
- ZAUNICK RUDOLPH. — Das Jahrhundert der Reformation und der naturwissenschaftliche Unterricht. (Sonderdruck aus «Mitteilungen zur Geschichte der Medizin, der Naturwissenschaften und der Technik». Band. 34). Leipzig, 1935. 8°, fol.
- ZAUNICK RUDOLPH. — Dr. Johannes Franke, ein Lausitzer Prähistoriker des XVI Jahrhunderts. (Sonderabdruck aus «Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden». Jahrg. 1929, pp. 90-95). Dresden, 1930. 8°.
- ZAUNICK RUDOLPH. — Dresden Beitrag zur deutschen Naturforschung, Medizin und Technik. (Sonderabdruck aus «Medizinische Welt»). Dresden, 1936. 8°, pp. 1-14.
- ZAUNICK RUDOLPH. — Dresden und die Pflegeder Geologie (Sonderdruck aus der «Zeitschrift der deutschen Geologischen Gesellschaft». Band. 86, pp. 592-601). Dresden, 1934. 8°.
- ZUNICK RUDOLPH. — Un der ehemaligen Gesellschaft für Mineralogie zu Dresden. (Sonderabdruck aus «Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden». 1928, pp. 77-91). Dresden, 1928. 8°.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 21 novembre 1937 - Anno XVI

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Sorgenti in mezzi disgregati.* Nota⁽¹⁾ del
Corrisp. U. CISOTTI.

La presente Nota ha lo scopo di mettere in rilievo la soluzione generale delle equazioni indefinite di un mezzo disgregato, nell'ipotesi della esistenza di una sorgente isolata. A caratterizzare il problema intervengono: un vettore — la velocità — e uno scalare — la densità di distribuzione delle masse.

Si trova che ciascuna particella materiale percorre un raggio rettilineo spiccato dalla posizione della sorgente, con una velocità costante, in generale diversa da particella a particella; se il mezzo è inizialmente in quiete vi permane; se inizialmente tutte le particelle hanno comune il valore della velocità, questo valore continueranno ad avere comune anche dopo, sempre, e il moto è irrotazionale.

La densità di ogni particella risulta definita quando è assegnato il suo valore iniziale. Nel caso di una distribuzione iniziale delle masse simmetrica rispetto alla sorgente si constata la permanenza di tale simmetria anche durante il moto (*sorgente isotropa*), ma la densità va degradando colla distanza dalla sorgente in ragione inversa del quadrato.

I. SORGENTI VARIABILI. — Consideriamo un mezzo continuo, libero da forze e disgregato, cioè libero anche da azioni molecolari. In queste circostanze, indicando $\mathbf{v}(P, t)$ la velocità che compete all'istante t alla particella

(1) Presentata nella seduta del 21 novembre 1937.

materiale che occupa la posizione P , e $\mu(P, t)$ la densità della particella stessa, si hanno le seguenti equazioni indefinite:

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0,$$

che esprime essere nulla l'accelerazione di ogni particella, e

$$(2) \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \mathbf{v}) = 0,$$

che è l'equazione di continuità.

Dalla (1) scende che ogni particella ha velocità costante e quindi la sua traiettoria è una retta che viene percorsa di moto uniforme: le linee di corrente sono dunque rettilinee e ciascuna particella percorre la retta, sulla quale si trova inizialmente la sua velocità, con velocità costante.

Introduciamo l'ipotesi che le linee di corrente abbiano comune un punto O — *sorgente* —: si tratta dei raggi rettilinei spiccati dal punto O , perciò si può scrivere:

$$(3) \quad \mathbf{v} = v \mathbf{n},$$

designando \mathbf{n} il versore di un generico raggio e v la componente radiale della velocità, che, per la (1), deve soddisfare all'equazione:

$$\frac{dv}{dt} = 0.$$

Considerando la v dipendente dall'istante t e dal posto P , nel senso euleriano, si ha

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial \rho},$$

avendo posto $\rho = |P - O|$; si deve dunque avere:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial \rho} = 0.$$

Questa relazione è caratteristica perchè \mathbf{v} , definita da (3), soddisfi alla (1); essa involge una dipendenza di v da t e da ρ , lasciando impregiudicata una eventuale dipendenza dal raggio \mathbf{n} . Come è facile constatare si soddisfa alla equazione precedente scrivendo:

$$(4) \quad v(t, \rho | \mathbf{n}) = F(\rho - vt | \mathbf{n}),$$

dove F è simbolo di funzione arbitraria dell'argomento $\rho - vt$, e naturalmente anche di \mathbf{n} . La F si può determinare una volta assegnata la distri-

buzione iniziale $v_0(\rho_0 | \mathbf{n})$ dei valori della velocità; basta porre nella (4):
 $= 0, \rho = \rho_0$ e $v = v_0$; si ottiene:

$$v_0(\rho_0 | \mathbf{n}) = F(\rho_0 | \mathbf{n}),$$

ne segue che

$$F(\rho - vt | \mathbf{n}) = v_0(\rho - vt | \mathbf{n}),$$

per cui la (4) diviene

$$(5) \quad v(t, \rho | \mathbf{n}) = v_0(\rho - vt | \mathbf{n}),$$

che, unitamente alla (3), definisce in forma implicita la distribuzione delle velocità in qualunque istante successivo all'istante iniziale, quando sia assegnato v_0 .

Si rilevi che, se inizialmente sono nulle le velocità delle particelle materiali, avendosi $v_0 = 0$, dalla (5) risulta $v = 0$ in qualunque istante t , cioè il mezzo permane in quiete. Più in generale, se inizialmente v_0 ha lo stesso valore per tutte le particelle, dalla (5) risulta che $v = v_0$ in qualunque istante successivo: le particelle percorrono i raggi uscenti da O tutte con velocità del medesimo valore v_0 . In tal caso, avendosi per la (3),

$$\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } (v \mathbf{n}) = v \text{ rot } \mathbf{n} + \text{grad } v \wedge \mathbf{n},$$

ed essendo

$$\text{rot } \mathbf{n} = 0, \quad \text{grad } v = 0,$$

risulta

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0,$$

cioè il moto è irrotazionale.

Passiamo ora a considerare la equazione (2). Per la (3), si ha:

$$\text{div } (\mu \mathbf{v}) = \text{grad } (\mu v) \times \mathbf{n} + \mu v \text{ div } \mathbf{n};$$

ma è

$$\text{grad } (\mu v) \times \mathbf{n} = \frac{\partial (\mu v)}{\partial \rho}, \quad \text{div } \mathbf{n} = \frac{2}{\rho},$$

per cui, in definitiva,

$$\text{div } (\mu \mathbf{v}) = \mu v \frac{\partial}{\partial \rho} \log (\mu \rho^2 v).$$

Per questa, la (2) si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial t} \log \mu + v \frac{\partial}{\partial \rho} \log (\mu \rho^2 v) = 0.$$

Notando che

$$\frac{\partial}{\partial t} \log \mu = \frac{\partial}{\partial t} \log (\mu \rho^2),$$

la precedente si può mettere sotto la forma seguente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \log (\mu \rho^2) + v \frac{\partial}{\partial \rho} \log (\mu \rho^2) + \frac{\partial v}{\partial \rho} = 0;$$

ponendò

$$(6) \quad \mu \rho^2 = e^v,$$

questa equazione diviene:

$$(7) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\partial v}{\partial \rho} = 0.$$

Una volta determinato v , a mezzo della (5), questa equazione definirà v e quindi, per la (6), μ , assegnata che sia la distribuzione iniziale della massa.

Facciamo il calcolo nel caso, per noi particolarmente interessante, come avrò occasione di mostrare in seguito, in cui sia $v = v_0$ costante. Allora la (7) diviene:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial \rho} = 0,$$

equazione che viene soddisfatta, nel modo più generale, esprimendo che v , e quindi, per la (6), $\mu \rho^2$, è funzione arbitraria dell'argomento $\rho - v_0 t$, oltre che di n ; si ha dunque:

$$\mu(t, \rho | n) = \frac{1}{\rho^2} \Phi(\rho - v_0 t | n),$$

dove Φ è simbolo di funzione arbitraria. Si può determinarla in base alla distribuzione iniziale delle particelle materiali: se ρ_0 designa la distanza iniziale da O della particella che al tempo t ne dista ρ , ponendo nella precedente: $t = 0$ e $\rho = \rho_0$, si ha

$$\mu(0, \rho_0 | n) = \frac{1}{\rho_0^2} \Phi(\rho_0 | n) = \mu_0(\rho_0 | n),$$

ne segue che

$$\Phi(\rho - v_0 t | n) = (\rho - v_0 t)^2 \mu_0(\rho - v_0 t | n),$$

per cui

$$(8) \quad \mu(t, \rho | n) = \frac{(\rho - v_0 t)^2}{\rho^2} \mu_0(\rho - v_0 t | n).$$

Notiamo che

$$\rho = \rho_0 + v_0 t,$$

in virtù della quale, la relazione (8) si può scrivere, sotto il punto di vista lagrangiano,

$$(9) \quad \mu(t, \rho_0 | \mathbf{n}) = \frac{\rho_0^2}{(\rho_0 + v_0 t)^2} \mu_0(\rho_0 | \mathbf{n});$$

questa mette in rilievo, seguendo il moto di una generica particella, che la particella che per $t = 0$ dista di ρ_0 dalla sorgente e che scorre sul raggio \mathbf{n} ha una densità $\mu = \mu_0$ prefissata; a partire da questo istante la particella descrive il raggio con velocità di valore costante v_0 , mentre la sua densità μ diviene evanescente per $\rho \rightarrow \infty$.

La densità iniziale μ_0 e quindi, per la (9), anche μ può dipendere da \mathbf{n} ; in tal caso la sorgente può dirsi *anisotropa*. Se la densità iniziale μ_0 è indipendente da \mathbf{n} lo sarà sempre e la sorgente sarà a dirsi *isotropa*.

Valutiamo in quest'ultima ipotesi il flusso di massa uscente attraverso una superficie sferica σ , con centro nella sorgente e raggio ρ : all'istante t tale flusso è

$$q(\rho, t) = \int_{\sigma} \mu \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma,$$

ovvero, per (3) e (8),

$$(10) \quad q(\rho, t) = 4\pi v_0 (\rho - v_0 t)^2 \mu_0(\rho - v_0 t).$$

Per questa relazione la (8) si può scrivere, nel caso considerato,

$$(11) \quad \mu(\rho, t) = \frac{q(\rho, t)}{4\pi \rho^2 v_0}.$$

2. SORGENTI STAZIONARIE. — Se il moto è stazionario, è:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0;$$

dalla (4) risulta che anche

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = 0,$$

cioè v può dipendere solo da \mathbf{n} , cioè variare da raggio a raggio mantenendo valore costante su ogni raggio, e dalle (6) e (7) scende che anche $\mu \rho^2$ è indipendente da ρ , oltre che da t , per cui si può scrivere:

$$\mu(\rho | \mathbf{n}) = \frac{q}{4\pi \rho^2 v},$$

avendo indicato con $\frac{q}{4\pi v}$ una funzione, *a priori* arbitraria, di \mathbf{n} .

Se la sorgente è isotropa (μ_0 indipendente da n) ed è $v = v_0$ costante, questa relazione rientra nella (11) quando q è costante. Essa conserva, ancor in questo caso, il significato meccanico rilevato nel numero precedente, trattando il moto variabile; anzi ora q rappresenta il flusso uscente da una qualsiasi superficie chiusa τ che nel suo interno contiene la sorgente O , anche se non è sferica e di centro O : basta osservare che, divenendo ora la (2)

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{v}) = 0,$$

cioè essendo solenoidale e regolare per $\rho > 0$ il campo vettoriale $\mu \mathbf{v}$, il flusso uscente da τ è eguale a quello uscente da una qualsiasi superficie sferica di centro O e tutta interna a τ .

Astronomia. — *I problemi fondamentali della Cosmografia e la legge di Newton.* Nota II del Socio G. ARMELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sugli zeri di alcuni polinomi.* Nota⁽¹⁾ di N. OBRECHKOFF, presentata dal Socio U. AMALDI.

In questa Nota dimostro alcuni nuovi teoremi sugli zeri di speciali polinomi.

I. Siano i numeri $p_n^{(s)}$, definiti da

$$(1) \quad p_n^{(s)} = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_s^n(x) d\psi_s(x), \quad (s = 1, 2, \dots, m; n = 0, 1, 2, \dots),$$

dove le funzioni $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ sono reali e le funzioni $\psi_1(x), \dots, \psi_m(x)$, sono reali e non decrescenti. Se si pone

$$(2) \quad f(x) = (p_0^{(1)} + p_1^{(1)}x + p_2^{(1)}x^2 + \dots) \dots (p_0^{(m)} + p_1^{(m)}x + p_2^{(m)}x^2 + \dots) = \\ = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

il polinomio

$$(3) \quad P_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$$

non ha più di uno zero reale.

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1937.

Il coefficiente c_n è dato da

$$\begin{aligned}
 (4) \quad c_n &= \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_m = n} p_{\lambda_1}^{(1)} \dots p_{\lambda_m}^{(m)} = \\
 &= \frac{1}{n!} \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_m = n} \frac{n!}{\lambda_1! \dots \lambda_m!} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\lambda_1}^{\lambda_1}(x_1) \dots \varphi_{\lambda_m}^{\lambda_m}(x_m) d\psi_1(x_1) \dots d\psi_m(x_m) = \\
 &= \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^n d\psi_1(x_1) \dots d\psi_m(x_m),
 \end{aligned}$$

dove

$$\Phi = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \dots + \varphi_m(x_m).$$

Consideriamo il polinomio $Q_n(x) = x^n P_n\left(\frac{1}{x}\right)$. Si ottiene subito

$$\begin{aligned}
 Q_n(x) &= \sum_{\mu=0}^{2n} x^{2n-\mu} c_{\mu} = \sum_{\mu=0}^{2n} \frac{x^{2n-\mu}}{\mu! (2n-\mu)!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{2n-\mu} dt \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{\mu} d\psi_1 \dots d\psi_m \\
 &= \frac{1}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi + xt)^{2n} d\psi_1 \dots d\psi_m,
 \end{aligned}$$

onde risulta $Q_{2n}(x) > 0$ per x reale. Per il polinomio $Q'_{2n+1}(x)$ si ottiene la formula

$$\begin{aligned}
 Q'_{2n+1}(x) &= \sum_{\mu=0}^{2n} (2n+1-\mu) x^{2n-\mu} c_{\mu} = \sum_{\mu=0}^{2n} c_{\mu} \cdot \frac{x^{2n-\mu}}{(2n-\mu)!} \int_0^{\infty} t e^{-t} t^{2n-\mu} dt = \\
 &= \frac{1}{(2n)!} \int_0^{\infty} t e^{-t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi + xt)^{2n} d\psi_1 \dots d\psi_m,
 \end{aligned}$$

e di qui segue $Q'_{2n+1}(x) > 0$. Dunque il polinomio $Q_{2n+1}(x)$ ha solamente uno zero reale. Così il teorema è dimostrato.

II. Sotto le stesse ipotesi del teorema I il polinomio

$$\begin{aligned}
 (5) \quad P_{n,v}(x) &= c_v + c_{v+1}x + \dots + c_{v+n}x^n, \\
 & \quad (v = 0, 2, 4, \dots, n = 1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned}$$

non ha più di uno zero reale.

Considerati i polinomi

$$(6) \quad g_{n,v}(x) = x^v + \binom{n}{1} x^{v-1} + \binom{n}{2} x^{v-2} + \dots + \binom{n}{v} \quad (v \leq n),$$

diciamo che è $g_{n,v} \geq 0$ per $v \leq n$, v pari, x reale, e $g_{n,v} = 0$ solamente per $v = n$, $x = -1$. Anzitutto per $n = v$ la proposizione è evidente, perchè

$$g_{v,v}(x) = x^v + \binom{v}{1} x^{v-1} + \dots + \binom{v}{v} = (x+1)^v.$$

Supposto poi che la nostra affermazione sia vera per $n-1$, si riconosce che essa sussiste anche per n . Infatti, considerato il polinomio

$$G_{n,v}(x) = x^{n-v} g_{n,v}(x),$$

si ottiene subito

$$G'_{n,v}(x) = nx^{n-v-1} g_{n-1,v}(x).$$

Ora n sia pari. In tal caso, per $x > 0$ si ha $G'_{n,v} > 0$ e per $x < 0$ si ha $G'_{n,v} < 0$, sicchè il polinomio $G_{n,v}$ è sempre positivo e si annulla solamente per $x = 0$. Se poi n è dispari, $G_{n,v}$ cresce da $-\infty$ a $+\infty$ quando x cresce da $-\infty$ a $+\infty$. Dunque nei due casi si ha $G_{n,v} > 0$ per ogni x reale.

Ciò premesso, consideriamo il polinomio

$$Q_{n,v}(x) = x^n P_{n,v}(x) = c_v x^n + c_{v-1} x^{n-1} + \dots + c_{v+n}.$$

Si ottiene, in base alla (4),

$$\begin{aligned} Q_{n,v}(x) &= \sum_{\mu=v}^{n+v} x^{n+v-\mu} c_{\mu} = \\ &= \sum_{\mu=v}^{n+v} \frac{x^{n+v-\mu}}{(n+v-\mu)! \mu!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+v-\mu} dt \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{\mu} d\psi_1 \dots d\psi_m \\ &= \frac{x^{n+v}}{(n+v)!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+v} dt \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=v}^{n+v} \binom{n+v}{\mu} \left(\frac{\Phi}{xt}\right)^{\mu} d\psi_1 \dots d\psi_m \\ &= \frac{x^{n+v}}{(n+v)!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+v} dt \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Phi}{xt}\right)^{n+v} g_{n+v,n} \left[\left(\frac{\Phi}{xt}\right)^{-1}\right] d\psi_1 \dots d\psi_m \end{aligned}$$

onde intanto risulta che, se n e v sono pari, si ha $Q_{n,v}(x) > 0$ per ogni x reale. Se poi si passa al polinomio

$$\begin{aligned} Q'_{n,v}(x) &= \sum_{\mu=v}^{n+v-1} (n+v-\mu) x^{n+v-\mu-1} c_{\mu} = \\ &= \sum_{\mu=v}^{n+v-1} \frac{x^{n+v-\mu-1}}{(n+v-1-\mu)! \mu!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+v-\mu} dt \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{\mu} d\psi_1 \dots d\psi_m \\ &= \frac{x^{n+v-1}}{(n+v-1)!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+v} dt \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Phi}{xt}\right)^{n+v-1} g_{n+v-1,n-1} \left[\left(\frac{\Phi}{xt}\right)^{-1}\right] d\psi_1 \dots d\psi_m. \end{aligned}$$

Si riconosce che, per v pari e n dispari, si ha $Q'_{n,v}(x) > 0$; e ciò mostra che $Q_{n,v}(x)$ ha solamente uno zero reale. Così il teorema è dimostrato.

Come caso particolare, si ha il teorema seguente

III. *Sia data la funzione*

$$F(x) = (1 - \alpha_1 x)^{-v_1} (1 - \alpha_2 x)^{-v_2} \cdots (1 - \alpha_m x)^{-v_m} = 1 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots,$$

dove i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, sono reali e i numeri v_1, v_2, \dots, v_m reali e positivi. Sotto queste ipotesi il polinomio

$$P_{n,v}(x) = d_v + d_{v+1} x + \cdots + d_{v+n} x^n, \quad v = 0, 2, 4, \dots; \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

non ha più di uno zero reale.

Infatti si ha

$$(1 - \alpha_s x)^{-v_s} = \sum_0^{\infty} p_n^{(s)} x^n, \quad s = 1, 2, \dots, m$$

dove

$$p_n^{(s)} = \binom{n + v_s - 1}{n} \alpha_s^n = \frac{\Gamma(n + v_s)}{n! \Gamma(v_s)} \alpha_s^n = \frac{\alpha_s^n}{n! \Gamma(v_s)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{v_s - 1} t^n dt.$$

Dunque i numeri $p_n^{(s)}$ hanno la forma (1) e il teorema segue immediatamente dal teorema II. Come caso particolare si ottiene un teorema enunciato dal Laguerre⁽¹⁾ per la funzione $\frac{1}{p^\omega(x)}$, $\omega > 0$, dove $P(x)$ è un polinomio.

(1) E. LAGUERRE, *Oeuvres*, to. I, pp. 110-113, Paris, 1898.

Matematica. — *A proposito della « asfericità » in un punto ordinario di una superficie.* Nota di G. FACCIOITI, presentata ⁽¹⁾ dal Corresp. U. CISOTTI.

§ 1. — INTRODUZIONE. — In una recente Nota ⁽²⁾ il prof. U. Cisotti, seguendo una via in certo qual modo inversa a quella tenuta per tentare di definire con una quantità scalare la *curvatura* in un punto ordinario di una superficie ammettente ivi un piano tangente e due *curvature principali* $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$, ha introdotto il concetto di *asfericità* rappresentata da uno scalare atto a fornire « la misura del distacco della superficie, in un intorno del secondo ordine, dalla forma sferica ».

Egli sceglie, supposto $\rho_1^2 \geq \rho_2^2$, come asfericità l'espressione :

$$\sqrt{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

giustificando pienamente la definizione adottata in base alla conclusione per cui « ad ogni punto ordinario di una superficie si può coordinare una quadrica centrata rotonda osculatrice, che è un ellissoide se le curvature principali sono dello stesso segno e un iperboloide ad una falda se le dette « curvature sono di segno opposto; l'asse di rotazione è parallelo a quello « delle direzioni principali a cui corrisponde la minima curvatura: se $\rho_1^2 \geq \rho_2^2$ « l'eccentricità è, in ogni caso, definita dall'unica espressione $\sqrt{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}}$ ».

Il Cisotti dunque propone di identificare l'asfericità con l'eccentricità di quella tal quadrica osculatrice nel considerato punto ordinario della superficie.

A ribadire maggiormente le vedute del Cisotti, parmi opportuno segnalare il fatto che alla stessa espressione per l'asfericità si può arrivare attraverso altre considerazioni.

§ 2. — ALTRA DEDUZIONE DELL'ASFERICITÀ IN UN PUNTO ORDINARIO DI UNA SUPERFICIE. — Consideriamo due superficie sferiche S_1 e S_2 di raggi ρ_1 e ρ_2 ($\rho_1 \geq \rho_2$) tangenti internamente (ρ_1 e ρ_2 dello stesso segno) o ester-

(1) Nella seduta del 21 novembre 1937.

(2) Cfr. U. CISOTTI, *Asfericità di una superficie in un suo punto ordinario.* « Pontificia Academia Scientiarum-Acta », vol. I, n. 1, anno I, 1937.

namente (ρ_1 e ρ_2 di segno contrario); fissiamo una terna d'assi trirettangola avente l'origine nel punto O di contatto di S_1 e S_2 e l'asse χ coincidente con la retta dei centri e volto comunque; la coppia dei rimanenti assi x, y giace nel piano tangente τ comune alle sfere.

Immaginiamo di condurre alla quota infinitesima χ un piano π parallelo a τ : esso interseca S_1 e S_2 secondo circonferenze i cui raggi a e b , pel teorema di Euclide, sono:

$$(1) \quad a^2 = \chi(2\rho_1 - \chi) \quad , \quad b^2 = \chi(2\rho_2 - \chi).$$

Limitando le nostre considerazioni su S_1 e S_2 ad intorno del secondo ordine, chiamati rispettivamente Σ_1 e Σ_2 , pensiamo ora alla conica centrata γ avente il centro nell'intersezione $\chi\pi$ e semidiametri a, b , conica che sarà un'ellisse se $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ è positivo, mentre sarà un'iperbole se $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ è negativo.

È ovvio che tanto meno sono scostate Σ_1 e Σ_2 , cioè tanto più a è prossimo a b e quindi meno eccentrica è la conica γ , e tanto meno le superficie dipartenti da O e comprese nell'intercapedine $\Sigma_1 \Sigma_2$ si staccano dalla forma sferica e viceversa. Interessa dunque conoscere il valore dell'eccentricità di γ ; secondochè questa è un'ellisse o un'iperbole, tale eccentricità è notoriamente data nei due casi, da:

$$\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad , \quad \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

che, in virtù delle (1), si mutano in:

$$\sqrt{1 - \frac{2\rho_2 - \chi}{2\rho_1 - \chi}} \quad , \quad \sqrt{1 + \frac{2\rho_2 - \chi}{2\rho_1 - \chi}}.$$

Ma χ è quantità infinitesima mentre ρ_1 e ρ_2 sono quantità finite; pel principio della sostituzione degli infinitesimi e tenuto conto del segno di $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, in ogni caso, coi segni impliciti, si ha:

$$(2) \quad \sqrt{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}}.$$

Coll'aver considerato intorno di secondo ordine, una superficie avente per raggi principali di curvatura ρ_1 e ρ_2 , con la nota orientazione degli assi di riferimento, ha per equazione⁽¹⁾:

$$(3) \quad \chi = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_2} \right).$$

(1) Cfr., ad esempio, la citata Nota, p. 4, form. [3].

V'è dunque una sola superficie Σ tangente alle Σ_1 e Σ_2 lungo archi di circonferenze giacenti nei piani principali. Per quanto si è detto precedentemente, l'espressione (2) può essere assunta come *asfericità* di Σ nel punto O ; riemerge pertanto quella proposta dal Cisotti. In tal modo l'asfericità viene ad essere l'eccentricità di γ , non solo, ma anche l'eccentricità dell'*indicatrice della superficie nel punto O* , come risulta dall'equazione ⁽¹⁾:

$$\frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_2} = 1$$

della predetta indicatrice. Sfruttando quindi il risultato del Cisotti, si può asserire che *l'eccentricità della quadrica rotonda osculatrice in un punto ordinario di una superficie, coincide con l'eccentricità dell'indicatrice della superficie nel considerato punto.*

Abbiamo poc'anzi accennato allo *scostamento* fra Σ_1 e Σ_2 : evidentemente deve sussistere una relazione fra esso e l'eccentricità di γ . Lo *scostamento* in parola s potrebbe esser definito dal limite del rapporto fra la differenza delle quote χ_2 e χ_1 , valutate in corrispondenza di uno stesso punto di τ , e la quota maggiore χ_2 ($\rho_1 \geq \rho_2$), cioè:

$$(4) \quad s = \lim \frac{\chi_2 - \chi_1}{\chi_2},$$

quando si tende al punto in discorso.

Usando coordinate polari ($x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$) in τ , le equazioni delle S_1 e S_2 sono allora:

$$\chi_1 = \rho_1 \left(\pm 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{\rho_1^2}} \right), \quad \chi_2 = \rho_2 \left(\pm 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{\rho_2^2}} \right);$$

tenute presenti le limitazioni più volte dichiarate, in ciascuno dei secondi membri faremo corrispondere oppostamente i doppi segni ed essendo $\frac{\rho^2}{\rho_1^2} < 1$, $\frac{\rho^2}{\rho_2^2} < 1$, ai due radicali possiamo sostituire i rispettivi sviluppi in serie arrestati al secondo termine, cioè:

$$\chi_1 = \rho_1 \left[\pm 1 \mp \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\rho_1^2} \right) \right], \quad \chi_2 = \rho_2 \left[\pm 1 \mp \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\rho_2^2} \right) \right]$$

ossia:

$$(5) \quad \chi_1 = \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\rho_1}, \quad \chi_2 = \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\rho_2},$$

(1) Cfr., ad es., G. VIVANTI, *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, 2ª ed. riv. ed ampl., 1919. S. Lattes e C. Editori, Torino, Genova, p. 514; ivi A e C sono i nostri

$\frac{1}{\rho_1}$ e $\frac{1}{\rho_2}$.

avendo incorporato i segni in ρ_1 e ρ_2 . Se ora sostituiamo le precedenti (4), troviamo:

$$s = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

per cui tra l'asfericità α in un punto ordinario di una superficie avente ivi per raggi principali di curvatura ρ_1 e ρ_2 e lo scostamento s delle sfere osculatrici nelle sezioni principali, sussiste la semplice relazione:

$$\alpha^2 = s.$$

Risulta da ciò che anche lo scostamento s potrebbe assumersi come misura della asfericità della superficie nel punto considerato.

§ 3. — CONSEGUENZE DEDOTTE DA PRECEDENTI FORMULE. — Accanto alla superficie Σ di equazione (3), consideriamo la superficie Σ' tangente a τ in O e le cui direzioni principali siano quelle di Σ scambiate; essa avrà per equazione:

$$\chi' = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\rho_2} + \frac{y^2}{\rho_1} \right).$$

Sommiamo membro a membro le (5); rammentando che $\rho^2 = x^2 + y^2$, si ottiene:

$$\chi_1 + \chi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\rho_2} + \frac{y^2}{\rho_1} \right),$$

ovvero:

$$(6) \quad \chi_1 + \chi_2 = \chi + \chi' \quad (1).$$

Chiamando *superficie associata* la Σ' , si può dire che *nell'intorno di secondo ordine di una superficie, la quota di un suo punto è eguale alla somma*

(1) Se R è il raggio di curvatura di una sezione contenuta in un piano inclinato dell'angolo θ sull'asse x , la sfera di centro sull'asse χ e raggio R sarà osculatrice a Σ lungo quella sezione e avrà per equazione $\chi = \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{R}$. Parimenti può dirsi per la sezione perpendicolare alla precedente: la sfera di equazione $\chi' = \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{R'}$ sarà osculatrice a Σ' nella predetta sezione per cui se nella (6) poniamo in luogo di χ e χ' rispettivamente $\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{R}$, $\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{R'}$, colla scorta delle (5), si arriva al noto teorema:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}.$$

(Cfr. G. VIVANTI, op. cit., p. 515).

delle quote osculatrici nelle sezioni principali, diminuita della quota della superficie associata.

In (3) usiamo $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$; essa diventa allora:

$$\chi = \frac{1}{2} \rho^2 \left(\frac{1}{\rho_1} \cos^2 \vartheta + \frac{1}{\rho_2} \sin^2 \vartheta \right)^{(1)}$$

per cui, ricordando le (5), si ha:

$$\chi = \chi_1 \cos^2 \vartheta + \chi_2 \sin^2 \vartheta;$$

un'espressione analoga sussiste per χ' :

$$\chi' = \chi_1 \sin^2 \vartheta + \chi_2 \cos^2 \vartheta.$$

Queste due formule esprimono le quote χ e χ' in funzione delle χ_1 e χ_2 .

Dalla (6) si ha identicamente:

$$\frac{\tilde{\chi}_2 - \tilde{\chi}_1}{\tilde{\chi}_2} = \frac{\tilde{\chi}_2 - \chi}{\tilde{\chi}_2} + \frac{\tilde{\chi}_2 - \chi'}{\tilde{\chi}_2}$$

in cui, passando al limite, si legge che lo scostamento delle sfere Σ_1 e Σ_2 è eguale alla somma degli scostamenti della superficie e della sua associata dalla sfera Σ_2 .

(1) Richiamando la prima parte della precedente nota, a χ possiamo sostituire $\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{R}$ e quindi avere immediatamente la nota formula di Eulero:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho_1} \cos^2 \vartheta + \frac{1}{\rho_2} \sin^2 \vartheta.$$

(Cfr. G. VIVANTI, op. cit., p. 514).

Meccanica. — *Una particolare soluzione dinamica del problema cosmologico.* Nota I di FLORA FIORENTINI CAMPOLIETI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

I. INTRODUZIONE. — È noto come la soluzione dinamica ordinaria del problema cosmologico si appoggi sulla ipotesi d'una completa isotropia e quindi omogeneità dello spazio fisico, il quale ne risulta, come già nell'universo statico di Einstein, finito ma illimitato.

Tentando di liberarsi almeno in parte dal carattere che l'ipotesi di isotropia inevitabilmente conferisce alla soluzione, già da tempo il Tolman, due anni or sono il Tolotti hanno studiato una classe di universi dinamici, per i quali l'ipotesi di isotropia è sostituita da quella di simmetria sferica: si ammette cioè che tutti i punti ai quali si giunge misurando, a partire da un determinato punto (centro di simmetria), una medesima distanza sulle geodetiche uscenti dal punto stesso, godano le stesse proprietà.

Il Tolotti ha dato la forma generale che le equazioni gravitazionali di Einstein assumono per tali universi ⁽²⁾, ed ha risolto queste equazioni in un caso particolare già studiato dal Tolman ⁽³⁾, in cui si ammette che la velocità della luce sia indipendente dal posto, e che esista un sistema di coordinate sostanziali rispetto al quale valga la isotropia di propagazione della luce. In tali condizioni però si ottiene di nuovo un modello di universo completamente omogeneo ⁽⁴⁾.

È oggetto della presente Nota lo studio di un universo dinamico caratterizzato da una soluzione particolare delle equazioni relative al caso precedente di simmetria sferica. Si tratta di un universo nel quale la velocità della luce varia in generale da luogo a luogo e da istante a istante, mentre lo spazio geometrico (*non* il cronotopo) è euclideo.

Per questo universo, valendomi del procedimento che ho già seguito in una Nota recente ⁽⁵⁾ per quello del Tolman-Tolotti, calcolo lo sposta-

(1) Nella seduta del 21 novembre 1937.

(2) C. TOLOTTI, *Equazioni gravitazionali di Einstein per gli universi dinamici dotati di completa simmetria attorno ad un centro.* «Rend. Acc. Lincei», ser. 6^a, vol. XXI, 1° sem., 1935, pp. 488-492.

(3) R. TOLMAN, *Effect of inhomogeneity on cosmological models.* «Proc. Nat. Acad. Sciences», Washington, vol. 20, n. 3, pp. 169-176, marzo 1934.

(4) Cfr. C. TOLOTTI, *Caso tipico di universi dinamici dotati di completa simmetria attorno ad un centro.* «Rend. Acc. Lincei», ser. 6^a, vol. XXI, 1° sem., 1935, pp. 572-575.

(5) F. FIORENTINI CAMPOLIETI, *Spostamento delle righe spettrali in una particolare soluzione del problema cosmologico.* «Rend. R. Ist. Lomb.», vol. LXXI-1937.

mento delle righe spettrali nei raggi luminosi provenienti dalle nebulose extragalattiche (rispetto alle righe corrispondenti di uno spettro terrestre), giungendo ad un analogo risultato: lo spostamento varia *linearmente* con la distanza in prima approssimazione; in seconda approssimazione invece, nella relazione che esprime lo spostamento, a fianco del termine che dipende linearmente dalla distanza ne compare un altro proporzionale al quadrato della distanza stessa; onde la legge di dipendenza dello spostamento dalla distanza risulta parabolica, anzichè lineare.

La soluzione analitica trovata dipende da due funzioni arbitrarie del tempo, per la determinazione delle quali non si dispone, come negli ordinari problemi di meccanica, di condizioni iniziali. Ma lo studio delle quantità fisiche per l'universo in esame permette di fissare una limitazione sufficientemente restrittiva per una di tali funzioni, che si può interpretare come un parametro di difformità dell'universo; mentre per la seconda funzione arbitraria, cui si attribuisce il significato fisico di velocità della luce sulla galassia, una notevole condizione qualitativa scaturisce dallo studio delle quantità termodinamiche dell'universo, considerato al pari di un macroscopico gas. Infatti, ammettendo un principio di evoluzione dell'universo, per il quale la sua entropia totale cresce col tempo e l'universo stesso tende ad uno stato di uniformità, risulta che la velocità della luce sulla galassia deve decrescere col tempo: ciò non contrasta con le misure attualmente note per la velocità della luce⁽¹⁾.

2. EQUAZIONI GRAVITAZIONALI. — L'elemento lineare dell'universo dinamico a simmetria sferica, del tipo generale

$$ds^2 = V^2 dx^0{}^2 - H^2 dl_0^2,$$

in base alla ipotesi di euclideanità dello spazio geometrico, dalla quale segue $H = 1$, e ponendo

$$x^0 = \bar{c}t$$

(dove \bar{c} è la velocità della luce — in assenza di materia e di azioni perturbatrici — in un dato punto (p. es. sulla galassia) ed in un dato istante, onde V viene ad assumere il significato di velocità della luce in un generico punto del cronotopo), si trasforma in

$$(1) \quad ds^2 = V^2 dt^2 - dl_0^2.$$

Nella particolare soluzione che stiamo considerando dl_0 rappresenta l'elemento lineare dello spazio geometrico tridimensionale, e la velocità della luce V risulta funzione — *a priori* ignota — della coordinata spaziale ρ e della temporale t .

(1) Cfr. POLVANI-FINZI-BIANCHI, *Velocità della luce ed espansione dell'Universo*. « Rendiconti Semin. Mat. e Fis. », vol. VII, Milano, 1933.

Le equazioni gravitazionali date dal Tolotti⁽¹⁾ divengono, in tali condizioni:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \quad \left(\text{per cui } \lambda_0 = \frac{V}{c} \right) \\ \frac{V''}{V} + \lambda - \chi p + \frac{1}{2} \chi \varepsilon = 0 \\ \frac{V'}{V\rho} + \lambda - \chi p + \frac{1}{2} \chi \varepsilon = 0 \\ \frac{V''}{V} + 2 \frac{V'}{V\rho} + \lambda - \chi p - \frac{1}{2} \chi \varepsilon = 0 \end{array} \right.$$

(dove λ = costante cosmologica
 χ = » universale delle equazioni gravitazionali
 p = pressione di radiazione
 ε = densità d'energia)

e dall'integrazione del sistema risulta

$$V = \frac{c_1}{2} \rho^2 + c_0$$

con c_1 e c_0 funzioni *a priori* arbitrarie di t ⁽²⁾.

Determinando tali funzioni in modo che per $\rho = \rho_0$ sia $V = c(t)$ potremo infine scrivere, dopo aver posto $h = 1 - \frac{c_0}{c}$,

$$(3) \quad V = c \left\{ 1 - h \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) \right\}$$

con che V , unico coefficiente ignoto nella metrica del cronotopo in esame, viene a dipendere direttamente dalla variabile spaziale ρ e, per il tramite delle funzioni arbitrarie $c = c(t)$ e $h = h(t)$, dalla variabile temporale t .

Vedremo in seguito come, attraverso l'esame delle quantità termodinamiche dell'universo considerato macroscopicamente come un gas, si riescano ad ottenere per tali funzioni delle limitazioni di carattere qualitativo.

3. CARATTERISTICHE GENERALI DELL'UNIVERSO NELLA PRECEDENTE SOLUZIONE. TENSORE DI EINSTEIN. — Il variare di V da punto a punto e da istante a istante fa sì che, a differenza dello spazio geometrico tridimensionale, il

(1) Cfr. C. TOLOTTI, prima Nota citata, p. 492.

(2) Alla funzione arbitraria c_0 possiamo dare il significato di velocità della luce al centro dell'universo; infatti per $\rho = 0$ è $V = c_0$.

cronotopo risulti non euclideo. (La euclideanità del cronotopo ci porterebbe ad uno spazio assolutamente privo di ogni distribuzione materiale).

La (2) mostra inoltre come l'universo considerato ammetta in generale, al pari di quello statico di De Sitter, un orizzonte astronomico, luogo dei punti nei quali la velocità della luce si annulla.

Applicando alla soluzione considerata le formule date dal Tolotti⁽¹⁾ per le componenti del tensore di Ricci-Einstein nel caso di un ds^2 ortogonale sferico, otteniamo:

$$G_{ik} = 0 \quad \text{per } i \neq k \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

$$G_{00} = -\frac{6h}{\rho_0^2} \left\{ 1 - h \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) \right\} = -\frac{6h}{\rho_0^2} \frac{V}{c}$$

$$G_{11} = G_{22} = G_{33} = \frac{2h}{\rho_0^2 - h(\rho_0^2 - \rho^2)} = \frac{\chi \epsilon}{2}$$

$$G = -\frac{12h}{\rho_0^2 - h(\rho_0^2 - \rho^2)} = -3\chi \epsilon$$

donde appare che la curvatura del cronotopo non è costante, poichè G_{ik} non è un tensore isotropo. Inoltre, se $\epsilon > 0$, risulta $G < 0$, cioè risulta negativo l'invariante lineare del tensore di Einstein, cui taluni autori danno appunto il significato di « curvatura del cronotopo ».

4. SPOSTAMENTO DELLE RIGHE SPETTRALI. — Per calcolare lo spostamento delle righe spettrali nella luce proveniente dalle nebulae extragalattiche, ci varremo della formula di carattere generale già usata a proposito della soluzione Tolotti⁽²⁾:

$$(4) \quad \frac{\delta \nu}{\nu} = \frac{V(\rho, t(\rho)) - V(\rho_0, 0)}{V(\rho_0, 0)} - \frac{H(\rho_0, t(\rho)) - H(\rho_0, 0)}{H(\rho_0, 0)}$$

(dove ν è la frequenza di un raggio luminoso terrestre, $\nu + \delta \nu$ quella del corrispondente raggio extragalattico, onde il rapporto $\frac{\delta \nu}{\nu}$ — che tratteremo come quantità infinitesimale — misura lo spostamento relativo che ci interessa).

Nel caso in esame, essendo $H = 1$, la (4) diviene

$$(5) \quad \frac{\delta \nu}{\nu} = \frac{V(\rho, t(\rho)) - V(\rho_0, 0)}{V(\rho_0, 0)}.$$

(1) C. TOLOTTI, *Calcolo del tensore di Ricci-Einstein nel caso ortogonale*. « Rend. Acc. Lincei », ser. 6^a, vol. XXI, 1° sem., 1935, pp. 326-332.

(2) Cfr. F. FIORENTINI CAMPOLIETI, loc. cit.

Si tratta ora di ricavare l'espressione della variabile t in funzione della ρ .

L'elemento lineare (1) dell'universo che stiamo considerando, qualora si esprima il dl_0 in coordinate polari

$$dl_0^2 = d\rho^2 + \rho^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

(dove ρ = raggio vettore

φ = longitudine

ϑ = collatitudine)

assume la forma

$$ds^2 = V^2 dt^2 - \{ d\rho^2 + \rho^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \}.$$

Di qui, essendo per i raggi luminosi

$$ds = 0$$

e potendosi in base alla simmetria sferica prendere in considerazione punti situati sulla stessa geodetica uscente dal centro, per i quali, quando siano infinitamente vicini,

$$d\vartheta = 0 \quad d\varphi = 0 \quad (1),$$

si ricava

$$V dt = d\rho$$

e per la (3)

$$(6) \quad \frac{d\rho}{dt} = c(t) \left\{ 1 - h(t) \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) \right\}.$$

Se ora poniamo $\rho = \rho_0 + r$ (2), e $c(t) \cdot h(t) = a(t)$ l'equazione (6) diviene

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a(t)}{\rho_0^2} r^2 + \frac{2a(t)}{\rho_0} r + c(t)$$

e se sviluppiamo $a(t)$ e $c(t)$ in serie di potenze di r :

$$a(t(r)) = a_0 + \alpha r + \beta r^2 + \dots$$

$$c(t(r)) = \bar{c} + \gamma r + \delta r^2 + \dots$$

la (5) si può scrivere

$$\frac{\partial v}{v} = \frac{c(t(r)) - \alpha(t(r)) \left(\frac{2r}{\rho_0} + \frac{r^2}{\rho_0^2} \right) - \bar{c}}{\bar{c}}.$$

(1) Così facendo veniamo implicitamente ad ammettere che anche nella nostra soluzione valga la isotropia di propagazione della luce.

(2) La posizione offre il vantaggio di introdurre al posto della coordinata spaziale ρ per il punto generico dell'universo, la coordinata galattica ρ_0 e la distanza relativa r del punto considerato dalla galassia.

Di qui, finchè ci si accontenti di una prima approssimazione e si trascurino le potenze di r superiori alla prima, si ottiene

$$(7) \quad \frac{\delta v}{v} = \frac{1}{\bar{c}} \left(\gamma + \frac{2 a_0}{\rho_0} \right) r$$

mentre, quando si richieda una maggiore approssimazione e si voglia quindi tener conto anche dei termini quadratici in r , risulta:

$$(8) \quad \frac{\delta v}{v} = \frac{1}{\bar{c}} \left\{ \left(\gamma + \frac{2 a_0}{\rho_0} \right) r + \left(\delta + \frac{2 \alpha}{\rho_0} + \frac{a_0}{\rho_0^2} \right) r^2 \right\}.$$

5. DISCUSSIONE. — Interpretiamo i risultati precedenti e mettiamoli a confronto con l'esperienza.

Dalla (7) appare che in prima approssimazione la frequenza di un raggio luminoso extragalattico varia *linearmente* con la distanza; la (8) rivela che in seconda approssimazione la dipendenza dalla distanza diviene *parabolica*.

• Non potendosi discutere i coefficienti che compaiono in (8), intorno ai quali siamo soltanto in grado di affermare che ρ_0 (coordinata della galassia) è senz'altro positivo, mentre γ — che rappresenta il coefficiente del termine di primo grado nello sviluppo della funzione $c(t)$ — sembra non possa, in seguito alle esperienze degli ultimi decenni, che risultare positivo o nullo, ci troviamo per ora nell'impossibilità di valutare l'ordine di grandezza del termine quadratico che compare in (8), onde discriminare di quanto la legge parabolica (8) si scosti dai risultati delle attuali esperienze, le quali, come si sa, rivelano nello spettro dei raggi luminosi extragalattici uno spostamento proporzionale alla distanza, e sono quindi in accordo con la legge lineare (7).

Ricordiamo inoltre che lo spostamento sperimentale delle righe spettrali si verifica sempre verso la regione del rosso, onde il rapporto $\frac{\delta v}{v}$ deve considerarsi negativo. Ora da (7) appare che il segno del $\frac{\delta v}{v}$ dipende dal segno di r , nonchè da quello del coefficiente $\gamma + \frac{2 a_0}{\rho_0}$; precisamente, $\frac{\delta v}{v}$ potrà risultare negativo per r positivo, se sarà $\gamma + \frac{2 a_0}{\rho_0} < 0$, per r negativo in caso contrario.

Anche nel particolare universo dinamico considerato, come già in quello del Tolotti, risulta dunque la possibilità di una posizione centrale oppure eccentrica della galassia rispetto a tutte le altre nebulose spirali.

Meccanica. — *Estensione del teorema di Jacobi sul viriale e riferimenti di minima energia cinetica.* Nota di G. LAMPARIELLO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. — IL TEOREMA DEL VIRIALE.

1. Nella quarta delle sue celebri *Vorlesungen über Dynamik* Jacobi ha posto in evidenza per primo una notevole combinazione delle equazioni della Dinamica che è nota come teorema del viriale o di Clausius.

Sia P_i ($i = 1, 2, \dots, N$) un sistema qualunque di punti materiali di masse m_i e sia \mathbf{F}_i la forza totale che sollecita P_i . Si contempli il moto assoluto del sistema, cioè con riferimento ad assi galileiani $\Omega\xi\eta\zeta$, e siano

$$\mathfrak{J} = \sum_i m_i (P_i - \Omega)^2, \quad T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

rispettivamente il momento d'inerzia del sistema rispetto ad Ω e l'energia cinetica.

Se il campo di forze è conservativo (anche non stazionario), le componenti cartesiane X_i, Y_i, Z_i di \mathbf{F}_i si deducono dal potenziale U per derivazione rispetto alle coordinate ξ_i, η_i, ζ_i di P_i :

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i},$$

e, se il potenziale U è omogeneo di grado k , si ha

$$\sum_i (P_i - \Omega) \times \mathbf{F}_i = \sum_i \left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \right) = kU.$$

Dalle equazioni dinamiche, Jacobi trae l'equazione

$$\frac{1}{4} \ddot{\mathfrak{J}} = T + \frac{1}{2} kU \quad \left(\ddot{} = \frac{d^2}{dt^2} \right)$$

che si può anche scrivere nella forma

$$(1) \quad \frac{1}{4} \ddot{\mathfrak{J}} = \left(1 + \frac{k}{2} \right) U + E,$$

(1) Nella seduta del 7 novembre 1937.

tenendo conto dell'equazione delle forze vive e designando con E l'energia totale, se il campo di forze è stazionario.

Quest'importante relazione lega il potenziale della sollecitazione alla derivata seconda temporale del momento d'inerzia polare del sistema (rispetto ad Ω) e consente di dedurre utili conclusioni sull'andamento del moto nel caso di particolari leggi di forza.

Così ad es., per fissare l'attenzione su un caso concreto, supponiamo che i punti materiali si attraggano in ragione inversa del cubo della distanza. Il potenziale è omogeneo di grado $k = -2$ e la (1) si riduce a

$$\ddot{\mathfrak{J}} = 4E.$$

Dunque

$$\mathfrak{J} = 2Et^2 + at + b,$$

dove a, b sono due costanti arbitrarie.

Il momento d'inerzia \mathfrak{J} è una funzione quadratica del tempo. È questo il teorema di Jacobi che avevamo in vista.

2. Il Clausius nella sua teoria cinetica dei gas ha chiamato viriale la somma

$$V = -\frac{1}{2} \sum_i (\mathbf{P}_i - \Omega) \times \mathbf{F}_i$$

ed ha fatto notevoli applicazioni dell'equazione

$$\frac{1}{4} \ddot{\mathfrak{J}} = T - V,$$

la quale costituisce il teorema del viriale e contiene l'equazione già considerata da Jacobi nel caso di una sollecitazione conservativa con potenziale omogeneo.

In un qualunque moto periodico del sistema, e più generalmente quando la derivata prima $\dot{\mathfrak{J}}$ del momento d'inerzia sia periodica, si ha che il valor medio di V in un periodo eguaglia quello di T .

3. Fin qui abbiamo considerato il viriale rispetto ad un punto fisso Ω . Sia V_G il viriale rispetto al baricentro G del sistema. Si ha

$$(2) \quad V = V_G - \frac{1}{2} (G - \Omega) \times \mathbf{R}^{(e)},$$

cioè il viriale rispetto ad Ω è la somma del viriale rispetto al baricentro e del viriale rispetto ad Ω della risultante delle forze esterne applicata in G .

4. Poniamo ora in evidenza la validità del teorema del viriale nel moto relativo al baricentro, quando cioè si riferisca il sistema ad una terna $G\xi\eta\zeta$ di origine G ed assi di direzioni invariabili.

Questa è animata da moto traslatorio con l'accelerazione baricentrale. Se

$$\mathfrak{J}_G = \sum_i m_i (P_i - G)^2 \quad \text{e} \quad T^{(r)}$$

denotano il momento d'inerzia rispetto a G e l'energia cinetica nel moto relativo a $G\xi\eta\zeta$, si ha

$$(3) \quad \frac{1}{4} \ddot{\mathfrak{J}}_G = T^{(r)} - V_G.$$

Infatti, se m è la massa totale del sistema, si sa che

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_G + m (G - \Omega)^2,$$

dunque

$$\ddot{\mathfrak{J}} = \ddot{\mathfrak{J}}_G + 2 m v_G^2 + 2 (G - \Omega) \times m a_G$$

e, per il teorema del moto del baricentro,

$$\ddot{\mathfrak{J}} = \ddot{\mathfrak{J}}_G + 2 m v_G^2 + 2 (G - \Omega) \times \mathbf{R}^{(e)}.$$

Ma, per il teorema di König, si ha

$$T = T^{(r)} + \frac{1}{2} m v_G^2.$$

Così, tenendo conto della (2) e sostituendo nell'equazione del viriale nel moto assoluto, si trova

$$\begin{aligned} \ddot{\mathfrak{J}}_G + 2 m v_G^2 + 2 (G - \Omega) \times \mathbf{R}^{(e)} = \\ = 4 \{ T^{(r)} + \frac{1}{2} m v_G^2 - V_G + \frac{1}{2} (G - \Omega) \times \mathbf{R}^{(e)} \}, \end{aligned}$$

cioè la (3).

5. Segnaliamo ancora la forma che assume l'equazione del viriale nel moto assoluto di un fluido perfetto.

Se S è un campo dello spazio occupato da la massa fluida all'istante t e σ ne è il contorno, si trova che

$$\frac{1}{4} \ddot{\mathfrak{J}} = T - V + \frac{3}{2} \int_S p dS + \frac{1}{2} \int_{\sigma} p (P - \Omega) \times \mathbf{n} d\sigma,$$

dove \mathbf{n} è il versore normale a σ interno ad S , p è la pressione, T è l'energia cinetica e $V = -\frac{1}{2} \int_S (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times \mathbf{F} dm$ è il viriale delle forze di massa.

Se σ include tutta la massa in moto e su σ si esercita una pressione costante p_0 , l'integrale superficiale diventa $-\frac{3}{2} p_0 S$ e si ha

$$\frac{1}{4} \ddot{\mathfrak{J}} = T - V + \frac{3}{2} \left(\int_S p dS - p_0 S \right).$$

6. Osserviamo ancora che il potenziale U e il viriale V posseggono la proprietà additiva rispetto ai campi di forza, nel senso che se la forza totale \mathbf{F}_i sollecitante \mathbf{P}_i è la somma

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(0)} + \mathbf{F}_i^{(1)}$$

di due sollecitazioni $\mathbf{F}_i^{(0)}, \mathbf{F}_i^{(1)}$ di potenziali U_0, U_1 e di viriali V_0, V_1 , si ha

$$U = U_0 + U_1, \quad V = V_0 + V_1$$

e l'equazione del viriale nel moto assoluto è

$$(4) \quad \frac{1}{4} \ddot{\mathfrak{J}} = (U_0 - V_0) + (U_1 - V_1) + E.$$

§ 2. — MUTUE ATTRAZIONI IN RAGIONE INVERSA DEL CUBO DELLA DISTANZA E ATTRAZIONE (O REPULSIONE) BARICENTRALE IN RAGIONE DIRETTA DELLA DISTANZA.

7. Consideriamo ora un sistema di punti materiali attratti (o respinti) dal baricentro in ragione diretta delle masse e delle distanze (campo delle forze $\mathbf{F}_i^{(0)}$), i quali si attraggano mutuamente con forze di potenziale omogeneo di grado -2 (campo delle forze $\mathbf{F}_i^{(1)}$).

In queste condizioni, il baricentro G del sistema è animato da moto rettilineo uniforme rispetto ad assi galileiani, perchè la risultante delle mutue attrazioni è nulla (in quanto forze interne) e quella delle attrazioni (o repulsioni) baricentrali è

$$\sum \mathbf{F}_i^{(0)} = \mp f \sum_i m_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{G}) = 0.$$

Dunque G si può riguardare come fisso.

Si noti anche che in questo caso il momento baricentrale delle forze esterne è nullo.

Vogliamo mostrare che anche in questo caso l'equazione del viriale è *integrabile* ed anzi il caso di Jacobi appare come intermedio fra quelli che

si hanno quando alle mutue attrazioni si sovrapponga un'attrazione o una repulsione baricentrale.

Se questa non sussiste, il momento d'inerzia \mathfrak{J} varia nel tempo con legge quadratica; se c'è attrazione baricentrale, \mathfrak{J} varia con legge armonica, se c'è repulsione baricentrale, \mathfrak{J} varia con legge esponenziale.

Ricordiamo che già il Mestschersky ha considerato ⁽¹⁾ il campo sovrapposto delle mutue attrazioni in ragione inversa del cubo della distanza e dell'attrazione baricentrale da un centro fisso in ragione diretta della distanza, ma limitatamente al caso di tre o più punti materiali obbligati a muoversi su di una retta.

Come Jacobi ha mostrato ⁽²⁾ che, in assenza di attrazione baricentrale, il problema del moto rettilineo di tre corpi è integrabile, così l'integrabilità continua a sussistere nel caso di Mestschersky e ciò consegue da un conveniente cambiamento di variabili, effettuato non solo sulle coordinate di spazio, ma anche sul tempo.

Ciò posto, sia f l'intensità dell'attrazione baricentrale che subisce l'unità di massa all'unità di distanza (omogenea col quadrato di una velocità angolare).

Si ha

$$\mathbf{F}_i^{(0)} = -f m_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{G}) \quad , \quad U_0 = -\frac{1}{2} f \sum_i m_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{G})^2 = -\frac{1}{2} f \mathfrak{J} .$$

Il viriale è

$$V_0 = -\frac{1}{2} \sum_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{G}) \times \mathbf{F}_i^{(0)} = \frac{1}{2} f \sum_i m_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{G})^2 = \frac{1}{2} f \mathfrak{J} .$$

Dunque

$$U_0 - V_0 = -f \mathfrak{J} .$$

Il viriale del campo jacobiano è

$$V_1 = -\frac{1}{2} \sum_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{G}) \times \mathbf{F}_i^{(1)} = U_1 .$$

Dunque l'equazione (4) diventa

$$\ddot{\mathfrak{J}} + 4f\mathfrak{J} = 4E ,$$

ovvero

$$\ddot{\mathfrak{J}} + \sigma^2 \mathfrak{J} = 4E ,$$

posto $\sigma^2 = 4f$.

La soluzione generale di questa equazione è

$$(5) \quad \mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 + \mathfrak{J}_1 \cos(\sigma t + \alpha) ,$$

(1) Cfr. « Bull. des Sc. math. », 1894. La trasformazione del Mestschersky è un caso particolare di quella indicata da P. APPELL nella Nota *Sur une transformation de mouvements*. « American Journ. of Math. », 1895.

(2) *Werke*, to. IV.

dove

$$\mathfrak{J}_0 = \frac{E}{f}$$

e \mathfrak{J}_1, α sono due costanti arbitrarie.

Il momento baricentrale d'inerzia è dunque una funzione sinusoidale del tempo di periodo

$$\tau = \frac{2\pi}{\sigma} = \frac{\pi}{\sqrt{f}}.$$

Le condizioni iniziali consentono di calcolare E e quindi \mathfrak{J}_0 ; si noti che U_0 è essenzialmente negativo ed U_1 positivo, sicchè E è suscettibile di assumere valori positivi o negativi.

Poichè si ha

$$\dot{\mathfrak{J}} = 2 \sum_i (P_i - G) \times m_i v_i$$

è possibile calcolare all'istante iniziale $t = 0$ i valori iniziali $\mathfrak{J}(0), \dot{\mathfrak{J}}(0)$ e quindi determinare univocamente le costanti \mathfrak{J}_1, α che appaiono nella soluzione generale.

Se i punti materiali sono respinti dal baricentro ed f_1 denota l'intensità della repulsione che l'unità di massa subisce all'unità di distanza, l'equazione del viriale è

$$\ddot{\mathfrak{J}} - 4f_1 \mathfrak{J} = 4E,$$

la cui soluzione generale è

$$\mathfrak{J} = -\frac{E}{f_1} + \alpha e^{-2\sqrt{f_1}t} + \beta e^{+2\sqrt{f_1}t},$$

dove α e β sono costanti arbitrarie.

§. 3. — RIFERIMENTI DI MINIMA ENERGIA CINETICA.

8. Almansi ha posto ⁽¹⁾ la questione di caratterizzare le terne di assi rispetto alle quali l'energia cinetica di un sistema è minima.

Se una siffatta terna esiste, tali sono tutte le terne solidali con quella. Nel seguito ci riferiremo sempre ad una particolare fra tutte le infinite possibili.

Se $G\xi\eta\zeta$ è una terna avente l'origine nel baricentro ed assi di direzioni invariabili, una terna minimizzante deve avere l'origine fissa rispetto a $G\xi\eta\zeta$, quindi, per l'osservazione precedente, si può senz'altro scegliere il baricentro per origine.

(1) Cfr. *Le equazioni generali della Dinamica e la legge di gravitazione*. «Memorie della R. Acc. dei Lincei», 1913; cfr. anche T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, II₁, cap. IV, § 4.

Il triedro $Gxyz$ richiesto è caratterizzato dalla condizione che il momento baricentrale delle quantità di moto del sistema relative ad esso è nullo, cioè

$$\sum_i (P_i - G) \wedge m_i v_i^{(r)} = 0.$$

Se allora $K_G^{(a)}$, $K_G^{(\tau)}$ denotano i momenti baricentrali delle quantità di moto relative alla terna $G\xi\eta\zeta$ (cioè nel moto relativo al baricentro) e delle quantità di moto di trascinamento, la precedente condizione si traduce, per il principio dei moti relativi, nell'equazione

$$(6) \quad K_G^{(a)} = K_G^{(\tau)}.$$

Convieni tener presente che $K_G^{(a)}$ è eguale al momento baricentrale K_G delle quantità di moto assolute (cioè calcolate rispetto ad assi galileiani $\Omega\xi\eta\zeta$).

Ora si sa che il teorema dei momenti delle quantità di moto vale non solo nel moto assoluto, ma anche nel moto relativo al baricentro

$$\frac{dK_G^{(a)}}{dt} = M_G^{(e)},$$

dove la derivata temporale è calcolata con referenza ad assi galileiani o agli assi $G\xi\eta\zeta$ (la cui terna *non* ruota rispetto a quelli) ed $M_G^{(e)}$ è il momento baricentrale delle forze esterne. Dunque, si è condotti all'equazione differenziale fondamentale

$$(7) \quad \frac{dK_G^{(\tau)}}{dt} = M_G^{(e)}$$

che lega la sollecitazione ai riferimenti di minima energia cinetica.

Qui c'è luogo ad osservare che per la caratterizzazione cinetica del moto di $Gxyz$ rispetto a $G\xi\eta\zeta$ conviene, come procedono Almansi nella Memoria citata e i proff. Levi-Civita e Amaldi nelle loro *Lezioni*, riferire la terna $Gxyz$ a quella $Gx_1y_1z_1$ degli assi principali d'inerzia (baricentrali) in quanto il momento $K_G^{(\tau)}$ si riduce alla sua forma canonica.

9. Diciamo π, χ, ρ le componenti secondo gli assi $G\xi\eta\zeta$ della velocità angolare ω della terna $Gxyz$ rispetto alla terna $G\xi\eta\zeta$.

Le analoghe componenti di $K_G^{(\tau)}$ sono allora:

$$\begin{aligned} K_{G/\xi}^{(\tau)} &= A\pi - C'\chi - B'\rho \\ K_{G/\eta}^{(\tau)} &= -C'\pi + B\chi - A'\rho \\ K_{G/\zeta}^{(\tau)} &= -B'\pi - A'\chi + C\rho, \end{aligned}$$

dove A, B, C, A', B', C' sono i momenti d'inerzia e di deviazione del sistema materiale, cioè

$$\begin{aligned} A &= \sum m_i (\eta_i^2 + \zeta_i^2) & , & & A' &= \sum m_i \eta_i \zeta_i \\ B &= \sum m_i (\zeta_i^2 + \xi_i^2) & , & & B' &= \sum m_i \zeta_i \xi_i \\ C &= \sum m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2) & , & & C' &= \sum m_i \xi_i \eta_i . \end{aligned}$$

Qui continuiamo ad usare la terminologia in uso per i sistemi rigidi, nonostante che non sussista la medesima interpretazione.

Il moto dell'incognita terna $Gxy\chi$ rispetto a $G\xi\eta\zeta$ è retto dalle equazioni differenziali

$$(7') \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} (A\pi - C'\chi - B'\rho) = M_{G/\xi}^{(e)} , \\ \frac{d}{dt} (-C'\pi + B\chi - A'\rho) = M_{G/\eta}^{(e)} , \\ \frac{d}{dt} (-B'\pi - A'\chi + C\rho) = M_{G/\zeta}^{(e)} , \end{cases}$$

le quali implicano accanto alle incognite principali π, χ, ρ , le altre sei funzioni incognite A, B, C, A', B', C' . E si pone la questione generale di associare a queste equazioni altre equazioni per rendere determinato il problema. Il nostro scopo è di segnalare qui un caso in cui si riesce a risolvere completamente il problema.

Prima di metterlo in evidenza converrà trarre qualche conseguenza dalle equazioni differenziali (7') e dalla condizione (6).

10. Se il sistema è sollecitato da sole forze interne, ed anche eventualmente da forze esterne il cui momento baricentrale è nullo, le (7') si riducono a

$$\begin{aligned} A\pi - C'\chi - B'\rho &= c_1 , \\ -C'\pi + B\chi - A'\rho &= c_2 , \\ -B'\pi - A'\chi + C\rho &= c_3 , \end{aligned}$$

dove c_1, c_2, c_3 denotano costanti arbitrarie.

Ne segue che, se in un istante t_0 , le π, χ, ρ sono nulle, lo sono identicamente, cioè se la terna $Gxy\chi$ ha un istante d'arresto rispetto alla terna $G\xi\eta\zeta$, è solidale con questa.

Infatti, nelle condizioni specificate, le costanti c sono nulle e, poichè il determinante del sistema è il discriminante dell'ellissoide d'inerzia baricentrale, così il sistema ammette la sola soluzione nulla in π, χ, ρ .

È appena necessario osservare come questa proprietà della terna di minima energia sia l'estensione dell'analogia proprietà del moto spontaneo di un solido fissato in un punto o intorno al baricentro.

§ 4. — MOTI PIANI.

11. Dimostriamo che nel caso dei moti piani, la terna $Gxy\zeta$ ha necessariamente un asse *normale* al piano del moto e le equazioni (7') si riducono ad una sola.

Infatti, se $G\xi\eta$ è il piano del moto, si ha

$$A' = B' = 0$$

e, poichè le velocità son tutte complanari, il momento $\mathbf{K}_G^{(a)}$ ha *nulle* le prime due componenti. Tali sono allora per la condizione (6) le componenti omogenee di $\mathbf{K}_G^{(\tau)}$, cioè

$$\begin{aligned} A\pi - C'\chi &= 0 \\ -C'\pi + B\chi &= 0. \end{aligned}$$

Ora $A = \sum m_i \eta_i^2$, $B = \sum m_i \xi_i^2$ e il determinante di questo sistema è

$$AB - C'^2 = \sum m_i \eta_i^2 \sum m_i \xi_i^2 - (\sum m_i \xi_i \eta_i)^2.$$

Com'è ben noto questa quantità è essenzialmente diversa da zero (anzi positiva), salvo il caso che le masse siano allineate.

Ne segue che $\pi = \chi = 0$ e quindi la terna $Gxy\zeta$ ruota intorno all'asse $G\zeta$.

Le equazioni (7') si riducono a

$$\frac{d}{dt}(C\dot{\varphi}) = M_{G/\zeta}^{(e)}.$$

Se si osserva che il momento d'inerzia C rispetto a $G\zeta$ è anche il momento d'inerzia baricentrale \mathfrak{I} e che $\rho = \dot{\theta}$, dove θ è l'anomalia di Gx rispetto a $G\xi$, quest'equazione assume la forma

$$(8) \quad \frac{d}{dt}(\mathfrak{I}\dot{\theta}) = M_{G/\zeta}^{(e)}$$

Se il momento delle forze esterne rispetto alla normale baricentrale al piano del moto è nullo, si ha

$$(8') \quad \mathfrak{I}\dot{\theta} = c,$$

dove c è una costante arbitraria.

La condizione (6) si riduce a

$$\mathfrak{J}\dot{\theta} = K_{G/\zeta}^{(a)} = K_{G/\zeta}.$$

Dunque c è il valore costante del momento delle quantità di moto relative al baricentro o assolute rispetto a $G\zeta$ e si determina in base alle condizioni iniziali.

12. Applichiamo i criteri precedenti per la determinazione del moto della terna minimizzante di un sistema di punti sottoposti alla sollecitazione specificata al § 2 e fissiamo le idee sul caso in cui sussista l'attrazione baricentrale.

Se l'atto di moto iniziale è piano, il moto sarà piano. La funzione \mathfrak{J} non può assumere valori negativi e, negli eventuali istanti in cui si annulla, si verifica una collisione generale dei punti del sistema, oltre la quale la continuazione del moto non ha significato.

Se l'energia totale E del sistema è nulla, si ha

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 \cos(\sigma t + \alpha),$$

dove \mathfrak{J}_1 è positivo.

In questo caso si verifica necessariamente una collisione a partire da qualunque valore del tempo, compreso in un intervallo in cui il coseno risulti positivo.

Anche quando sia $E \neq 0$ può verificarsi una collisione. La \mathfrak{J} invece non si annulla se si ha $E > 0$, $\mathfrak{J}_1 < \mathfrak{J}_0$.

Posto $\mathfrak{J}_1 = \lambda \mathfrak{J}_0$; dove $0 < \lambda < 1$, si può scrivere

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 [1 + \lambda \cos(\sigma t + \alpha)].$$

In virtù della (8') la velocità angolare della terna minimizzante $Gxy\zeta$ è data da

$$\dot{\theta} = \frac{c}{\mathfrak{J}_0} \frac{1}{1 + \lambda \cos(\sigma t + \alpha)}.$$

Il termine costante dello sviluppo in serie di Fourier di questa funzione è

$$\omega = \frac{c}{\mathfrak{J}_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = \frac{c}{\sqrt{\mathfrak{J}_0^2 - \mathfrak{J}_1^2}}.$$

Dunque si ha

$$\theta = \omega t + \theta_1(t),$$

dove $\theta_1(t)$ è una funzione periodica col periodo $\frac{\pi}{\sqrt{f}}$.

Supposto $c > 0$ e quindi $\omega > 0$, risulta che ad ogni periodo l'anomalia della terna di minima energia rispetto alla terna $G\xi\eta\zeta$, s'incrementa di

$$\omega\tau = \frac{2\pi}{\sigma} \omega = \frac{\pi}{\sqrt{f}} \frac{c}{\sqrt{\mathfrak{I}_0^2 - \mathfrak{I}_1^2}}.$$

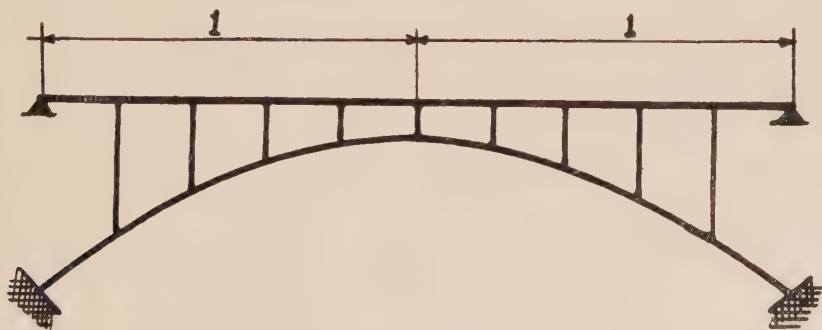
Invece quando \mathfrak{I} può annullarsi, la velocità angolare della terna minimizzante cresce indefinitamente al tendere di t all'istante in cui si produce la collisione.

Meccanica. — *Sul calcolo dei ponti ad arco ad impalcato superiore.* Nota di E. VOLTERRA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

È noto ⁽²⁾ come, in alcuni casi di problemi fortemente iperstatici della Scienza delle Costruzioni, torni utile di applicare i metodi delle equazioni integrali.

Tale applicazione si mostra particolarmente utile nello studio dei ponti ad arco ad impalcato superiore.

Il sistema si schematizza, come mostra l'annessa figura, in una trave orizzontale sovrapposta ad un arco avente la sua stessa luce (2 l); i due sistemi sono collegati mediante aste verticali reagenti verticalmente. I carichi esterni si suppongono naturalmente verticali.



In realtà i collegamenti tra i due sistemi (aste) saranno in numero finito; tuttavia per applicare il metodo propostoci supporremo il caso limite dei due sistemi sovrapposti con un numero infinito di collegamenti.

(1) Nella seduta del 21 novembre 1937.

(2) Vedi, per es., L. STABILINI, *Le funzioni di linee e certi sistemi elastici composti*. (VIII Congresso di Matematica), Bologna, settembre 1928; ID., *id.* «L'ingegnere», settembre 1929; L. GHERARDELLI, *Su di una particolare applicazione del teorema di Menabrea*. «Giornale del Genio Civile», 1923; C. JODI, *Applicazione delle equazioni integrali alla risoluzione di problemi altamente iperstatici*. «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 1936.

Indichiamo con x la coordinata del posto, variabile da $-l$ a $+l$, con $q = q(x)$ la funzione esprimente la legge di carico riferita all'unità di lunghezza della trave, con $\pi(x)$ la reazione incognita opposta dall'arco a causa dei collegamenti, cosicchè il carico effettivo sulla trave sarà $q(x) - \pi(x)$, quello sull'arco $\pi(x)$.

Il problema che ci proponiamo è di scomporre il sistema complesso nei suoi elementi: trave, aste di collegamento, arco, da studiarsi poi separatamente; tale problema è risolto una volta determinata la funzione incognita $\pi(x)$, per trovare la quale si è ricondotti ad un'equazione integrale di seconda specie.

Infatti, indicando con $k_t(x, \xi)$ e $k_a(x, \xi)$ rispettivamente le funzioni di influenza della trave e dell'arco, esprimenti cioè l'abbassamento del punto x pel carico 1 in ξ , pel principio della sovrapposizione degli effetti, gli abbassamenti di x per la trave e per l'arco risulteranno rispettivamente:

$$\int_{-l}^l k_t(x, \xi) [p(\xi) - \pi(\xi)] d\xi,$$

$$\int_{-l}^l k_a(x, \xi) \pi(\xi) d\xi.$$

Per l'elasticità dei collegamenti, indicando con $\mu(x)$ la funzione $\mu(x) = \frac{h(x)}{Eb}$ ove $h(x)$ rappresenta la distanza dell'asse dell'arco dalla trave orizzontale, b la larghezza dei collegamenti verticali, E il modulo di elasticità del materiale costituente i collegamenti, dovrà essere verificata pel sistema l'equazione:

$$(1) \quad \int_{-l}^l k_t(x, \xi) [p(\xi) - \pi(\xi)] d\xi - \int_{-l}^l k_a(x, \xi) \pi(\xi) d\xi = \pi(x) \mu(x).$$

Poniamo ora

$$\varphi(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int_{-l}^l k_t(x, \xi) p(\xi) d\xi \quad ; \quad k(x, \xi) = k_t(x, \xi) + k_a(x, \xi)$$

e l'equazione (1) assumerà la forma seguente:

$$(2) \quad \varphi(x) = \pi(x) + \frac{1}{\mu(x)} \int_{-l}^l k(x, \xi) \pi(\xi) d\xi.$$

Il problema propostoci rimane così sostanzialmente compendiato nella equazione (2).

Si tratta per le applicazioni, di esprimere la funzione $k(x, \xi)$ (nucleo dell'equazione integrale (2)) nella maniera la più atta a permettere la soluzione dell'equazione integrale. Mostriamo come ciò sia possibile in alcuni casi particolarmente interessanti per le applicazioni.

È classicamente noto ⁽¹⁾ che l'espressione dello spostamento lineare δ_r del punto A di un arco della direzione r (proiezione dello spostamento totale di A nella direzione r) è:

$$(3) \quad \delta_r = \int_{-l}^l \left(\frac{MM'}{EI} + \frac{NN'}{E\Omega} + \chi \frac{VV'}{G\Omega} \right) ds$$

ove M, N, V rappresentano rispettivamente il momento flettente, lo sforzo normale, lo sforzo di taglio nella sezione generica dovuta al sistema delle forze esterne F ; M', N', V' le analoghe sollecitazioni che verrebbero generate se sul sistema agisse da sola la forza unitaria applicata nel punto A. E, G i moduli di elasticità normali e trasversali, χ il coefficiente di forma relativo al taglio, I il momento di inerzia rispetto all'asse baricentrico ed Ω l'area della sezione.

Si voglia calcolare la freccia, cioè lo spostamento verticale dell'arco nel punto A (x, y). Si ha $M' = (l - x)$, $N' = \sin \varphi$, $V' = \cos \varphi$ (indicando con φ l'angolo che forma la tangente alla fibra media con l'orizzontale).

Ponendo in luogo di $ds = \frac{dx}{\cos \varphi}$ abbiamo

$$(4) \quad w = \delta y = \int_{-l}^l \frac{M(l-x)}{EI \cos \varphi} dx + \int_{-l}^l \frac{N \sin \varphi}{E\Omega \cos \varphi} dx + \int_{-l}^l \frac{V}{G\Omega} dx.$$

Ora se si suppone, come si fa usualmente, che il momento di inerzia dell'arco vari dalla chiave dell'imposta secondo la legge $I = \frac{I_0}{\cos \varphi}$ (I_0 momento di inerzia in chiave) la (4) diventa:

$$w = \int_{-l}^l \frac{M(l-x)}{EI_0} dx + \int_{-l}^l \frac{N dy}{E\Omega} + \int_{-l}^l \frac{V dx}{G\Omega}.$$

Si indichi con t lo sforzo tagliante che si avrebbe nel punto corrispondente di una trave rettilinea avente la stessa luce di quella dell'arco, con S la spinta all'imposta; ricaviamo:

$$N = S \cos \varphi + t \sin \varphi \quad ; \quad V = t \cos \varphi - S \sin \varphi.$$

(1) Vedi A. GIANNELLI, *Lezioni di teoria dei ponti dettate nella R. Scuola d'Ingegneria di Roma l'anno 1927-28*. (Edizione litografata).

Abbiamo così:

$$(5) \quad w = \int_{-l}^l \frac{M(l-x)}{EI_0} dx + \int_{-l}^l \frac{(S \cos \varphi + t \sin \varphi) dy}{E \Omega} + \\ + \int_{-l}^l \frac{(t \cos \varphi - S \sin \varphi) X}{G \Omega} dx.$$

Consideriamo i due casi di arco a tre cerniere e di arco a due cerniere. Nel primo caso la spinta S è una quantità staticamente determinata; è infatti l'espressione della linea d'influenza della S per un carico P nella sezione ξ

$$S = \frac{P(l-\xi)}{2f} \quad [0 < \xi < +l].$$

Se l'arco è invece a due cerniere e lo si suppone:

1° fortemente ribassato;

2° colla fibra media parabolica di equazione: $y = \frac{f}{l^2} (l^2 - x^2)$;

3° collo spessore variante dalla chiave all'imposta secondo la legge $I = \frac{I_0}{\cos \varphi}$, si calcola facilmente che la linea d'influenza della spinta alla imposta per un carico P nella sezione generica è espressa da:

$$S = \frac{5}{8} \left(\frac{\xi^4}{16 l^4} - \frac{3}{8} \frac{\xi^2}{l^2} + \frac{5}{16} \right) \frac{2 Pl}{f} \quad (1).$$

Se sostituiamo tale valore al posto di S nella (5) ed eseguiamo le operazioni di integrazione, si vede come nelle supposte ipotesi di arco fortemente ribassato, siano trascurabili nell'espressione della freccia dell'arco gli effetti apportati dallo sforzo normale e dallo sforzo di taglio. Si può perciò con grande approssimazione porre:

$$(6) \quad w = - \int_{-l}^l \frac{M(x-l)}{EI_0} dx.$$

Dalla (6) discende l'equazione differenziale seguente determinatrice della fibra media:

$$(7) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{M}{EI_0}.$$

(1) Vedi, per es., MELAN, *Handbuch der Ingenieurwissenschaften*. II Band, V. Abteilung: *Eiserne Bogenbrücken und Hängebrücken*, Leipzig, 1906.

Ora essendo per un arco a due cerniere $M = M_0 - Sy$ ove M_0 è il momento flettente di una trave virtuale, nelle considerate condizioni di carico semplicemente appoggiata in corrispondenza alle cerniere dell'arco. Essendo la (7) un'equazione lineare poniamo $w = w_1 + w_2$ ove

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d^2 w_1}{dx^2} = - \frac{M_0}{EI_0} \\ \frac{d^2 w_2}{dx^2} = + \frac{Sy}{EI_0} \end{cases}$$

(ove y rappresenta l'ordinata della fibra media dell'arco). Per siffatta posizione la linea cercata viene definita come sovrapposizione di due linee elastiche w_1 e w_2 l'una la w_1 è corrispondente a quella di una trave semplicemente appoggiata, l'altra w_2 corrispondente a quella dell'arco sotto la sola spinta S .

La w_1 si potrà perciò porre sotto la forma (1):

$$w_1 = \frac{2 l^3}{EI_0 \pi^4} \sum_m \frac{1}{m^4} \cos \frac{m \pi x}{2 l} \cos \frac{m \pi \xi}{2 l}$$

con facili calcoli si trova per la w_2 (nel caso dell'arco a due cerniere)

$$w_2 = - \frac{2.50 l^3}{EI_0} \left(\frac{x^4}{12 l^4} - \frac{x^2}{2 l^2} + \frac{5}{12} \right) \left(\frac{\xi^4}{16 l^4} - \frac{3}{8} \frac{\xi^2}{l^2} + \frac{5}{16} \right)$$

con che risulta

$$w = w_1 + w_2 = \frac{2 l^3 P}{EI_0} \sum_m \frac{1}{m^4} \cos \frac{m \pi x}{l} \cos \frac{m \pi \xi}{l} - \frac{2.50 l^3}{EI_0} \left(\frac{x^4}{12 l^4} - \frac{x^2}{2 l^2} + \frac{5}{12} \right) \left(\frac{\xi^4}{16 l^4} - \frac{3}{8} \frac{\xi^2}{l^2} + \frac{5}{16} \right);$$

risulterà perciò la funzione d'influenza dell'arco

$$k_a(x, \xi) = \frac{2 l^3}{EI_a} \sum_m \frac{1}{m^4} \cos \frac{m \pi x}{2 l} \cos \frac{m \pi \xi}{2 l} + \frac{2.5 l^3}{EI_a} \left(\frac{x^2}{2 l^2} - \frac{x^4}{12 l^4} - \frac{5}{12} \right) \left(\frac{\xi^4}{16 l^4} - \frac{3}{8} \frac{\xi^2}{l^2} + \frac{5}{16} \right).$$

Se supponiamo la trave superiore del sistema, rappresentata nella figura, semplicemente appoggiata, avremo pure per l'espressione della funzione di influenza di tale trave:

$$k_l(x, \xi) = \frac{2 l^3}{EI_l} \sum_m \frac{1}{m^4} \cos \frac{m \pi x}{2 l} \cos \frac{m \pi \xi}{2 l}$$

(1) Vedi TIMOSHENKO and LESSELS, *Applied Elasticity*. London, 1928.

e quindi il nucleo della equazione integrale (2) sarà in tale caso

$$k(x, \xi) = k_l(x, \xi) + k_a(x, \xi) = \frac{2 l^3}{E(I_a + I_l)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \cos \frac{m\pi x}{2l} \cos \frac{m\pi \xi}{2l} + \\ + \frac{2,5 l^3}{E I_a} \left(\frac{x^2}{2 l^2} - \frac{x^4}{12 l^4} - \frac{5}{12} \right) \left(\frac{\xi^4}{16 l^4} - \frac{3}{8} \frac{\xi^2}{l^2} + \frac{5}{16} \right).$$

Mi propongo di tornare prossimamente sull'argomento in una rivista tecnica e di fornire i risultati, sotto forma di tabelle per la funzione incognita $\pi(x)$, ottenuta risolvendo l'equazione integrale (2) per le differenti condizioni di carico $p(x)$, che più interessano le applicazioni pratiche e per differenti condizioni di vincolo di estremità sia per l'arco che per la trave superiore ad esso arco collegata.

Meccanica. — *Sull'approssimazione dovuta al principio del De Saint-Venant nei solidi prismatici isotropi.* Nota di O. ZANABONI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

Il principio di equivalenza intuito ed applicato dal De Saint-Venant per lo studio elastico dei solidi prismatici, è stato esteso soltanto in tempi successivi ai corpi di forma qualsiasi.

Recentemente ne ho dato io stesso un'ulteriore generalizzazione, insieme alla dimostrazione generale qualitativa ed alla valutazione dell'errore massimo cui esso dà luogo nel caso più sfavorevole possibile⁽²⁾.

Sia per ragioni di carattere storico, sia per fornire un nuovo dato circa un caso diverso da quello più sfavorevole (e dare così un nuovo termine di paragone per i casi intermedi) ritengo non priva di interesse un'indagine sull'approssimazione dovuta al principio stesso quando sia riferito, come lo era in origine, ai corpi prismatici isotropi.

Nella presente Nota si prenderà in esame il modo di variare nel corpo del lavoro di deformazione, anzichè di quello delle tensioni interne, per analogia con quanto fu fatto nei due scritti precedenti di argomento più generale.

Sia un prisma isotropo, retto, di lunghezza illimitata, e di sezione A, lungo l'asse del quale, a partire dalla base iniziale O, sia stabilito un sistema di ascisse x .

(1) Nella seduta del 21 novembre 1937.

(2) *Dimostrazione generale del principio del De Saint-Venant.* « Rendiconti Accademia dei Lincei », vol. XXV, p. 195, fasc. 3, 1937; *Valutazione dell'errore massimo cui dà luogo l'applicazione del principio del De Saint-Venant.* « Rendiconti Accademia dei Lincei », vol. XXV, p. 595, fasc. 11, 1937.

In O agiscano dei carichi costituenti un complesso equilibrato ⁽¹⁾, i quali possono essere definiti analiticamente per mezzo dell'intensità F di una qualsiasi delle forze componenti, e mediante una funzione che esprima, per ogni punto della base, il rapporto tra l'intensità del carico generico e la F .

È ovvio che tale funzione viene a dipendere solo dalla forma del diagramma di carico.

Prendiamo ora a considerare il lavoro di deformazione del corpo dato, ed indichiamo con $L(x)$ quella quota parte del lavoro totale, che è contenuta nel tronco di prisma che rimane dopo avere escluso il tratto iniziale Ox .

Siccome in ogni punto del solido le tensioni risultano proporzionali ad F , potremo scrivere:

$$L(x) = F^2 \cdot y(x)$$

dove la funzione $y(x)$ è sempre positiva e dipende unicamente dalla forma del diagramma di carico.

Il lavoro totale L si otterrà facendo $x = 0$ nella relazione precedente:

$$(1) \quad L = L(0) = F^2 \cdot y(0)$$

e qualunque possa essere l'andamento delle forze esterne, ovvie ragioni impongono che $y(0)$ non sia mai nulla nè infinita.

Calcoliamo ora la derivata di $L(x)$ nel punto $x = 0$.

Assumendo L come l'integrale del potenziale elementare esteso a tutto il corpo, ed esprimendo l'elemento di volume con $dA \cdot dx$, si ha con deduzione immediata:

$$L'(0) = - \int_{(A)} \varphi dA$$

dove φ è il potenziale elementare nei punti della base O .

D'altra parte si ricava dalle precedenti relazioni:

$$L'(0) = F^2 \cdot y'(0)$$

e perciò, avendo presente che φ ed A sono entrambi positivi, si deduce che $L'(0)$ ed $y'(0)$ possiedono in comune le proprietà di non annullarsi mai e di assumere soltanto valori negativi finiti.

Identiche proprietà presenta di conseguenza il rapporto:

$$p(0) = \frac{L'(0)}{L(0)} = \frac{y'(0)}{y(0)}$$

(1) Si suppone che le forze esterne siano date in maniera che il problema elastico sia possibile. In caso contrario, oppure se sulla base risultassero delle tensioni infinite, basterebbe creare una nuova base iniziale asportando un tronco di prisma abbastanza lungo da escludere ogni fenomeno plastico.

il quale, come si vede, viene inoltre a dipendere unicamente dalla forma del diagramma di carico, e non dalle intensità assolute delle forze che lo compongono.

Sezioniamo ora il prisma in corrispondenza all'ascissa generica x , ed asportiamo tutta la parte anteriore: sulla nuova base si liberano delle tensioni interne che, evidentemente, costituiscono un sistema equilibrato, funzionante come un complesso di forze applicate dall'esterno.

Per il nuovo prisma, che è del pari di lunghezza illimitata, le condizioni fisiche e geometriche sono identiche a quelle che si avevano nel solido primitivo, e quindi possiamo ripetere che, per la sezione generica x , il rapporto:

$$(2) \quad p(x) = \frac{L'(x)}{L(x)} = \frac{y'(x)}{y(x)}$$

è sempre di valore finito e negativo.

Se passiamo al limite per $x = \infty$, il rapporto p tende al valore corrispondente a quella forma del diagramma di carico cui tende il complesso delle reazioni interne quando la sezione si allontana indefinitamente da O , ed anche per tale diagramma sussistono tutte le ragioni per asserire che $p < 0$.

Ciò posto integriamo la (2) tenendo presente la (1):

$$L(x) = L \cdot e^{\int_0^x p(x) dx}.$$

Se applichiamo il teorema della media nell'intervallo $0 \div x$, ponendo il valor medio di $p(x)$ uguale a $-\frac{2}{a}$, la precedente relazione può scriversi:

$$L(x) = L \cdot e^{-\frac{2x}{a}}$$

e per le deduzioni precedenti possiamo asserire che a è positivo e finito qualunque sia il punto x .

Appare dunque fin d'ora che le quantità in esame variano con legge esponenziale lungo l'ascissa, ed assumono di conseguenza un decremento rapidissimo.

Completiamo le nostre posizioni indicando con $l(x)$ il lavoro che le forze esterne in O compiono da sole sul prisma Ox , e con $\lambda(x)$ il lavoro che le reazioni interne in x compiono sullo stesso prisma, quando si considerino come carichi esterni agenti isolatamente ed indipendentemente da quelli dati.

Sussiste la relazione (1):

$$L = l(x) - \lambda(x) - L(x).$$

Da cui:

$$(3) \quad l(x) - L = \lambda(x) + L(x).$$

E siccome, per l'isotropia del corpo e la costanza delle sezioni, il prisma Ox , sottoposto alle reazioni in x , non differisce per nulla dal prisma $x \div 2x$, sottoposto alle stesse reazioni, ne viene che, se si fa crescere x indefinitamente, quest'ultimo prisma tende al prisma $x \div \infty$, ed il lavoro $\lambda(x)$ tende ad $L(x)$.

Quindi, col primo membro della (3) essendosi espresso l'errore che si commette valutando il lavoro del tronco Ox in luogo di quello del prisma indefinito, se ne conclude che, per i corpi prismatici, il principio del De Saint-Venant è verificato con legge esponenziale, vale a dire colla più forte approssimazione desiderabile.

Possiamo spingere anche più oltre le nostre deduzioni, e ricavare una espressione d'uso pratico per il lavoro $l(x)$ del tronco di lunghezza finita.

Supponiamo che questa sia tale per cui sia già praticamente consentito di sostituire il prisma $[0, \infty]$ al tronco $[0, x]$, o viceversa.

Allora risulta indifferente il valore effettivo della a per tutte le ascisse che seguono la x , per modo che si può conservare anche per il tratto $0 \div \infty$, lo stesso valor medio relativo al tratto $0 \div x$.

Se si indica con $\lambda_n(x)$ il lavoro che le reazioni della sezione nx compiono, agendo da sole, sul prisma $(n-1)x \div nx$, risulta, per l'isotropia, che esso è anche il lavoro che le stesse forze compiono sul prisma $nx \div (n+1)x$.

Allora la (3), scritta per i vari valori di n , ci dà:

$$\begin{aligned} l(x) - L &= \lambda_1(x) + L(x) \\ \lambda_1(x) - L(x) &= \lambda_2(x) + L(2x) \\ \lambda_2(x) - L(2x) &= \lambda_3(x) + L(3x) \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_{n-1}(x) - L((n-1)x) &= \lambda_n(x) + L(nx) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Sommando membro a membro e riducendo:

$$l(x) - L - \sum_1^{\infty} L(nx) = \sum_1^{\infty} L(nx).$$

(1) Vedi la Nota prima citata in (2) a p. 340.

In virtù della formula esponenziale, scritta per l'ascissa nx , abbiamo

$$l(x) = L \left(1 + 2 \sum_1^{\infty} e^{-\frac{2nx}{a}} \right).$$

Trasformando via via l'espressione tra parentesi:

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_1^{\infty} e^{-\frac{2nx}{a}} &= \left(1 + \sum_1^{\infty} e^{-\frac{2nx}{a}} \right) + \sum_1^{\infty} e^{-\frac{2nx}{a}} = \\ &= \sum_0^{\infty} e^{-\frac{2nx}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} \cdot \sum_0^{\infty} e^{-\frac{2nx}{a}} = \left(1 + e^{-\frac{2x}{a}} \right) \cdot \sum_0^{\infty} e^{-\frac{2nx}{a}}. \end{aligned}$$

La serie che qui compare equivale a:

$$\sum_0^{\infty} e^{-\frac{2nx}{a}} = 1 + e^{-\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{4x}{a}} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-\frac{2x}{a}}}.$$

Quindi, introducendo le funzioni iperboliche:

$$(4) \quad l(x) = L \cdot \coth \frac{x}{a}.$$

Questa è la formula che si cercava, ed essa dà il modo con cui varia il lavoro di deformazione colla lunghezza del prisma, quando questa sia sufficientemente grande.

Per il modo stesso col quale la (4) è stata dedotta, si vede che essa è rigorosamente esatta allorchè il diagramma dei carichi agenti sulla base iniziale possiede tal forma da rendere costante, lungo tutto il solido illimitato, la funzione $p(x)$.

Secondo quanto abbiamo premesso, in queste condizioni le tensioni interne in ogni sezione dovranno presentarsi con un diagramma di uguale andamento a quello delle forze esterne.

Esso si ripete dunque invariato lungo tutto il prisma di lunghezza infinita.

• In virtù della proporzionalità tra il lavoro di deformazione ed il quadrato delle tensioni interne, si ha immediatamente che queste assumono in tal caso l'espressione $F \cdot e^{-\frac{x}{a}}$.

Nel caso generico sappiamo che la funzione $p(x)$ non è costante, ma la (4) può ancora essere usata, sia pure per l'intero intervallo $0 \div \infty$, dividendo il prisma in tronchi di opportuna lunghezza, ed assumendo in ciascuno di essi il proprio valor medio della p .

È chiaro che in pratica il numero di divisioni sarà assai piccolo dato che, per l'estrema rapidità di convergenza dell'esponenziale, il valore del

termine a non avrà più nessuna influenza sensibile da un certo punto, molto prossimo alla base, in avanti.

A partire dall'ascissa in cui questo si verifica, risulta evidentemente inutile ogni ulteriore divisione in tronchi.

CONCLUSIONE. — Le considerazioni svolte mostrano la possibilità di sostituire un prisma di piccola lunghezza a quello di illimitata estensione, conseguendo una approssimazione nei valori del lavoro di deformazione e delle tensioni interne, che dipende da una legge esponenziale.

Una volta fissato l'errore massimo ammissibile, e considerando solo prismi finiti, la possibilità di sostituzione si presenta per valori ancora più bassi della lunghezza ⁽¹⁾.

Il principio del De Saint-Venant è dunque verificato in modo rapidissimo per i solidi prismatici, e la sostituzione dei casi pratici con quelli teorici staticamente equivalenti, studiati dal De Saint-Venant stesso, è pienamente giustificata dalla coincidenza praticamente perfetta che essi presentano a partire da una breve distanza dalla base caricata.

Ponendo attenzione alle ipotesi impiegate per il nostro ragionamento, si vede subito che questo, e le relative conclusioni, si applicano anche per un solido isotropo generato da una superficie piana che si sposti descrivendo col suo baricentro un'elica cilindrica, e mantenendosi col suo piano normale all'elica stessa.

È infine degno di nota il fatto che non è stato necessario specificare il sistema di carichi agenti sul prisma.

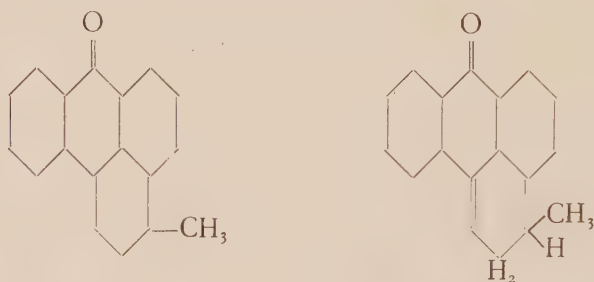
Ciò si accorda perfettamente con un fatto generale dimostrato nella Nota seconda citata in ⁽²⁾ a p. 340: vale a dire che la rapidità di convergenza al limite del lavoro di deformazione, quando il corpo si accresce indefinitamente, non dipende dalle forze equilibrate agenti, ma bensì soltanto dalla legge di accrescimento del solido.

(1) Vedi la Nota prima citata in (2) a p. 340.

Chimica. — *La costituzione del benzantrone di Liebermann*⁽¹⁾.
Nota di ELISA GHIGI, presentata⁽²⁾ dal Socio M. BETTI.

Fin dal 1882 C. Liebermann⁽³⁾ osservò che il ms-isoamilossantranolo si distingueva nettamente dai suoi omologhi per il comportamento coll'acido solforico conc. e caldo, col quale dava origine ad una intensa colorazione rossa, in seguito alla formazione di un prodotto che poté isolare in aghi gialli fusibili a 206°.

Non ebbe però alcuna idea precisa sulla costituzione del prodotto ottenuto e solo nel 1908⁽⁴⁾ notando la grande somiglianza che presentava col benzantrone preparato da O. Bally⁽⁵⁾ nel 1904 pensò che si trattasse di un derivato benzantronico, senza definirne in modo sicuro la costituzione ma proponendo per esso le due formule



di Bz-1-metilbenzantrone o di un idruro di questo.

Lo stesso composto venne pure preparato da E. Jüngermann⁽⁶⁾ per azione dell'acido solforico concentrato sul ms-etossi-ms-isoamilantrone e sul 9, 10-difenossi-9, 10-isoamilenantracenbiidruro.

Nessun lavoro venne poi a dimostrare sicuramente la costituzione dell'interessante composto, al quale anche dal Beilstein⁽⁷⁾ e dall'Houben⁽⁸⁾

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologica della R. Università di Bologna.

(2) Nella seduta del 21 novembre 1937.

(3) « Ann. », 212, pp. 96 e 120, 1882.

(4) « Ber. », 41, p. 1423, 1908.

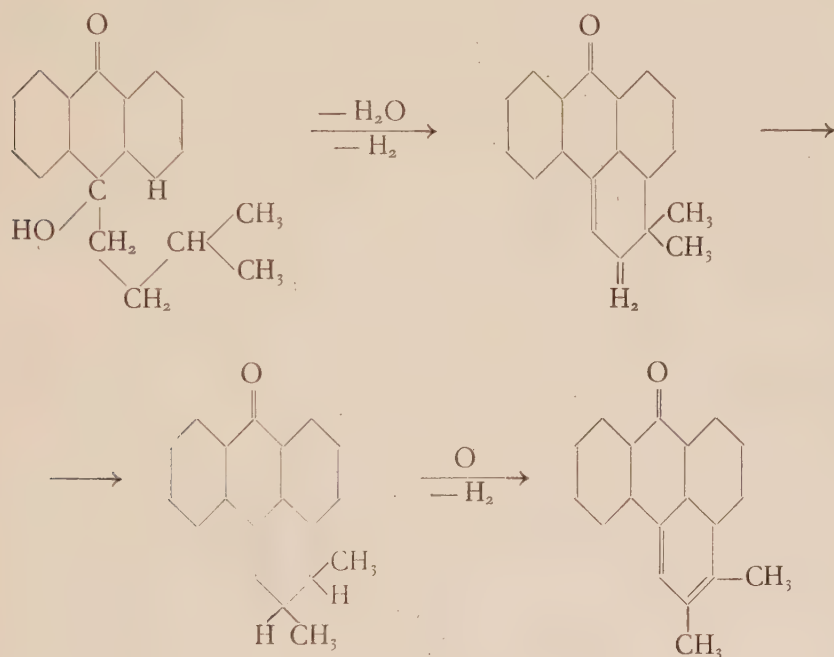
(5) « Ber. », 38, p. 194, 1905.

(6) « Ber. », 38, p. 2868, 1905.

(7) Vierte Auflage, Achter Band, s. 198 (Springer, Berlin, 1925).

(8) *Das Anthracen und die Anthrachinone*, s. 564 (Thieme, Leipzig, 1929).

venivano attribuite le due formule sopra indicate, però nel 1928 in un brevetto della J. G. Farbenindustrie ⁽¹⁾ veniva descritto il Bz-1, 2-dimetilbenzantrone (preparato dal derivato sodico dell'ossimetilen-metil-etilchetone e dall'antrone) il di cui punto di fusione 207° era solo di un grado superiore a quello del composto di Liebermann. Ebbi subito la convinzione che si trattasse dello stesso composto formatosi nel caso della reazione di Liebermann in seguito ad una trasposizione, che probabilmente avviene dopo la condensazione, e successiva deidrogenazione per azione dell'H₂SO₄ conc. presente, secondo lo schema:

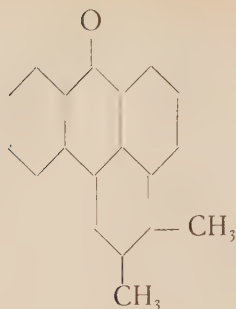


e poichè conoscevo la demolizione ossidativa con KMnO₄ in soluzione alcalina del benzantrone ⁽²⁾, demolizione che lascia intatto il nucleo benzenico, pensai che tale metodo avrebbe potuto essere impiegato con vantaggio a chiarire la costituzione del benzantrone di Liebermann.

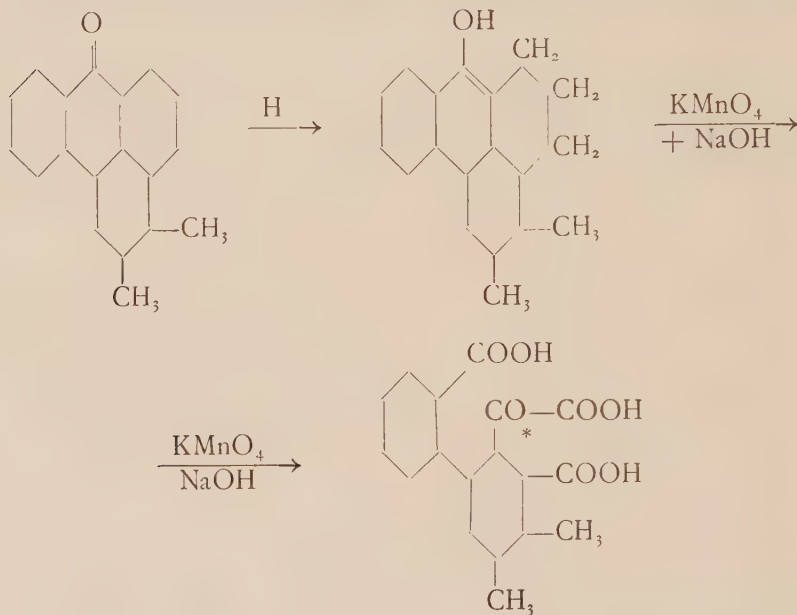
Onde evitare però la ossidazione dei metili presenti, trasformai il composto in esame nel trimetilenossifenantrene corrispondente, il quale subendo una rapidissima ossidazione sulla parte antrachinonica della molecola permette appunto di mantenere i metili inalterati. Con tale reazione ho infatti potuto dimostrare che al benzantrone di Liebermann spetta la costituzione di Bz-1, 2-dimetilbenzantrone:

(1) « F. P. », 631, 995; vedi anche « Schwz. P. », da 128 112 a 128 121.

(2) G. CHARRIER e E. GHIGI, « Gazz. Chim. Ital. », 63, p. 685, 1933.

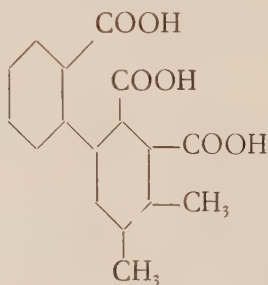


L'ossidazione con KMnO_4 in ambiente alcalino porta esclusivamente alla formazione dell'acido 3, 4-dimetildifenil-5, 2'-dicarbossil-6-gliossilico:

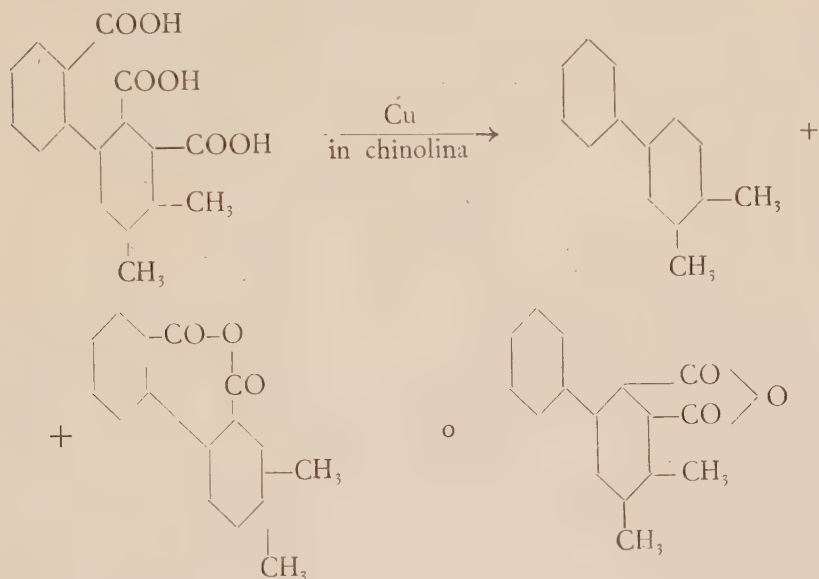


* La posizione del resto gliossilico non è stabilita con sicurezza.

che per ulteriore ossidazione in ambiente acido si trasforma nell'acido 3, 4-dimetil-difenil-5, 6, 2'-tricarbossilico:

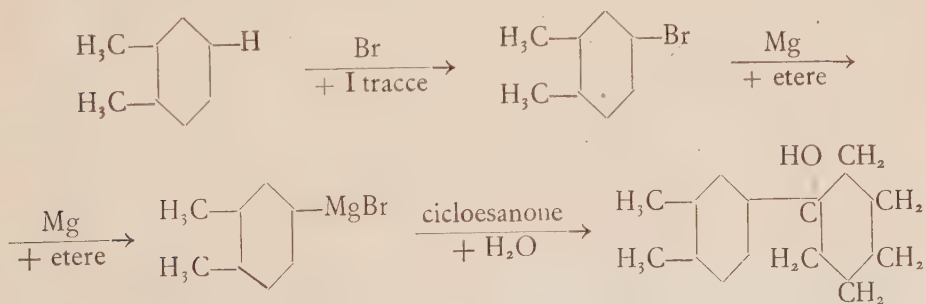


Questo decarbossilato con rame in chinolina dà luogo alla formazione di 3, 4-dimetildifenile e all'anidride di un acido dimetildifenildicarbossilico che sfugge alla completa decarbossilazione.



Ma poichè il 3, 4-dimetildifenile non era ancora noto, pensai di prepararlo per sintesi onde confrontarlo nelle sue proprietà fisiche e nel suo comportamento chimico con quello proveniente dal benzantrone di Liebermann.

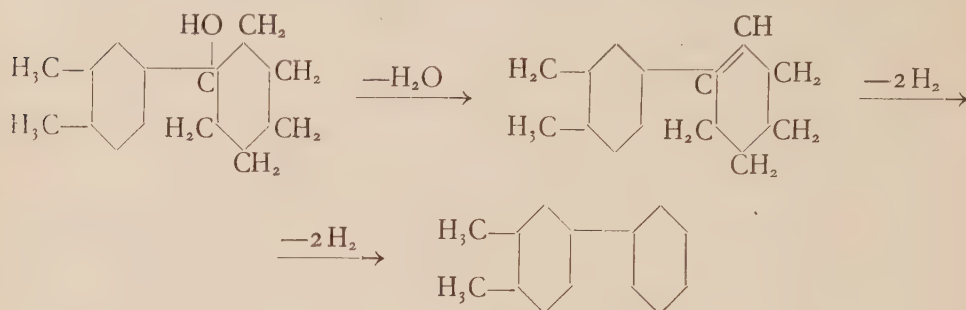
Il metodo da me seguito per questa sintesi fu quello ⁽¹⁾ basato sull'azione degli alogenuri di arilmagnesio sul cicloesanone e susseguente disidratazione e deidrogenazione con zolfo. Il prodotto di partenza fu l'o-xilolo che venne trasformato secondo O. Jacobsen ⁽²⁾ nel 4-bromo-o-xilolo il quale trattato con magnesio dà il bromuro di o-xililmagnesio corrispondente, che venne poi fatto reagire con cicloesanone:



(1) JAN RUSSEL SHERWOOD, WALLACE FRANK SHORT and ROGER STANSFIELD, « J. Chem. Soc. », London, 1932, pp. 1641, 1833; 1934, p. 645.

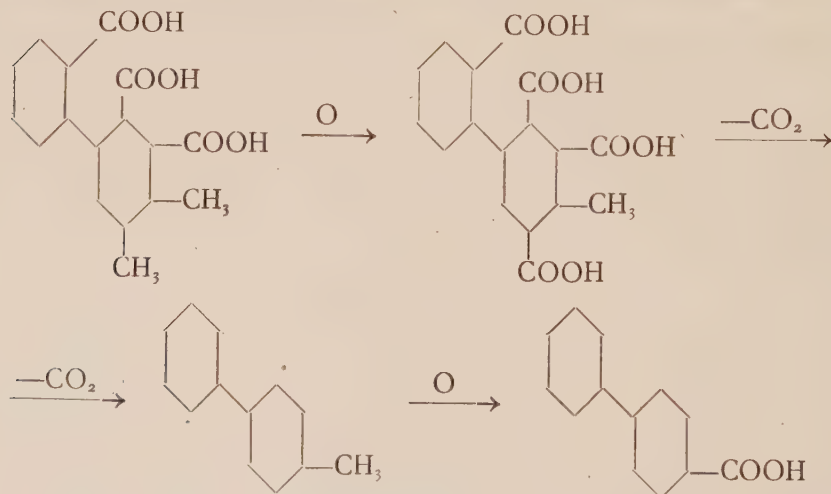
(2) « Ber. », 17, p. 2372, 1884.

L'1-(3, 4-dimetilfenil)-cicloesano-(1) previa disidratazione venne quindi deidrogenato con zolfo a 3, 4-dimetildifenile



che risultò perfettamente identico a quello proveniente dalla demolizione del benzantrone in esame. Entrambi per ossidazione con KMnO_4 al 2% fornirono l'acido difenil-3, 4-dicarbossilico fusibile a $201-202^\circ$, verosimilmente identico a quello ottenuto da Auwers⁽¹⁾ per ossidazione con KMnO_4 dall'acido 1-metil-3-fenil-benzen-6-carbossilico e come questo trasformabile per riscaldamento con anidride acetica nell'anidride corrispondente.

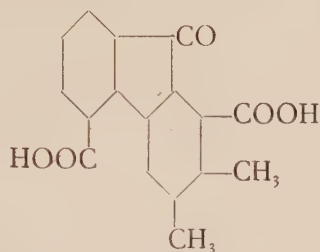
Altre reazioni venivano inoltre a confermare tale dimostrazione; infatti l'acido 3, 4-dimetil-difenil-5, 6, 2'-tricarbossilico per ulteriore ossidazione con KMnO_4 fornì l'acido 4-metildifenil-3, 5, 6, 2'-tetracarbossilico che decarbossilato fornì 4-metildifenile, ossidabile ad acido p-fenilbenzoico.



L'acido 3, 4-dimetildifenil-5, 2'-dicarbossil-6-gliosilico per distillazione secca su calce diede piccole quantità di 3, 4-dimetildifenile, che venne riconosciuto come tale per mezzo dell'ossidazione ad acido difenil-3, 4-dicarbossilico, e fornì inoltre un dimetilfluorene.

(1) « Ber. », 55, p. 2184, 1922.

Infine gli acidi 3, 4-dimetildifenil-5, 2'-dicarbossil-6-gliossilico e 3, 4-dimetildifenil-5, 2', 6-tricarbossilico con H_2SO_4 conc. a $150-160^\circ$ si condensano, ad acido 2, 3-dimetilfluoren-1, 5-dicarbossilico



a cui si attribuì tale costituzione per analogia colla reazione studiata col comune benzantrone.

Resta così sicuramente dimostrato che il benzantrone di Liebermann, la di cui scoperta precede di circa 23 anni quella del benzantrone di O. Bally, è il Bz-1, 2-dimetil-1, 9-benzantrone-(10).

La parte sperimentale del presente lavoro comparirà in uno dei prossimi fascicoli dei « *Berichte der Deutschen Chemischen Gesellschaft* »: le ricerche che sto eseguendo circa l'applicazione del benzantrone di Liebermann come intermedio nella fabbricazione dei coloranti da tino benzantronici verranno comunicate ne « *La Chimica e l'Industria* ».

CONCLUSIONE. — Con l'impiego del metodo di demolizione ossidativa con KMnO_4 in soluzione alcalina già studiato in questo laboratorio, allo scopo di chiarire la costituzione dei Bz-derivati benzantronici, ho potuto dimostrare con tutta sicurezza che al composto ottenuto da C. Liebermann, nel 1882, per azione dell' H_2SO_4 conc. sul ms-isoamilossantranolo, spetta la costituzione di Bz-1, 2-dimetil-1, 9-benzantrone-(10).

Biologia. — *Osservazioni sulla embriologia di «Tamarix gallica» L.*⁽¹⁾. Nota di VALERIA PÀROLI, presentata⁽²⁾ dal Socio E. CARANO.

Nel 1935 in seguito alle osservazioni della dott. Zabban⁽³⁾ fu dimostrato che la *Myricaria germanica*, pianta appartenente alla famiglia delle Tamaricacee, segue nella costruzione del gametofito femminile il tipo *Euphorbia dulcis* scoperto dal Carano⁽⁴⁾ e osservato dalla Bambacioni in *Fritillaria persica*⁽⁵⁾ e in altre Gigliacee dapprima ascritte al tipo *Lilium*⁽⁶⁾. Mi è sembrato allora interessante studiare l'embriologia di altre Tamaricacee (*Tamarix gallica*, *Reaumuria hipericoides*) per poter stabilire se il tipo di sviluppo sopra indicato abbia una certa diffusione in questa famiglia o sia proprio del solo genere *Myricaria*.

Le osservazioni che qui riferisco riguardano la *Tamarix gallica*, pianta abbastanza frequente in Italia sia nel continente che nelle isole; cresce lungo le spiagge marittime e sulle rive dei fiumi. Fiorisce da marzo a giugno con fiori piccoli, bianchi o rosei, raccolti in spighe esili ed allungate. L'ovario, supero, risulta di tre carpelli che si saldano per i margini a formare un'unica cavità ed è sormontato da tre stili. Il frutto è una capsula con tre valve di forma trigono-piramidata.

Il materiale necessario alle mie osservazioni è stato preso da un esemplare a fiori rosa vivente nell'Orto Botanico della R. Università di Roma.

Quando iniziai le mie ricerche nessuno studio era stato pubblicato sullo sviluppo del gametofito femminile di piante appartenenti al genere *Tamarix*. Solo Schnarf nel suo lavoro del 1931⁽⁷⁾ accenna che questo genere ha l'ovulo crassinucellato e con due tegumenti, che la cellula archesporiale primaria distacca una cellula parietale e che le cellule calazali dell'epidermide del seme finiscono per crescere in forma di peli.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 21 novembre 1937.

(3) Osservazioni sull'embriologia di «*Myricaria germanica*» Desv. «Annali di Botanica», vol. XXI, 1936.

(4) Ulteriori osservazioni su «*Euphorbia dulcis*» L., in rapporto col suo comportamento apomittico. «Annali di Botanica», vol. XVII, 1926.

(5) Ricerche sulla ecologia e sulla embriologia di «*Fritillaria persica*» L. «Annali di Botanica», vol. XVIII, 1928.

(6) Nuove ricerche sull'embriologia delle Gigliacee. «Annali di Botanica», vol. XIX, 1931.

(7) Vergleichende Embryologie der Angiospermen. Berlin, 1931.

Nel corso del mio lavoro sono apparse le ricerche di Mauritzon⁽¹⁾ e degli indiani Joshi e Cajale⁽²⁾ alle quali accennerò in seguito.

Sezionati in senso longitudinale boccioli e pistilli di *Tamarix gallica*, ho osservato nella cavità ovarica la presenza di ovuli anatropi col micropilo in basso, a nucella massiccia rivestita di due tegumenti dei quali l'interno sporge sopra l'esterno. Sono d'accordo quindi con lo Schnarf nell'affermare che l'ovulo del genere *Tamarix* è del tipo crassinucellato bitegminato.

Nella giovane nucella si differenziano assai presto al disotto dell'epidermide una, a volte due cellule archesporiali che si distinguono facilmente dalle altre cellule per le dimensioni maggiori e per il contenuto più abbondante in citoplasma. L'unica cellula archesporiale o una delle due si sviluppa ulteriormente e si segmenta in due cellule, una interna, la cellula madre del macrospore (macrosporangio), e una esterna, la cellula del tappeto, che si divide in maniera anticlinale. Questi stadi non si verificano nella *Myricaria germanica* nella quale si differenzia subito al di sotto dell'epidermide nucellare la cellula madre delle macrospore.

Dopo un periodo di riposo alquanto lungo il macrosporangio inizia la divisione riduzionale che porta alla formazione di due nuclei figli tra i quali non si forma una membrana divisoria. Questi subiscono presto la divisione omeotipica, in seguito alla quale nel sacco embrionale si trovano quattro nuclei che hanno il valore di macrospore e partecipano tutti alla formazione del gametofito femminile. Essi sono di eguali dimensioni e si dispongono per lo più in croce, cioè uno all'estremità micropilare, uno alla calazale e due verso la metà del sacco embrionale.

Presto nel citoplasma omogeneo che li circonda cominciano a formarsi dei vacuoli che via via aumentano in grandezza e confluiscono verso il centro del sacco embrionale, in modo che in definitiva un unico grande vacuolo viene a separare il nucleo che già si trovava all'estremità micropilare dagli altri tre che vengono spinti all'estremità opposta. È questa la disposizione 1 + 3 caratteristica delle piante che seguono nello sviluppo del gametofito femminile il tipo *Euphorbia dulcis*.

A questo stadio segue una nuova divisione, la terza a cominciare dalla eterotipica. Mentre il nucleo micropilare si divide regolarmente dando due nuclei aploidi, all'estremità opposta del sacco gli spiremi dei tre nuclei confluiscono in un'unica voluminosa piastra che poi diverrà la piastra equatoriale di un grande fuso calazale triploide. Molto spesso ho osservato la presenza nel sacco embrionale di due fusi di differenti dimensioni e sono riuscita a contarne nelle piastre equatoriali i cromosomi: dodici nel fuso micropilare, trentasei nel calazale. Essi portano ad uno stadio con quattro

(1) Zur Embryologie einiger Parietales Familien. «Svensk Botanisk Tidskrift», Band 30, 1936.

(2) A note on the structure and development of the Embryo - sac, ovule and fruit of «*Tamarix dioica*» Roxb. «Annals of Botany», vol. L, 1936.

nuclei, dei quali due, con numero aploide di cromosomi, al micropilo; e due, con numero triploide, alla calaza; tra le due coppie di nuclei si trova un grandissimo vacuolo che occupa quasi tutta la cavità del sacco embrionale.

Per divisione di questi quattro nuclei si origina il gametofito adulto, formato, come nel tipo normale, di otto nuclei che circondandosi di citoplasma si differenziano in cellule. Generalmente le fasi di questa cariocinesi non sono sincrone ai due poli: si forma prima la tetrade dei nuclei calazali.

Da quanto ho esposto, lo sviluppo del gametofito femminile da me osservato in *Tamarix gallica* è analogo a quello della *Myricaria germanica*.

Il lavoro del Mauritzon riguarda lo sviluppo del gametofito femminile della *Tamarix tetrandra*. Egli ascrive il genere *Tamarix* al tipo *Lilium* poiché considera lo stadio a quattro nuclei in due coppie separate da vacuolo come una disposizione dei nuclei macrosporiali successiva a quella in croce. Da quanto sono venuta esponendo sulla loro formazione tali nuclei invece non possono assolutamente più ritenersi nuclei macrosporiali. Evidentemente il Mauritzon non è riuscito ad osservare lo stadio, relativamente fugace, con due fusi disuguali; inoltre egli deve essere stato tratto in una inesatta interpretazione anche dal fatto che i due nuclei calazali di questo stadio nel genere *Tamarix* non differiscono eccessivamente nelle dimensioni dai due nuclei micropilari, come ho osservato anche io in *Tamarix gallica*. Tuttavia basta confrontare le dimensioni di un sacco embrionale a due coppie di nuclei separate da un grande vacuolo con le dimensioni di un sacco embrionale nello stadio dei nuclei omeotipici per convincersi subito che i due stadi sono molto lontani fra di loro.

Più recente è la nota di Joshi e Cajale sulla embriologia della *Tamarix dioica*. Questi studiosi ascrivono questa pianta al tipo descritto dalla Bambacioni in *Fritillaria persica* ma non accennano nè al confluire dei tre spiremi calazali che precede la terza divisione, nè alla terza divisione con i due fusi di diverse dimensioni, che sono gli stadi caratteristici dello sviluppo del gametofito femminile di tale pianta. Per essi lo stadio a quattro nuclei disposti in due coppie deriva dalla disposizione $1 + 3$ dei nuclei macrosporiali solo perchè i due nuclei inferiori presentano generalmente tre nucleoli e sono di dimensioni maggiori dei micropilari che hanno costantemente un solo nucleolo. Nella *Tamarix gallica* invece io ho potuto seguire, come la Bambacioni in *Fritillaria persica*, il passaggio dall'uno all'altro di questi stadi.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 5 dicembre 1937 - Anno XVI

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio euclideo.* Nota⁽¹⁾ del Socio T. LEVI-CIVITA.

Nelle equazioni della fisica matematica accade talora che, assieme ad una (incognita) funzione f del posto, intervengano i suoi parametri differenziali del primo e del secondo ordine: $\Delta_1 f$ e $\Delta_2 f$.

D'altra parte, per procurarsi soluzioni particolari di tipo semplice, si comincia per lo più col ricercare se tutto può farsi dipendere da una sola coordinata di spazio. Dovranno allora, almeno di regola, dipendere unicamente da tale coordinata sia f che i suoi due parametri, e quindi (supposto, ben si intende, che f sia una effettiva funzione, e non una costante) $\Delta_1 f$ e $\Delta_2 f$ risulteranno funzioni, *a priori* indeterminate, della sola f :

$$\Delta_1 f = F_1(f) \quad , \quad \Delta_2 f = F_2(f),$$

assumendo per conseguenza valore costante su ogni superficie della famiglia $f = \text{cost.}$

Si presenta così, anche indipendentemente dalla suaccennata ricerca di soluzioni particolari, la questione di caratterizzare tutte le possibili famiglie *isoparametriche* dello spazio ordinario, cioè tutte le famiglie di superficie $f = \text{cost.}$ sopra le quali si mantengono costanti entrambi i parametri $\Delta_1 f$ e $\Delta_2 f$.

(1) Presentata nella seduta del 5 dicembre 1937.



Non mi consta che la questione sia stata trattata specificamente, sebbene i cultori della materia avessero probabilmente la stessa mia impressione; cioè che non esistono altre famiglie isoparametriche, oltre quelle elementari, subito manifeste, rispettivamente costituite da piani paralleli, sfere concentriche, cilindri circolari coassiali. A corroborare tale impressione concorre indubbiamente la bella Memoria del LAURA, *Sopra la propagazione di onde in un mezzo indefinito* ⁽¹⁾, dove si perviene a risultato negativo per una più complicata questione dinamica, che involge essa pure superficie parallele ($\Delta_1 f = F_1(f)$).

Venendo specificamente al nostro assunto, cominceremo coll'osservare che, senza pregiudizio della generalità, si può supporre $F_1(f)$, che (nel campo reale) deve essere essenzialmente positivo ⁽²⁾, eguale all'unità. Infatti, in caso contrario, basterebbe considerare, al posto di f , la funzione della sola f ,

$$w = \int \sqrt{F_1(f)} df$$

perchè risulti

$$(1) \quad \Delta_1 w = 1,$$

nonchè

$$(2) \quad \Delta_2 w = \text{funzione della sola } f, \text{ cioè della sola } w \\ = F(w).$$

La (1) sta ad esprimere (come già del resto la condizione precedente che il parametro differenziale primo è costante sopra una superficie della famiglia) che si tratta di superficie *parallele*. Il modo più generale di soddisfare a questa condizione è di partire da una superficie arbitraria $\tilde{\omega}$ e di costruire la famiglia delle sue parallele. Vedremo subito che la costruzione tipica porta appunto ad assegnarne un tale parametro $w(x, y, z)$ (x, y, z coordinate cartesiane) che ottempera automaticamente alla (1). Sia perciò

$$\Pi = \Pi(u, v)$$

la rappresentazione parametrica della superficie $\tilde{\omega}$ mediante due qualsivogliono coordinate curvilinee u, v . Nel punto generico Π sia $N(u, v)$ il versore della normale alla superficie. La famiglia delle superficie parallele

(1) Sta in *Scritti matematici offerti ad Enrico D'Ovidio*. Torino, Bocca, 1918, pp. 253-278.

(2) In quanto eguale a $\Delta_1 f$, il quale parametro, quando si tratta, come si è supposto, di una effettiva funzione, e non di una costante, è certo > 0 in qualche punto, come apparisce, per esempio, dalla sua espressione $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$ in coordinate cartesiane. Si intende poi di riferirsi ad un intorno del punto, in cui, per la continuità, sia ancora $\Delta_1 f \neq 0$.

si ottiene da $\tilde{\omega}$ portando su ciascuna normale, a partire da Π , un segmento w , positivamente nel verso di \mathbf{N} (fissato arbitrariamente in un punto particolare, e desunto poi per continuità), negativamente nel verso opposto. Con questo significato di w , si ha la rappresentazione parametrica di una generica superficie parallela ponendo

$$(3) \quad \mathbf{P} = \Pi + w\mathbf{N}.$$

Le superficie della famiglia sono caratterizzate dalla equazione $w = \text{cost.}$ Ove si volesse ricavare w in funzione di x, y, z , basterebbe proiettare la (3) sugli assi ed eliminare u, v (che compariscono pel tramite di Π e di \mathbf{N}) fra le tre equazioni. Ma questo non è necessario pel nostro scopo.

È invece essenziale interpretare le tre equazioni scalari, che equivalgono alla (3), come formule di trasformazione fra le coordinate cartesiane x, y, z di \mathbf{P} e le tre quantità u, v, w . Per il quadrato dell'elemento lineare

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\mathbf{P} \times d\mathbf{P},$$

si ricava dalla (3) l'espressione

$$ds^2 = (d\Pi + w d\mathbf{N} + \mathbf{N}dw) \times (d\Pi + w d\mathbf{N} + \mathbf{N}dw).$$

Ricordando che

$$ds_1^2 = d\Pi \times d\Pi$$

è la *prima* forma fondamentale della superficie di partenza $\tilde{\omega}$, $(ds^2)_{w=0}$, che

$$ds_2^2 = d\Pi \times d\mathbf{N}$$

è la così detta *seconda* forma fondamentale della stessa $\tilde{\omega}$, che

$$ds_3^2 = d\mathbf{N} \times d\mathbf{N}$$

è la *terza* forma fondamentale, e che $\mathbf{N} \times d\Pi = 0$ (per essere \mathbf{N} normale), $\mathbf{N} \times d\mathbf{N} = 0$ (per essere \mathbf{N} unitario), rimane

$$(4) \quad ds^2 = ds_1^2 + 2w ds_2^2 + w^2 ds_3^2 + dw^2,$$

dove le forme quadratiche ds_1^2, ds_2^2, ds_3^2 dipendono esclusivamente dalle coordinate u, v e loro differenziali, *ma non da w* . Per rendere esplicito il ds^2 , relativo alle tre coordinate curvilinee u, v, w conviene scegliere le *due* coordinate u, v sulla superficie di partenza $\tilde{\omega}$ in quel modo che meglio si presta alla simultanea semplificazione di ds_1^2, ds_2^2, ds_3^2 , ed è classicamente quello di assumere come linee coordinate su $\tilde{\omega}$ le linee di curvatura, che sono univocamente determinate, a meno che non si tratti di una sfera o di un piano, casi questi da cui possiamo senz'altro prescindere perchè riportano a tipi elementari ben noti di famiglie isoparametriche (sfere concentriche o piani paralleli).

Anche prima di esplicitare la (4), possiamo (dalla duplice circostanza che non vi appariscono termini rettangolari in $du dw$, $dv dw$ e che il coefficiente di dw^2 è l'unità) desumerne che il parametro $\Delta_1 w$ della funzione w , calcolato con referenza all'espressione del ds^2 in coordinate u, v, w , è effettivamente eguale all'unità ⁽¹⁾.

Assumiamo oramai come linee u, v sulla \mathfrak{W} le sue linee di curvatura e indichiamo con ω_1 e ω_2 (che sono a ritenersi in generale funzioni di u, v) le curvature principali: ω_1 curvatura della linea su cui varia la sola u ($v = \text{cost.}$); ω_2 della linea v ($u = \text{cost.}$).

Si hanno allora per ds_1^2, ds_2^2, ds_3^2 le note forme canoniche (cfr. per es. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 3^a ediz., 1922, vol. I, p. 225, nota),

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= E du^2 + G dv^2, \\ ds_2^2 &= -(E \omega_1 du^2 + G \omega_2 dv^2), \\ ds_3^2 &= E \omega_1^2 du^2 + G \omega_2^2 dv^2, \end{aligned}$$

e con ciò la (4) diviene

$$(5) \quad ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + dw^2,$$

dove

$$(6) \quad H_1^2 = E (1 - 2 \omega_1 w + \omega_1^2 w^2),$$

$$(7) \quad H_2^2 = G (1 - 2 \omega_2 w + \omega_2^2 w^2).$$

E e G, al pari di ω_1, ω_2 , sono funzioni di u, v , le quali, per il loro significato, non sono tra loro indipendenti, ma debbono soddisfare alle tre equazioni di Codazzi e di Gauss, notoriamente caratteristiche perchè quattro funzioni E, G, ω_1, ω_2 abbiano il significato supposto.

Passeremo tra un momento a prenderle in considerazione. Intanto conviene esprimere la seconda condizione (2) della nostra questione, cioè che $\Delta_2 w$ deve dipendere dalla sola w (non anche da u, v).

Il calcolo di $\Delta_2 w$ si fa immediatamente riferendosi alla forma (5) del ds^2 . Esso dà, essendo il ds^2 ortogonale e le derivate di w (rapporto ad u, v, w) eguali a 0, 0, 1,

$$\Delta_2 w = \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial (H_1 H_2)}{\partial w} = \frac{\partial \log H_1}{\partial w} + \frac{\partial \log H_2}{\partial w}.$$

(1) Ciò si può del resto verificare direttamente già sulle (3). Basta ricordare che la distanza normale fra due superficie della famiglia $w = \text{cost.}$, il cui parametro differisca di dw è data, in generale, da $dN = \frac{dw}{\sqrt{\Delta_1 w}}$. A norma delle (3), dN non è altro che dw ; perciò $\Delta_1 w = 1$, c. d. d.

Attese le (6) e (7), risulta

$$-\Delta_2 w = \frac{\omega_1 (1 - \omega_1 w)}{1 - 2 \omega_1 w + \omega_1^2 w^2} + \frac{\omega_2 (1 - \omega_2 w)}{1 - 2 \omega_2 w + \omega_2^2 w^2} = \\ = \omega_1 + \omega_2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2) w + \dots,$$

immaginando di sviluppare il secondo membro per potenze di w .

La (2) richiede che $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1^2 + \omega_2^2$ e così tutti gli altri coefficienti, che sono *a priori* funzioni di u, v , si riducano a costanti. Dall'esserlo $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1^2 + \omega_2^2$ segue che lo sono separatamente ω_1 e ω_2 , e questo d'altra parte basta perchè $\Delta_2 w$ riesca dipendente dalla sola w . In conclusione, il voluto comportamento del parametro differenziale secondo richiede che *entrambe le curvature principali* ω_1, ω_2 *della superficie di partenza siano costanti*; e non più. Ma è il momento di far intervenire le già accennate equazioni di Codazzi e di Gauss.

Tali equazioni in numero di tre, in quanto riferite alle linee di curvatura u e v , ove si ponga per brevità

$$(8) \quad E = \varphi_1^2, \quad G = \varphi_2^2,$$

e si tenga conto che, nel caso presente, ω_1 e ω_2 vanno riguardate costanti, si possono scrivere (BIANCHI, loc. cit., p. 181)

$$(9) \quad \begin{cases} \omega_1 \frac{\partial}{\partial v} (\varphi_1) = \frac{\omega_2}{\varphi_2} \frac{\partial}{\partial v} (\varphi_1 \varphi_2) \\ \omega_2 \frac{\partial}{\partial u} (\varphi_2) = \frac{\omega_1}{\varphi_1} \frac{\partial}{\partial u} (\varphi_1 \varphi_2) \end{cases} \quad (\text{Codazzi}),$$

$$(10) \quad \omega_1 \omega_2 \varphi_1 \varphi_2 + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\varphi_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\varphi_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) = 0 \quad (\text{Gauss}).$$

Dividiamo la prima delle (9) per φ_1 , la seconda per φ_2 . Ponendo per brevità di scrittura

$$(11) \quad \varphi_1 = e^{\psi_1}, \quad \varphi_2 = e^{\psi_2}; \quad \delta = \omega_2 - \omega_1,$$

esse divengono

$$\delta \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial v} + \omega_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial v} = 0$$

$$\omega_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial u} - \delta \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial u} = 0$$

che, integrate, porgono

$$\delta \cdot \psi_1 + \omega_2 \psi_2 = \log U,$$

$$\omega_1 \psi_1 - \delta \cdot \psi_2 = \log V,$$

dove U e V designano funzioni della sola u e della sola v rispettivamente. Passando dai logaritmi ai numeri e tenendo conto delle (11), risulta

$$(9') \quad \varphi_1^{\delta} \varphi_2^{\omega_2} = U \quad , \quad \varphi_1^{\omega_1} \varphi_2^{-\delta} = V.$$

In queste possiamo ritenere $\delta \neq 0$. Infatti l'ipotesi opposta implicherebbe l'eguaglianza delle due curvatures principali ω_1, ω_2 della superficie di partenza $\tilde{\omega}$, il che, dato che ds_1^2 e ds_2^2 sono state già ridotte entrambe a forma ortogonale, porta a $ds_2^2 = \omega ds_1^2$, ossia [BIANCHI, loc. cit., p. 188] alla conclusione che $\tilde{\omega}$ è piano o sfera. E noi già abbiamo escluso i casi di piani paralleli e di sfere concentriche.

Dacchè δ è diverso da zero, un cambiamento di parametri delle linee coordinate permette di rendere $U = V = 1$. Infatti consideriamo per fissare le idee la U , e notiamo che, sostituendo al posto di u un nuovo parametro u^* , tale che $u = \alpha(u^*)$ (con α funzione arbitraria dell'argomento indicato), si ha $du = \alpha' du^*$ e quindi la φ_1 diviene $\varphi_1^* = \varphi_1 \alpha'^2$. Basta quindi assumere $\alpha'^2 = U$, perchè la prima delle (9'), riferita alle nuove variabili, si riduca alla forma $\varphi_1^{*\delta} \varphi_2^{\omega_2} = 1$; analogamente per V .

Dalle (9') scende pertanto

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 1,$$

il che da un lato mostra che il ds_1^2 della superficie di partenza $\tilde{\omega}$ ammette la forma euclidea (riferita a coordinate cartesiane)

$$ds_1^2 = du^2 + dv^2,$$

e dall'altro che l'equazione (10) di Gauss si riduce a

$$\omega_1 \omega_2 = 0.$$

Ne consegue che la superficie $\tilde{\omega}$ è sviluppabile, e che, designando per esempio con $u = \text{cost}$ le generatrici rettilinee (di cui dv rappresenta necessariamente l'arco),

$$\omega_2 = 0.$$

Consideriamo dapprima i casi in cui la sviluppabile si riduce a un cono, ovvero ad un cilindro. Il primo è da escludere perchè le generatrici rettilinee, anche nello sviluppo, sono concorrenti in un punto a distanza finita, e non possono quindi costituire linee coordinate di un sistema cartesiano, che sono rette parallele. Ciò accade invece nel secondo caso. Le curve $v = \text{cost}$ sono segnate sul cilindro dai piani ortogonali alle generatrici. La condizione $\omega_1 = \text{cost} \neq 0$ richiede allora che si tratti di cerchi eguali, e si è in definitiva condotti a una famiglia di cilindri circolari coassiali. L'ipotesi che anche ω_1 si annulli porta ancora a fasci di piani paralleli.

Resta da vedere se esistono altre sviluppabili, di cui le linee u ($v = \text{cost}$) abbiano una curvatura ω_1 costante (non nulla). Possiamo intanto ritenere che lo spigolo di regresso sia una curva propria, avendo ora esaminato il caso in cui le generatrici rettilinee concorrono in un unico punto a distanza finita (cono) o infinita (cilindro). Naturalmente, va pure escluso il caso di uno spigolo di regresso piano, perchè allora la sviluppabile si ridurrebbe ad un piano, e si ricadrebbe sulle famiglie di piani paralleli.

Partiamoci dunque dall'equazione parametrica di una curva gobba

$$Q = Q(v),$$

e indichiamone al solito con $\mathbf{t}(v)$, $\mathbf{n}(v)$, $\mathbf{b}(v)$ i versori principali. Ponendo

$$\Pi(u, v) = Q(v) + u \mathbf{t}(v),$$

si ha l'equazione parametrica di una sviluppabile, di cui $Q = Q(v)$ costituisce lo spigolo di regresso: la seconda coordinata u rappresenta manifestamente l'arco di una generica generatrice a partire dallo spigolo di regresso.

Essendo

$$d\Pi = \left(\frac{dQ}{dv} + u \frac{d\mathbf{t}}{dv} \right) dv + \mathbf{t} du = \mathbf{t} du + \{ \mathbf{t} + c(v) u \cdot \mathbf{n} \} dv$$

$\{ c(v) \}$ curvatura della curva $Q = Q(v)$, si ha

$$ds_1^2 = d\Pi \times d\Pi = du^2 + 2 du dv + (1 + c^2 u^2) dv^2.$$

Siccome la normale alla sviluppabile $\Pi = \Pi(u, v)$ in un punto generico (u, v) è parallela alla binormale dello spigolo di regresso nel punto corrispondente, cioè a $\mathbf{b}(v)$, si ha per la seconda forma fondamentale

$$ds_2^2 = d\mathbf{b} \times d\mathbf{b} = \left(\frac{d\mathbf{b}}{dv} \right)^2 dv^2.$$

Ora (terza formula di Frenet)

$$\frac{d\mathbf{b}}{dv} = \tau(v) \mathbf{t},$$

$\tau(v)$ indicando la torsione dello spigolo di regresso. Si ricava quindi per ds_2^2 l'espressione (degenere, trattandosi di una sviluppabile)

$$ds_2^2 = \tau^2 dv^2.$$

L'equazione quadratica in ω , che definisce le due curvature principali ω_1 ed ω_2 della nostra sviluppabile, si riduce in conformità a

$$\begin{vmatrix} -\omega & -\omega \\ -\omega & \tau^2 - (1 + c^2 u^2) \omega \end{vmatrix} = 0,$$

ossia a

$$\omega (c^2 u^2 \omega - \tau^2) = 0.$$

Si ha quindi una radice nulla, come dev'essere, e che noi già abbiamo chiamata ω_2 . La ω_1 rimane definita dalla equazione di primo grado

$$c^2 (v) \cdot u^2 \cdot \omega_1 - \tau^2 (v) = 0.$$

Abbiamo* supposto $\tau (v)$ non identicamente nullo (curva gobba); l'equazione testè scritta esclude che ω_1 possa ridursi ad una costante.

Rimane così provato che le famiglie di superficie $w = \text{cost}$, per cui entrambi i parametri differenziali $\Delta_1 w$ e $\Delta_2 w$ si mantengono costanti sopra ogni superficie della famiglia, si riducono ai tre tipi ben noti: a) piani paralleli, b) sfere concentriche; c) cilindri circolari coassiali.

Chimica (Elettrochimica). — *Sulle escrescenze catodiche che si osservano nella raffinazione elettrolitica dello stagno* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del Corrisp. O. SCARPA.

In due Note precedenti ⁽³⁾ ho dato notizie di alcune singolari forme di escrescenze che talvolta si osservano nella raffinazione elettrolitica industriale del rame molto impuro. Fenomeni analoghi furono da me osservati nelle prove intraprese per ricercare le migliori condizioni che si debbono realizzare per raffinare elettroliticamente lo stagno partendo da anodi di stagno molto impuri per piombo (circa il 20 %) e contenenti rame e antimonio in quantità variabile (dell'ordine di 1 a 2 %).

È noto che dalla elettrolisi delle soluzioni di molti composti dello stagno (ad esempio da quella degli stannati alcalini) non si ottiene, nelle usuali condizioni in cui viene effettuata la estrazione e la raffinazione dello stagno, del metallo compatto ma bensì depositi spugnosi che richiedono speciali accorgimenti per la successiva fusione. In alcuni brevetti è detto che dalla elettrolisi di soluzioni solforiche si ottengono invece depositi compatti che possono raggiungere notevoli spessori.

L'esperienza mi ha però dimostrato che pur operando nelle condizioni indicate, ciò non sempre si ottiene, ma, anche per effetto di cause che sovente sfuggono alla ricerca, i depositi catodici risultano talvolta spugnosi, oppure aghiformi, oppure arborescenti.

Di questi fatti ho dato notizia sommaria in altra pubblicazione ⁽⁴⁾. Particolarmente interessante mi è sembrato lo studio delle escrescenze cato-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica del R. Politecnico di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 5 dicembre 1937.

(3) Questi « Rendiconti », vol. XXV, giugno 1937 e vol. XXVI, settembre 1937.

(4) « La Metallurgia Italiana », vol. XXIX, luglio 1937.



Fig. 1
Catodo di stagno con deposito fogliaceo
(grand. naturale)



Fig. 2
Cristalliti fogliacee di stagno
(ingr. ~ 3)

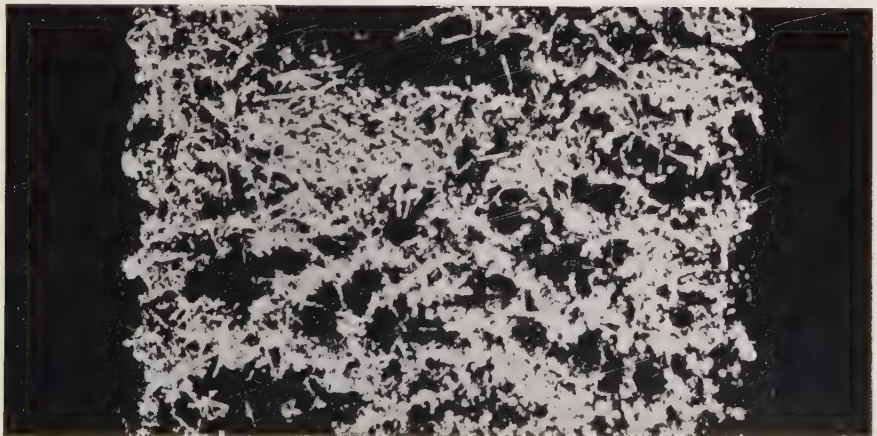


Fig. 3
Catodo di stagno con deposito aghiforme e arborente



Fig. 4
Cristallite arborescente di stagno
(Ingr. ~ 3)

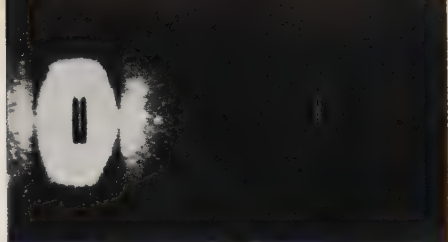


Fig. 5
Porzione dello spettro Debye del gambo
della cristallite di figura 4.

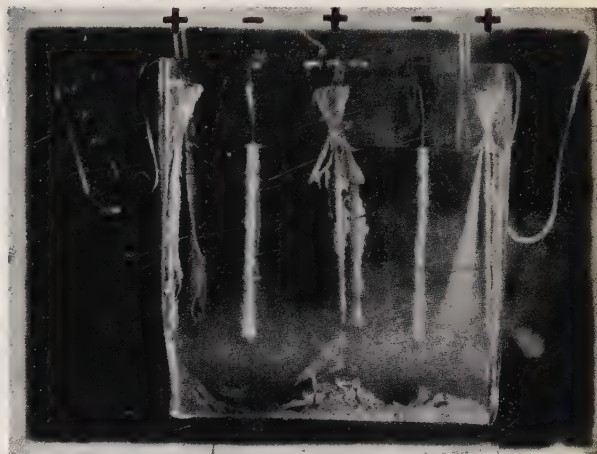


Fig. 6
Cella per elettrolisi. (esp. di Laboratorio) con anodi
di stagno impuri per piombo ($1/3$ circa del naturale)

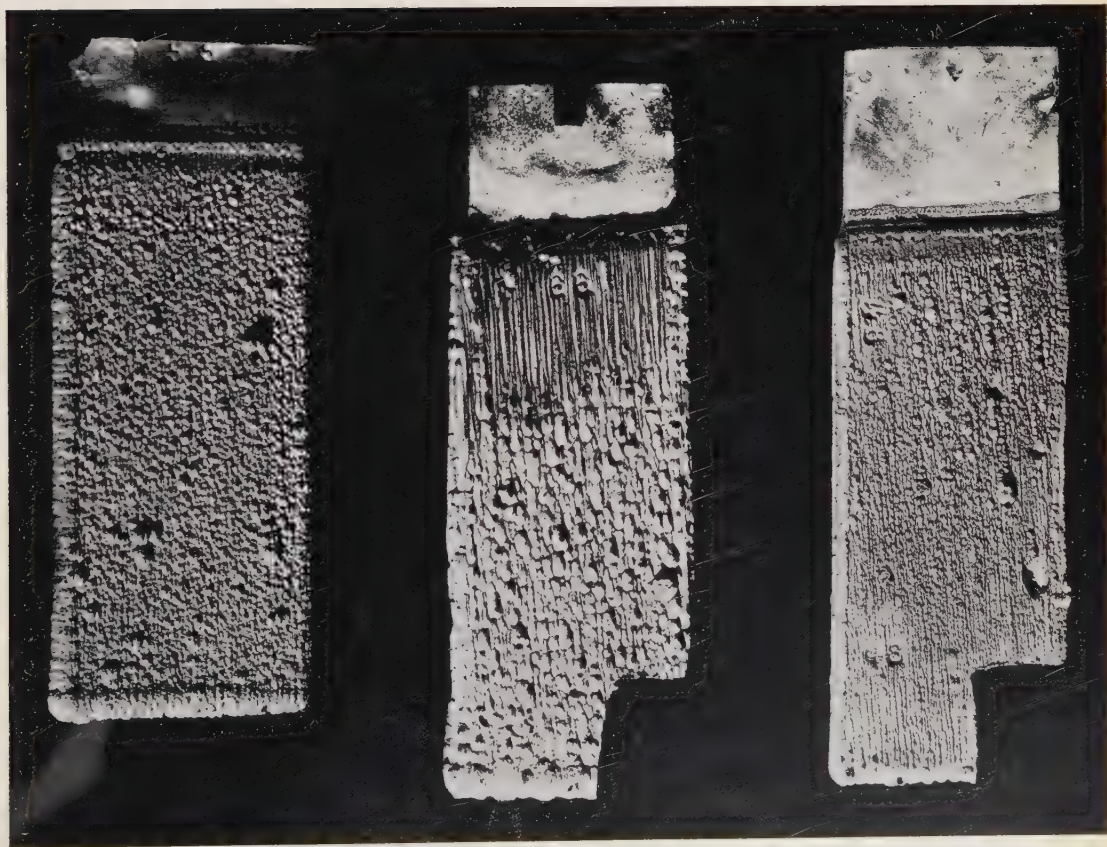


Fig. 7

diche dello stagno, anche per decidere se, alcune almeno, sono realmente dei cristalli unici come ne hanno l'apparenza. Per quanto mi è noto, nessuna ricerca del genere è ancora stata eseguita. Perciò, come già nel caso del rame, ho fatto rilevare dall'ing. V. Montoro alcuni röntgenogrammi che permettono di chiarire la questione.

I casi più interessanti sono i seguenti:

Talvolta le escrescenze catodiche dello stagno assumono la forma di foglie (fig. 1) che dipartono dal catodo in direzione pressochè normale alla sua superficie⁽¹⁾. La fig. 2 (ingrandimento 3) mostra che queste cristalliti fogliacee sono formate dalla aggregazione di numerosi cristalli ben sviluppati.

Completamente differenti sono le formazioni aghiformi di cui molte si osservano nel deposito elettrolitico della fig. 3 (ingrandimento circa 2). Avendo potuto isolare una delle maggiori di queste cristalliti, con forma di alberello (fig. 4, ingrandimento circa 3), si è ottenuto per il suo gambo uno spettrogramma Debye che mostra due righe molto corte (di cui la prima più intensa (fig. 5)) allagate nella regione equatoriale, e inoltre delle righe molto più sviluppate ma molto deboli⁽²⁾ (tanto da non concedere una fedele riproduzione tipografica) le quali, come le prime, corrispondono perfettamente a righe che si osservano ben nette nello spettrogramma Debye ricavato operando con polvere ottenuta dallo stesso stagno.

Lo sviluppo molto limitato (localizzato) che posseggono le due righe più corte, condurrebbe ad ammettere una orientazione preferenziale dei cristallini, di ordine così elevato da poter far considerare il tratto della cristallite come parte di un cristallo unico; ma la coesistenza nello stesso spettrogramma di righe molto più sviluppate (una, sebbene debolissima, sembra completa) conduce a ritenere che oltre a cristallini possedenti un grado elevatissimo di orientamento preferenziale, esistono cristallini con orientamento disordinato. L'insieme non può quindi essere considerato, nemmeno in questo caso, come un cristallo unico⁽³⁾.

La fig. 6 mostra (attraverso alle pareti di vetro della vaschetta nella quale si effettuava l'elettrolisi nelle prove di laboratorio) la abbondantissima formazione di fango anodico (formato essenzialmente di solfato di piombo) e il conseguente sfogliamento degli anodi impuri (si vedono nella figura tre

(1) Le macrografie furono eseguite dall'ing. V. Montoro che pubblicamente ringrazio.

(2) Malgrado la posa di sei ore (anticado di ferro). È da ricordare che l'esame delle escrescenze filamentose fu fatto mantenendole in rotazione attorno al loro asse.

(3) Le suddette righe debolissime sono forse dovute a cristallini di stagno, senza orientazione preferenziale, che rivestono la parte più nettamente fibrosa della escrescenza. Questa parte potrebbe essere costituita da un cristallo unico, o, più probabilmente, di un aggregato di cristalli con orientazione preferenziale di grado elevatissimo.

Si può anche osservare che le due righe corte, notevolmente più intense, se vengono esaminate più minutamente, appaiono costituite ognuna da due tratti allineati, il che induce a pensare che esse corrispondono a insiemi di aggregati cristallini aventi due diversi orientamenti preferenziali di grado elevatissimo.

anodi e due catodi). I catodi che si vedono di traverso nella fig. 6 sono quelli per i quali si sono ottenuti (regolando opportunamente la densità di corrente, la temperatura ecc. e scegliendo opportuni agenti di addizione) i depositi di stagno compatteggianti di cui la fig. 7 dà un esempio per tre casi diversi. Tale stagno catodico compatto contiene (malgrado le grandi impurezze degli anodi) appena 0,01 % di ferro e 0,06 % di piombo, cioè è comparabile allo stagno delle migliori marche germaniche; ma prendendo opportune precauzioni onde impedire alle particelle di fango anodico di cadere sui catodi, si arriva a titoli comparabili a quelli dello stagno di ancor maggiore purezza.

* * *

Il fatto che in nessuno dei casi esaminati ⁽¹⁾ (tanto nella elettrodeposizione del rame quanto in quella dello stagno) le escrescenze catodiche sono cristalli unici, ma consistono di aggregati cristallini che soltanto in alcuni casi hanno un orientamento preferenziale di grado molto elevato, e l'osservazione per cui le escrescenze catodiche in genere, in particolare quelle filiformi, si accrescono in modo irregolare, e quelle filiformi hanno accrescimenti con andamenti complicatissimi talvolta spiraliformi (fig. 8) ⁽²⁾ e, in certe porzioni, addirittura retrocedono rispetto al senso positivo del campo elettrico, debbono essere esaminati anche rispetto alle ipotesi che riguardano il modo con cui avviene la elettrodeposizione dei metalli.

Secondo l'ipotesi più comunemente accettata, l'accrescimento dei depositi galvanici avverrebbe per trasporto di ioni direttamente sul catodo, ove verrebbero neutralizzati e andrebbero direttamente ad occupare posti corrispondenti ai nodi del reticolo cristallino. Si dovrebbero perciò generare dei cristalli unici, ove condizioni speciali non venissero ad alterare i fenomeni ⁽³⁾.

Secondo un'altra ipotesi la scarica degli ioni metallici avverrebbe invece nello strato di passaggio elettrodo-elettrolita, con conseguente formazione di granuli metallici (secondo alcuni di granuli colloidali) i quali verrebbero poi depositati per azioni elettro-osmotiche sulla superficie del catodo, generandone l'accrescimento. In tale ipotesi essendo casuale l'orientamento

(1) I casi qui citati corrispondono all'impiego di anodi molto impuri, e quindi sono da tener presenti le possibili azioni delle sostanze che allo stato di soluzione o di sospensione colloidale o pseudocolloidale vanno ad inquinare l'elettrolita. Tuttavia non è da dimenticare che tutti i depositi catodici da me studiati posseggono un elevato grado di purezza. Fra le impurezze contenute negli anodi di cui la precedente Nota (questi « Rendiconti », settembre a. c.) è da ricordare in modo speciale anche il silicio.

(2) Nella figura 8 è rappresentato un caso tipico di escrescenza spiraliforme di rame elettrolitico.

(3) È noto che le cristalliti, il cui insieme costituisce la parte massiccia del deposito galvanico, sono generalmente impiantate in direzione normale alla superficie del catodo e la loro base corrisponde ai grani della matrice. Si deve anche ricordare che gli ioni metallici sono, in soluzione, più o meno idratati, e quindi debbono subire la disidratazione prima di entrare a far parte del reticolo nel metallo.

dei germi, l'orientamento preferenziale dei cristallini può mancare o essere scarsissimo.

Nel caso di ioni metallici polivalenti è inoltre da tener presente che la loro neutralizzazione può avvenire per gradi, ragione per cui, ad esempio nel caso degli ioni rameici, si avrebbe una prima formazione di ioni rameosi e quindi la possibilità di formazione di germi cristallini di rame anche per effetto della reazione: $2 \text{Cu}^+ = \text{Cu}^{++} + \text{Cu}$, che tende a ristabilire l'equilibrio fra ioni rameosi e ioni rameici.



Fig. 8 — Escrescenze spiraliformi di rame elettrolitico.

È superfluo aggiungere che ambedue le dette ipotesi, nonchè la sopracitata considerazione, non contrastano affatto le leggi di Faraday. La considerazione sopracitata dà però ragione della formazione catodica di polverino di rame, che si osserva operando l'elettrolisi delle soluzioni acquose dei sali di rame (solfato e cloruro) operando in opportune condizioni; per effetto della quale il rendimento apparente della elettrolisi risulta talvolta minore dell'unità.

Conclusione: Il fatto per cui le escrescenze catodiche non sono generalmente cristalli unici, e in alcuni casi il grado di orientazione preferenziale dei cristallini manca quasi completamente, mentre in altri è notevole e in altri infine è altissimo, e la osservazione per cui non è escluso che le parti più interne delle escrescenze filiformi sieno, almeno in alcuni casi, cristalli unici, conduce a ritenere che l'accrescimento catodico può avvenire seguendo parzialmente l'una, e parzialmente l'altra ipotesi. Alle forme bizzarre che si osservano nelle escrescenze filiformi debbono contribuire anche i moti convettivi dell'elettrolita, ma la causa per cui le escrescenze catodiche assumono talvolta le apparenze spiraliformi da me osservate rimane tutt'ora ignota.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Su una classe di funzioni convesse.* Nota di P. VINCENSINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. FUBINI.

1. Le funzioni in considerazione sono le funzioni d'appoggio di Minkowski dei corpi convessi dello spazio euclideo ad n dimensioni: funzioni convesse, nulle nell'origine, positivamente omogenee e di grado uno. L'espressione *positivamente omogenee* significa, come si sa, che si ha

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = tf(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

soltanto per i valori positivi di t .

Ci proponiamo in questa Nota, di mostrare come tutte le funzioni della classe indicata, che godono della proprietà d'essere continue e d'ammettere derivate parziali fino al terzo ordine (funzioni il cui insieme denoteremo (6)), possono essere ottenute per mezzo delle sole funzioni che verificano l'una o l'altra di due equazioni funzionali determinate (equazioni (3) e (4) del n. 3).

2. In una Nota dei « Comptes rendus de l'Académie des Sciences » ⁽²⁾, abbiamo mostrato la possibilità di costruire tutti i corpi convessi dello spazio ad n dimensioni, almeno se ci limitiamo alla considerazione dei corpi le cui frontiere ammettono in ogni punto $n - 1$ raggi principali di curvatura determinati, per mezzo dei soli corpi convessi dell'uno o dell'altro dei due insiemi seguenti:

1° i corpi convessi dotati di un centro di simmetria;

2° i corpi convessi di larghezza costante.

Denotiamo con kC ($k > 0$) il corpo dedotto da un corpo convesso C mediante una omotetia di rapporto k , e con $C \pm C'$ il corpo somma (o differenza) di due corpi convessi C e C' . Se H e H' sono le distanze dell'origine O da due iperpiani tangenti paralleli ed ugualmente situati di C e C' , $C + C'$ è il corpo definito dalla distanza $H + H'$, e $C - C'$ è quello definito da $H - H'$. $C + C'$ è sempre convesso; $C - C'$ può essere o no convesso.

Se ci riportiamo alla Nota citata (che ci proponiamo di sviluppare in un lavoro ulteriore), vediamo facilmente che l'espressione

$$(1) \quad C' = 2k'D' + \frac{k}{2}D - kC,$$

(1) Nella seduta del 5 dicembre 1937.

(2) « Comptes Rendus », 204, p. 1609, 1937.

ove C è un *qualsiasi* corpo di larghezza costante uguale a 1, D una sfera di raggio 1, e D' un *qualsiasi* corpo convesso centrato, rappresenta, a meno di un'omotetia, il corpo convesso più generale dello spazio a n dimensioni (la cui frontiera è dotata, in ogni punto, di $n - 1$ raggi principali di curvatura), purchè k sia un *qualsiasi* numero positivo minore dell'unità, k' essendo scelto in guisa da superare $\frac{r_M}{r'_m}$, r_M e r'_m essendo il massimo raggio principale di curvatura sulla frontiera di C o rispettivamente il minimo raggio di curvatura su quella di D' .

Se teniamo conto di ciò che, per un qualsiasi corpo di larghezza costante $d = 1$ dello spazio ad n dimensioni, la somma dei raggi principali di curvatura in due qualsiasi punti opposti della frontiera uguaglia $n - 1$ ⁽¹⁾, vediamo che $r_M < n - 1$; ne segue che, affinchè la condizione sopra enunciata per k' sia verificata, basta prendere

$$(2) \quad k' > \frac{n - 1}{r'_m}.$$

3. Ogni funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dell'insieme (\mathcal{E}) che gode delle proprietà indicate al n. 1, può essere considerata come la funzione d'appoggio di Minkowski di un corpo convesso dello spazio a n dimensioni; denotiamo con (\mathcal{e}) l'insieme di questi corpi.

L'insieme (\mathcal{E}) si ottiene dunque (a meno di un fattore costante per ogni funzione), ponendo nel secondo membro di (1), 1 (funzione d'appoggio della sfera unitaria) al posto di D , (Θ) (funzione d'appoggio di un corpo arbitrario di larghezza 1) al posto di C , e (Φ) (funzione d'appoggio di un corpo convesso centrato arbitrario) al posto di D' . È bene inteso che i corpi C e D' sono arbitrari soltanto nell'insieme (\mathcal{e}) .

(Θ) e (Φ) verificano le equazioni funzionali

$$(3) \quad \Theta(x_1, x_2, \dots, x_n) + \Theta(-x_1, -x_2, \dots, -x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

o rispettivamente

$$(4) \quad \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Phi(-x_1, -x_2, \dots, -x_n) = 0.$$

Se dunque si ha riguardo alla

$$(5) \quad \mathcal{H} = 2 k' \Phi + k \left(\frac{1}{2} - \Theta \right),$$

ove Θ e Φ sono funzioni arbitrarie di (\mathcal{E}) che verificano (3) o rispettivamente (4), k è un qualsiasi numero positivo minore dell'unità, e ove k' verifica la disuguaglianza (2) relativa al corpo convesso definito dalla Φ

(1) Vedi «Comptes Rendus», 204, p. 1302, 1937.

che sta nella (5) stessa, si può dire che la \mathcal{H} definita dalla (5) è la funzione più generale dell'insieme (8) considerato.

4. La distanza dell'origine dell'iperpiano tangente nel punto generico della ipersuperficie frontiera S di un qualsiasi corpo convesso, la cui funzione d'appoggio sia Φ , è

$$H = \frac{\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}},$$

ovvero, ponendo

$$\frac{x_i}{\sqrt{\sum x_i^2}} = a_i \quad , \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1 \right)$$

$$(6) \quad H = \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

S è dunque definita tangenzialmente da

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n = H,$$

e, se si pone

$$(7) \quad \begin{cases} a_1 = \cos \varphi_1, \\ a_2 = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ \dots = \dots \dots \dots, \\ a_n = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-1}, \end{cases}$$

il ds^2 della rappresentazione sferica della S è

$$ds^2 = d\varphi_1^2 + \sin^2 \varphi_1 d\varphi_2^2 + \dots + (\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2})^2 d\varphi_{n-1}^2.$$

Con questo ds^2 e l'espressione (6) di H ove le a_i sono sostituite dalle loro espressioni (7), si può formare l'equazione $E(\rho) = 0$ che dà, in coordinate tangenziali, gli $n - 1$ raggi principali di curvatura di $S^{(1)}$.

La determinazione della quantità r'_m che, per mezzo di (2), definisce il numero k' che conviene adottare in (5) per avere una funzione \mathcal{H} dell'insieme (8), si trova così ricondotta alla determinazione del minimo di ρ (soluzione della E) sulla S .

I coefficienti di (E) contenendo le derivate parziali prime e seconde di H , e la determinazione del precedente minimo introducendo le derivate terze, che esistono come abbiamo supposto per le funzioni dell'insieme (8) considerato, si vede che la determinazione dell'insieme (8), per mezzo dei sotto-insiemi (Θ) e (Φ), non esige altro che risoluzioni di equazioni algebriche e calcoli di derivazione.

Ma, lasciando da parte le difficoltà che possono incontrarsi nella determinazione effettiva delle funzioni \mathcal{H} dell'insieme (8), la forma (5) che si può dare a qualsiasi funzione \mathcal{H} dell'insieme merita, forse, d'essere notata.

(1) Vedi L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, to. II, parte II, p. 563, 1924.

Matematica. — *L' inégalité triangulaire dans les espaces de Minkowski généralisés.* Nota di CHR. PAUC, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

\mathcal{E}_n : espace euclidien n -dimensionnel ($n > 0$); \mathcal{P}_n : espace projectif en résultant par adjonction d'un plan à l'infini \mathcal{P}_{n-1} ; \mathcal{V}_n : espace des vecteurs de \mathcal{E}_n .

Une métrique radiale μ de \mathcal{V}_n est une métrique attribuant à tout vecteur v de \mathcal{V}_n un nombre fini $\mu(v)$ tel que

$$(\lambda \geq 0) \rightarrow [\mu(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \mu(v)].$$

L'espace $(\mathcal{E}_n)_\mu$ dont les points sont ceux de \mathcal{E}_n et où, pour deux quelconques d'entre eux p, q , a été défini l'écart⁽²⁾

$$\delta(pq) = \mu(\overrightarrow{pq})$$

est appelé d'après M. Menger⁽³⁾, *espace de Minkowski généralisé*. Pour un vecteur v_ϑ de \mathcal{V}_n , non nul, de direction ϑ , le rapport

$$\frac{\mu(v_\vartheta)}{\text{longueur euclidienne de } v_\vartheta}$$

ne dépend que de ϑ : c'est le coefficient de l'écart (Abstandskoeffizient) relatif à la direction ϑ ; nous le désignons par $\gamma(\vartheta)$.

Menons par un point fixe O de \mathcal{E}_n , l'axe A_ϑ d'origine O et dont la direction positive est ϑ , et soit

$$\begin{cases} e_\vartheta = \text{point de } A_\vartheta \text{ d'abscisse } \frac{1}{\gamma(\vartheta)} \text{ si } \gamma(\vartheta) \neq 0 \\ e_\vartheta = i_\vartheta \text{ point à l'infini dans la direction } \vartheta \text{ si } \gamma(\vartheta) = 0. \end{cases}$$

L'ensemble des « points unitaires » e_ϑ pour les différentes directions ϑ de \mathcal{E}_n est la *surface d'étalonnage* $S(\mu)$ de $(\mathcal{E}_n)_\mu$ (Eichfläche); représentons par S_ϑ le segment fermé de l'axe projectif

$$T_\vartheta = A_\vartheta + \{i_\vartheta\}$$

(1) Nella seduta del 5 dicembre 1937.

(2) En général dissymétrique et d'un signe quelconque.

(3) *Ergebnisse eines math. Koll.*, Heft 8, *Variationsrechnung in euklidischen Räumen*,

que l'on obtient en le parcourant dans le sens ϑ de O à e_{ϑ} ; la réunion des S_{ϑ} pour les diverses directions ϑ de \mathcal{E}_n constitue le *corps d'étalonnage* $G(\mu)$ de $(\mathcal{E}_n)_{\mu}$ (Eichkörper).

Par *direction de linéarité* ⁽¹⁾ de $(\mathcal{E}_n)_{\mu}$, nous entendons une direction de droite Δ^* , telle que ϑ^* et $-\vartheta^*$ représentant les deux directions opposées qui lui sont parallèles

$$e_{\vartheta^*} = e_{-\vartheta^*} = e_{\Delta^*}$$

ce que équivaut à

$$\boxed{\gamma(\vartheta^*) + \gamma(-\vartheta^*) = 0}.$$

POINT DE VUE GÉOMÉTRIQUE.

THÉORÈME ⁽²⁾. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace de Minkowski généralisé satisfasse à l'inégalité triangulaire et n'admette pas de directions de linéarité est que son corps d'étalonnage soit un corps convexe de \mathcal{S}_n ⁽³⁾ contenant O à son intérieur. S est alors la frontière de G dans \mathcal{S}_n .*

THÉORÈME. — $(\mathcal{E}_n)_{\mu}$ étant un espace de Minkowski généralisé, satisfaisant à l'inégalité triangulaire et admettant des directions de linéarité Δ^* :

l'ensemble de ces Δ^ est une variété linéaire* ⁽⁴⁾,

désignons par $n(\mu)$ le nombre maximum de Δ^* indépendantes, par $\mathcal{V}_{n(\mu)}$ l'espace des vecteurs de \mathcal{V}_n parallèles à une Δ^* :

en tant qu'agissant sur les vecteurs de $\mathcal{V}_{n(\mu)}$, μ est une métrique linéaire; l'ensemble D des points unitaires e_{Δ^} est une variété linéaire de \mathcal{S}_n de dimension $n(\mu) - 1$;*

si $n(\mu) < n$, il existe une variété linéaire L de \mathcal{S}_n de dimension $n - n(\mu)$ coupant G suivant un corps convexe de \mathcal{S}_n ⁽³⁾, G , de dimension $n - n(\mu)$; si $D \text{ non } \leq \mathcal{S}_n$, il est même toujours possible de choisir L de manière que G soit un corps convexe de \mathcal{E}_n ; G peut être engendré par les droites de \mathcal{S}_n s'appuyant à la fois sur L et sur G , c'est à dire encore par les variétés linéaires $V(D, g)$ de dimension $n(\mu)$ passant par D et un point quelconque g de G . S est la frontière de G dans \mathcal{S}_n et consiste en la réunion des $V(D, g)$ pour g appartenant à la frontière de G ;

si $n(\mu) = n$, $D = S$ est un plan, $G = \mathcal{S}_n$; μ est une métrique linéaire de \mathcal{V}_n .

(1) Cfr. la définition de la « Linearitätsrichtung » et le théorème relatif pour une fonction positivement homogène convexe, p. 30 de la *Theorie der konvexen Körper* de BONNESEN et FENCHEL, Springer, 1934.

(2) Cfr. ALT, *Ergebnisse eines math. Koll.*, Heft 8, p. 33.

(3) Au sens de STEINITZ, « *Journal für die reine und angewandte Math.* », Bd. 146, p. 34.

(4) Loc. cit. in (1).

Inversement: D désignant une variété linéaire de \mathfrak{S}_n de dimension $n' - 1$ avec $n \geq n' > 0$, G un corps convexe de $\mathfrak{S}_n^{(1)}$ de dimension $n - n'$ situé dans une variété linéaire de \mathfrak{S}_n disjointe de D, G l'ensemble engendré par les droites de \mathfrak{S}_n rencontrant D et G, et O un point de \mathfrak{S}_n intérieur à G

il existe toujours une métrique radiale μ de \mathfrak{V}_n , et une seule si $n' < n$, pour laquelle $(\mathfrak{S}_n)_\mu$ satisfait à l'inégalité triangulaire et dont G est le corps d'étalonnage rapporté à O.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une métrique radiale μ de \mathfrak{V}_n soit linéaire est que $S(\mu)$ soit un plan; l'écart δ correspondant jouit de la propriété suivante qui est caractéristique

quelque soient p, q, r dans \mathfrak{S}_n : $\delta(pq) + \delta(qr) = \delta(pr)$ ⁽²⁾.

Une métrique de Minkowski généralisée quelconque δ est caractérisée par

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{pq} = \vec{p'q'}) \rightarrow \delta(pq) = \delta(p'q'). \\ \text{Propriété d'invariance à la translation} \\ [pq] \text{ désignant pour deux points quelconques } p \text{ et } q \text{ de } \mathfrak{S}_n \text{ le segment} \\ \text{fermé de } \mathfrak{S}_n \text{ les joignant} \\ r \in [pq] \rightarrow \delta(pr) + \delta(rq) = \delta(pq). \end{array} \right.$$

Une métrique de Minkowski généralisée δ est dite satisfaire à l'inégalité triangulaire au sens strict lorsque, dans les mêmes conditions

$$r \text{ non } \in [pq] \rightarrow \delta(pr) + \delta(rq) > \delta(pq).$$

THÉOREME. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace de Minkowski généralisé satisfasse à l'inégalité triangulaire au sens strict est que son corps d'étalonnage soit un corps convexe au sens strict de $\mathfrak{S}_n^{(1)}$ contenant O à son intérieur.

POINT DE VUE ANALYTIQUE.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ désignant les composantes d'un vecteur quelconque v de \mathfrak{V}_n , une métrique radiale $\mu(v) = \mu(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ est une fonction positivement homogène de $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$; la condition nécessaire et suffisante pour que $(\mathfrak{S}_n)_\mu$ satisfasse à l'inégalité triangulaire est que $\mu(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ soit une fonction convexe ⁽³⁾.

(1) Loc. cit. in (3) a p. 370.

(2) En définissant une métrique linéaire comme une métrique jouissant de cette propriété, on obtient une définition applicable aux espaces métriques généraux qui permet entre autres l'introduction et l'étude des formes de Pfaff dans ces espaces.

(3) BONNESEN et FENCHEL, loc. cit., p. 18.

THÉOREME. — $\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ étant une fonction définie et continue sur un ensemble convexe E de \mathcal{E}_n , admettant sur cet ensemble des dérivées premières et secondes continues, sauf au plus pour les points d'un ensemble dénombrable D , la condition nécessaire et suffisante pour que ψ soit convexe est qu'en tout point $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ de E , n'appartenant pas à D , la forme quadratique en $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$

$$\sum_{i,j=1}^n \tau_i \cdot \tau_j \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \cdot \partial \xi_j}$$

soit non négative ⁽¹⁾.

Par conséquent $\mu(v) = \mu(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ étant une métrique radiale de \mathcal{W}_n , telle que la fonction $\mu(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ possède en tout point $\neq (0, 0, \dots, 0)$ des dérivées premières et secondes continues, nous savons reconnaître analytiquement si $(\mathcal{E}_n)_\mu$ satisfait à l'inégalité triangulaire. De la positive homogénéité de μ résulte entre les dérivées du premier ordre de μ la relation

$$\xi_1 \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \xi_1} + \xi_2 \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \xi_2} + \dots + \xi_n \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \xi_n} = 0$$

et entre les dérivées du second ordre les n relations

$$\xi_1 \cdot \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi_1 \cdot \partial \xi_i} + \xi_2 \cdot \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi_2 \cdot \partial \xi_i} + \dots + \xi_n \cdot \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi_n \cdot \partial \xi_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Lorsque $n = 2$ une conséquence de ces dernières est que

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi_1^2}, \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi_1 \cdot \partial \xi_2}, \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi_2^2}$$

d'une part, $\xi_2^2, -\xi_1 \cdot \xi_2, \xi_1^2$ d'autre part sont proportionnels, plus exactement qu'il existe une fonction $\mu_1(\xi_1, \xi_2)$ définie pour $(\xi_1, \xi_2) \neq (0, 0)$ telle que

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi_1^2} = \xi_2^2 \cdot \mu_1 \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi_1 \cdot \partial \xi_2} = -\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \mu_1 \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi_2^2} = \xi_1^2 \cdot \mu_1$$

et alors la condition nécessaire et suffisante pour que $(\mathcal{E}_2)_\mu$ vérifie l'inégalité triangulaire est que

$$\mu_1 \geq 0.$$

Si plus particulièrement $\mu_1 > 0$, $(\mathcal{E}_2)_\mu$ vérifie l'inégalité triangulaire au sens strict.

L'étude des formes que peuvent présenter $G(\mu)$ et $S(\mu)$ correspondant à une métrique radiale $\mu(v) = \mu(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ se simplifie lorsqu'on

(1) Ce théorème est la généralisation du théorème de BONNESEN et FENCHEL (loc. cit., p. 19) sur les fonctions convexes qui suppose D vide; ce dernier est inapplicable à une fonction positivement homogène $\mu(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ car sauf le cas où elle est linéaire, elle n'admet pas de dérivées premières au point $(0, 0, \dots, 0)$.

suppose que $\mu(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ admet, sauf peut être au point $(0, 0, \dots, 0)$ des dérivées premières; deux cas seulement peuvent se présenter

$$\begin{aligned} n(\mu) = 0 \quad \text{quelque soit } \vartheta \quad \gamma(\vartheta) + \gamma(-\vartheta) > 0 & \quad \text{Cas normal} \\ n(\mu) = n \quad \text{quelque soit } \vartheta \quad \gamma(\vartheta) + \gamma(-\vartheta) = 0 & \quad \text{Cas linéaire.} \end{aligned}$$

APPLICATIONS DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS AU CALCUL DES VARIATIONS.

Soit $\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n)$ un intégrant au sens du Calcul des Variations⁽¹⁾ c'est à dire une fonction

définie pour les points $p = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ d'un ensemble $P \subseteq \mathcal{E}_n$ et en chacun d'eux pour tout $(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$

positivement homogène en $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$.

A chaque point p de P correspond un espace de Minkowski généralisé $(\mathcal{E}_n)_{\varphi p}$ ⁽²⁾ où l'écart $\delta_{\varphi p}$ de deux points de \mathcal{E}_n $q = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ $r = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ est défini par

$$\begin{cases} \delta_{\varphi p}(qr) = \varphi(p; \zeta_1 - \eta_1, \zeta_2 - \eta_2, \dots, \zeta_n - \eta_n) & \text{si } q \neq r \\ \delta_{\varphi p}(qr) = 0 & \text{si } q = r \end{cases}$$

nous désignons par $S_{\varphi p}$ ⁽³⁾ et $G_{\varphi p}$ respectivement la surface et le corps d'étalonnage de $(\mathcal{E}_n)_{\varphi p}$ rapportés à $p \cdot \varphi$ est dit *quasi-régulier en p* ⁽⁴⁾ si $(\mathcal{E}_n)_{\varphi p}$ satisfait à l'inégalité triangulaire, quasi-régulier sans plus s'il est quasi-régulier en tout point p de P ; de même φ est dit *régulier en p* si $(\mathcal{E}_n)_{\varphi p}$ satisfait à l'inégalité triangulaire au sens strict, régulier sans plus s'il est régulier en tout point p de P .

L'étude qui a été faite permet de reconnaître géométriquement ou analytiquement si un intégrant est quasi-régulier ou régulier. En particulier dans le cas $n = 2$, si $\varphi(\xi_1, \xi_2; \xi'_1, \xi'_2)$ possède en tout point $p = (\xi_1, \xi_2)$ de P des dérivées partielles continues jusqu'au second ordre en ξ'_1, ξ'_2 , la condition nécessaire et suffisante pour que φ soit quasi-régulier est que la fonction de Legendre⁽⁵⁾ $\varphi_1(\xi_1, \xi_2; \xi'_1, \xi'_2)$ soit constamment ≥ 0 ; si dans les mêmes conditions φ_1 est toujours > 0 , φ est certainement régulier.

(1) BOLZA, *Vorlesungen über Variationsrechnung*, Teubner, 1933, pp. 193-194.

(2) Menger, *Ergebnisse eines math. Koll.*, Heft. 8, p. 8 et p. 25.

(3) $S_{\varphi p}$ est l'indicatrice de φ en p au sens de Caratheodory.

(4) Menger, *Ergebnisse eines math. Koll.*, Heft 8, p. 9.

(5) $\varphi_1 = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1'^2}}{\xi_2'^2} = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1' \cdot \partial \xi_2'}}{-\xi_1' \cdot \xi_2'} = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2'^2}}{\xi_1'^2}$ si $\xi_1' \neq 0, \xi_2' \neq 0$, $\varphi_1 = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2'^2}}{\xi_1'^2}$ si $\xi_1' \neq 0, \xi_2' = 0$,

$\varphi_1 = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1'^2}}{\xi_1'^2}$ si $\xi_1' = 0, \xi_2' \neq 0$. Voir BOLZA, loc. cit., pp. 193-194.

Représentons par $\varphi(p; \vartheta)$ le coefficient de l'écart dans $(\mathcal{E}_n)_{\varphi p}$ correspondant à la direction ϑ et par $\chi(p)$ la fonction de Menger ⁽¹⁾ définie par

$$\chi(p) = \min_{\vartheta} [\varphi(p; \vartheta) + \varphi(p; -\vartheta)].$$

THÉOREME. — $\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n)$ étant un intégrant défini pour les points $p = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ d'un ensemble compact $P \subseteq \mathcal{E}_n$ et continu par rapport à p

a) (quasi-régularité de φ) \rightarrow continuité et non négativité de χ

b) (régularité de φ) \rightarrow continuité et positivité de χ

c) la condition nécessaire et suffisante pour que φ soit quasi-régulier et que $\chi(p)$ reste constamment \geq nombre positif fixe χ_0 est que en tout p appartenant à P , le corps d'étalement $G_{\varphi p}$ de l'espace $(\mathcal{E}_n)_{\varphi p}$ soit un corps convexe de \mathcal{E}_n

d) si φ est quasi-régulier et admet quelque soit p dans P des dérivées premières par rapport à $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$, en un point p_0 de P où $\chi(p_0) = 0$, $\varphi(p_0; \xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n)$ est linéaire en $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$.

Matematica. — *Sur quelques problèmes concernant les espaces de Minkowski et les espaces vectoriels généraux.* Nota di N. ARONSZAJN, presentata ⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

M. Chr. Pauc a bien voulu nous communiquer les intéressants résultats qu'il a obtenus récemment (voir sa Note ci-dessus). Ayant étudié indépendamment de M. Pauc les mêmes questions, nous nous permettons de présenter ici certains résultats de cette étude. Ces résultats font voir sous un autre angle les problèmes en question.

1. Considérons dans l'espace projectif $\mathcal{S}_n^{(2)}$ un domaine (ouvert) H . Celui-ci sera dit *convexe au sens large* (sens de Kneser), si, avec deux points, il contient (au moins) un des deux segments déterminés par ces points dans \mathcal{S}_n . H sera dit *convexe au sens semi-propre*, s'il est convexe au sens large et s'il existe un hyperplan (de dimension $n - 1$) dans \mathcal{S}_n sans points communs avec H . Enfin, H est *convexe au sens propre* (fermeture de H convexe au sens de Steinitz), s'il est convexe au sens large et s'il existe un hyperplan n'ayant aucun point commun ni avec H ni avec la frontière de H .

La convexité au sens *semi-propre* (ou, respectivement, *propre*), est équivalente à l'existence d'une transformation projective changeant H en un do-

(1) « Symmetrisierungsminimum » de Menger, *Ergebnisse eines math. Koll.*, Heft 8, p. 3 et p. 26.

(2) Nella seduta del 5 dicembre 1937.

maine convexe euclidien, éventuellement non borné (ou, respectivement, en un domaine convexe euclidien borné).

2. Nous considérerons pour une métrique de Minkowski $\mu(v)$, le corps d'étalement ouvert $H(\mu) = C(\mu) - S(\mu)$ ⁽¹⁾. Comme on sait, la convexité de la métrique μ (c'est à dire la propriété $\mu(v_1 + v_2) \leq \mu(v_1) + \mu(v_2)$) est équivalente au fait que l'espace $(\mathcal{E}_n)_\mu$ ⁽²⁾ satisfait à l'inégalité triangulaire.

On trouve le théorème suivant :

THÉORÈME : 1. *Pour que $\mu(v)$ soit convexe, il faut et il suffit que $H(\mu)$ soit convexe au sens semi-propre ; 2. Pour qu'une métrique $\mu(v)$ soit convexe et n'admette aucune direction de linéarité, il faut et il suffit que $H(\mu)$ soit convexe au sens propre.*

3. Pour une métrique $\mu(v)$, le fait que $H(\mu)$ est convexe au sens semi-propre ou, respectivement, propre, peut être présenté sous une forme analytique remarquable qui est d'importance pour les questions d'existence et de semi-continuité du calcul des variations.

Notamment, dans le premier cas, il existe une forme linéaire $L(v)$ telle que $\mu(v) - L(v) \geq 0$ pour tout v . Dans le second cas, $L(v)$ peut être choisie de manière que $\mu(v) - L(v) > 0$ pour tout $v \neq 0$.

D'après le théorème du n° 2 le premier cas se présente par toute métrique μ convexe, et le second, pour une métrique convexe sans direction de linéarité, c'est à dire telle que $\mu(v) + \mu(-v) > 0$ pour tout $v \neq 0$.

4. Les faits indiqués au n° 3 peuvent être généralisés au cas d'un espace vectoriel \mathfrak{V} d'une infinité de dimensions et ils admettent des applications au calcul de variations dans cet espace.

A une métrique généralisée convexe de Minkowski correspond ici une norme indéfinie $\mu(v)$, c'est à dire une fonction réelle définie dans tout \mathfrak{V} telle que : 1. $\mu(\alpha v) = \alpha \mu(v)$ pour $\alpha \geq 0$; 2. $\mu(v_1 + v_2) \leq \mu(v_1) + \mu(v_2)$. On déduit de ces propriétés : 3. $\mu(0) = 0$ et 4. $\mu(v) + \mu(-v) \geq 0$. Quand $\mu(v) + \mu(-v) = 0$ pour un $v \neq 0$, le vecteur v indique une direction de linéarité. On trouve le

THÉORÈME : 1. *Pour toute norme indéfinie $\mu(v)$ et pour tout vecteur v^0 , il existe une fonctionnelle linéaire $L(v)$ ⁽²⁾ telle que $L(v) \leq \mu(v)$ pour tout v et $L(v^0) = \mu(v^0)$; 2. Si μ n'admet pas des directions de linéarité et si \mathfrak{V} est séparable, il existe une fonctionnelle linéaire $L'(v)$ telle que $L'(v) < \mu(v)$ pour tout $v \neq 0$.*

(1) Nous utiliserons dans la suite les notations introduites dans la Note de M. Pauc.

(2) Pour pouvoir considérer dans \mathfrak{V} des fonctionnelles linéaires, on y introduira une notion de limite à l'aide d'une norme $\|v\|$ définie positive à la Banach, de sorte que $\mu(v) \leq \|v\|$. Il est toujours possible de trouver une telle norme, p. ex., en augmentant une norme de Banach quelconque définie dans \mathfrak{V} de la quantité $\max. [\mu(v), \mu(-v)]$.

La première partie de ce théorème est un cas particulier d'un théorème de M. S. Banach ⁽¹⁾. La seconde partie est, croyons-nous, nouvelle; elle se démontre à l'aide de la première de la façon suivante:

Soit $\{v_n\}$ une suite partout dense dans \mathfrak{V} . Désignons par $L_n(v)$ une fonctionnelle linéaire, satisfaisant à $L_n(v) \leq \mu(v)$ et $L_n(v_n) = \mu(v_n)$. Nous pouvons supposer que la norme dans \mathfrak{V} satisfait à $\mu(v) \leq \|v\|$ ⁽²⁾. Considérons alors la fonctionnelle

$$L'(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} L_n(v).$$

Il est clair que $L'(v) \leq \mu(v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \mu(v)$ et que $L'(v) = \mu(v)$ uniquement dans le cas où $L_n(v) = \mu(v)$ pour tout n . Soit maintenant $v \neq 0$. Vu que $\mu(v) + \mu(-v) > 0$, on peut trouver dans la suite partout dense $\{v_n\}$ un v_k aussi près de $-v$ pour que

$$\mu(v_k + v) + \mu(-v - v_k) \leq 2 \|v_k - (-v)\| < \mu(v) + \mu(-v).$$

On aura alors, en vertu de la convexité de μ et de la définition de L_k :

$$\begin{aligned} L_k(v) &= L_k(v_k + v) - L_k(v_k) \leq \mu(v_k + v) - \mu(v_k) \leq \\ &\leq [\mu(v_k + v) + \mu(-v - v_k)] - [\mu(v) + \mu(-v)] + \mu(v) < \mu(v). \end{aligned}$$

Par conséquent $L'(v) < \mu(v)$, c. q. f. d.

Remarquons encore qu'on peut définir l'espace projectif correspondant à l'espace vectoriel \mathfrak{V} et généraliser nos considérations des nn. 1 et 2 (ainsi d'ailleurs que les résultats de M. Pauc).

Matematica. — *Sur les fonctions polygènes d'une et de plusieurs variables complexes duales et de variables bicomplexes duales.* Nota di J. C. VIGNAUX, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Voir S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*. « Monographies Mathématiques » to. I, Varsovie, 1932, p. 27, théor. I.

(2) Comp. note (2) de p. 375.

Meccanica. — *Una particolare soluzione dinamica del problema cosmologico.* Nota II di FLORA FIORENTINI CAMPOLIETI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

6. STUDIO DELLA DENSITÀ D'ENERGIA E CONSEGUENTE LIMITAZIONE PER LA FUNZIONE $h(t)$. — Facendo seguito alla precedente Nota, ai risultati della quale specificamente ci riferiremo, sostituiamo nelle equazioni gravitazionali (2) l'espressione (3) per la velocità della luce V , quale risulta dall'integrazione delle equazioni stesse.

Ricaviamo così per la densità d'energia ε e la pressione di radiazione p nell'universo in esame le espressioni

$$(9) \quad \varepsilon = \frac{4h}{\chi \{ \rho_0^2 - h(\rho_0^2 - \rho^2) \}},$$

$$(10) \quad p = \frac{1}{\chi} \left\{ \lambda + \frac{4h}{\rho_0^2 - h(\rho_0^2 - \rho^2)} \right\}.$$

Queste relazioni ci mostrano che anche p ed ε , come già V , variano nel cronotopo considerato da istante a istante e da punto a punto, ma dipendono da una sola funzione del tempo, la $h(t)$, mentre V dipende da $c(t)$, oltrechè da $h(t)$.

Inoltre, raffrontando fra loro le (3), (9) e (10) ricaviamo

$$\varepsilon = \frac{4hc}{\chi\rho_0^2} \frac{1}{V}, \quad p = \varepsilon + \frac{\lambda}{\chi},$$

dalle quali relazioni risulta che la densità d'energia è inversamente proporzionale alla velocità della luce, mentre densità d'energia e pressione di radiazione differiscono fra loro unicamente per il termine additivo costante

$$\frac{\lambda}{\chi} = 5 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1} \text{ g. sec}^{-2}.$$

La presenza in (9) e (10) della sola funzione $h = h(t)$ ci permette di trovarne con facilità qualche limitazione.

Se per esempio ci chiediamo a quali condizioni dovrà soddisfare la funzione h perchè la quantità ε — come il suo significato fisico impone —

(1) Nella seduta del 5 dicembre 1937.

risulti positiva non solo sulla galassia ($\rho = \rho_0$) il che porta $h > 0$, ma in ogni altro punto dell'universo in esame, giungiamo a ritenere accettabili tutti i valori di h che soddisfanno l'inequazione

$$h \{ \rho_0^2 - h(\rho_0^2 - \rho^2) \} > 0,$$

ossia quelli che non risolvono l'equazione

$$(11) \quad \rho = \rho_0 \sqrt{1 - \frac{1}{h}},$$

quindi tutti i valori compresi nell'intervallo $0 < h < 1$.

Tali valori rendono la funzione ϵ positiva *sempre e ovunque* (1).

7. EQUAZIONE DI STATO DELL'UNIVERSO E QUANTITÀ CARATTERISTICHE: PRESSIONE, VOLUME, TEMPERATURA. — Dal confronto di (9) e (10), ricordando che

$$(12) \quad \epsilon = c^2 \mu = \frac{c^2}{\mathfrak{V}} \quad \left(\begin{array}{l} \mu = \text{densità di materia} \\ \mathfrak{V} = \text{volume specifico} \end{array} \right)$$

otteniamo:

$$p = \frac{c^2}{\mathfrak{V}} + \frac{\lambda}{\chi}.$$

Questa relazione si può « interpretare » come un'equazione di stato dell'universo, visto al pari di un macroscopico gas, le cui monadi altro non sarebbero se non i singoli astri.

Se la scriviamo nella forma

$$(13) \quad \mathfrak{V}(\chi p - \lambda) = \chi c^2$$

possiamo confrontarla con la legge di Boyle e dedurne che l'universo in esame si comporta analogamente ad un gas perfetto che eserciti la pressione

$$(14) \quad \mathfrak{P} = \chi p - \lambda.$$

Sostituendo le (9) e (10) in (13) e (14) e tenendo presente la (12), potremo dare l'espressione analitica delle funzioni caratteristiche di questo macroscopico gas, a cominciare appunto da pressione e volume:

(1) Qualora poi ci si limitasse a richiedere che la densità d'energia risulti positiva in una regione sufficientemente estesa attorno alla galassia, per esempio entro i limiti dell'universo visibile, potremmo osservare che per $h > 1$ la (11) fornisce valori reali di ρ capaci di soddisfare l'equazione dell'orizzonte:

$$V = c \left\{ 1 - h \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) \right\} = 0$$

onde l'orizzonte stesso ci apparirebbe come limite di una zona al di là della quale risulterebbero negative tanto la velocità della luce, quanto la densità d'energia.

$$(15) \quad \mathfrak{S} = \frac{4h}{\rho_0^2 - h(\rho_0^2 - \rho^2)},$$

$$(16) \quad \mathfrak{V} = \frac{c^2 \chi \{ \rho_0^2 - h(\rho_0^2 - \rho^2) \}}{4h} = c^2 \chi \frac{1}{\mathfrak{S}}.$$

Da queste relazioni appare che, tanto la pressione, funzione lineare della pressione di radiazione, quanto il volume specifico, inversamente proporzionale alla pressione, variano da luogo a luogo e da istante a istante; la pressione poi dipende da una sola funzione del tempo, la h , mentre la variabilità del volume al variare del tempo è legata all'andamento di entrambe le funzioni $h = h(t)$ e $c = c(t)$.

L'analogia del nostro universo con i gas perfetti ci permette inoltre di definirne una macroscopica « temperatura », prodotto della pressione per il volume specifico:

$$(17) \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{S}\mathfrak{V} = \chi c^2.$$

Questa temperatura, come si addice ad un sistema in equilibrio termico, non varia da punto a punto dell'universo; varia invece, dipendentemente dalla funzione $c(t)$, col trascorrere del tempo.

8. ENTROPIA. — Completiamo lo studio termodinamico dell'universo come gas, considerandone anche l'entropia.

Esprimiamo l'entropia unitaria dell'universo analogamente a quella dei gas perfetti:

$$(18) \quad S = c_v \log \mathfrak{S}\mathfrak{V}^\alpha + K,$$

dove c_v è il calore specifico a volume costante, \mathfrak{S} e \mathfrak{V} la pressione ed il volume specifici (riferiti all'unità di massa), α il rapporto fra i calori specifici a pressione e a volume costante ⁽¹⁾, K una costante arbitraria, all'eliminazione della quale non possiamo valerci del terzo principio, data l'impossibilità di definire uno zero assoluto per l'universo.

L'entropia totale risulta

$$(19) \quad \mathfrak{S} = \int_{\tau} S \mu d\tau,$$

dove

$$\mu = \frac{\varepsilon}{c^2}, \quad d\tau = \rho^2 d\rho d\omega,$$

(1) A proposito del coefficiente α ricordiamo che per i gas perfetti monoatomici è $\alpha = \frac{5}{3}$, per i biatomici $\alpha = \frac{7}{5}$. Se è vero che su dieci stelle che si osservino telescopicamente ve ne sono almeno tre doppie, potremo prendere come valore di α una media ponderata fra $\frac{5}{3}$ e $\frac{7}{5}$, pari a circa 1,6.

onde

$$\mathfrak{S} = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^R \varepsilon \rho^2 S d\rho^{(1)}.$$

Di qui, ricordando le (18) e (19) e sostituendovi le espressioni date da (9), (10), (15) e (16), si ricava

$$(20) \quad \mathfrak{S} = \frac{4\pi c_v}{\chi c^2} \left\{ 2\alpha \mathfrak{J}_1 \log c + \frac{K_1}{c_v} \mathfrak{J}_1 + (1 - \alpha) \mathfrak{J}_2 \right\},$$

dove si è posto

$$(21) \quad K_1 = K + \alpha c_v \log \chi \quad \mathfrak{J}_1 = \int_0^R \frac{4b\rho^2}{\rho_0^2 - b(\rho_0^2 - \rho^2)} d\rho$$

$$\mathfrak{J}_2 = \int_0^R \frac{4b\rho^2}{\rho_0^2 - b(\rho_0^2 - \rho^2)} \log \frac{4b}{\rho_0^2 - b(\rho_0^2 - \rho^2)} d\rho.$$

La (20) può assumere un aspetto più semplice mediante le ulteriori posizioni:

$$(22) \quad \frac{4\pi c_v}{\chi} = A, \quad 2\alpha \mathfrak{J}_1 = B, \quad \frac{K_1}{c_v} \mathfrak{J}_1 + (1 - \alpha) \mathfrak{J}_2 = D.$$

Otteniamo così:

$$(23) \quad \mathfrak{S} = \frac{A}{c^2} \{ B \log c + D \},$$

e derivando rispetto al tempo t :

$$\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \frac{A}{c^3} \{ B(1 - \log c^2) - 2D \} \frac{dc}{dt} +$$

$$+ \frac{A}{c^2} \left\{ \left(2\alpha \log c + \frac{K_1}{c_v} \right) \frac{d\mathfrak{J}_1}{dt} + (1 - \alpha) \frac{d\mathfrak{J}_2}{dt} \right\},$$

o anche

$$(24) \quad \frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \frac{A}{c^3} \{ B(1 - \log c^2) - 2D \} \frac{dc}{dt} +$$

$$+ \frac{A}{c^2} \left\{ \left(2\alpha \log c + \frac{K_1}{c_v} \right) \mathfrak{J}_1^* + (1 - \alpha) \mathfrak{J}_2^* \right\} \frac{dh}{dt},$$

(1) Limitando l'integrale fra 0 e R ammettiamo che lo spazio fisico sia finito. La nostra soluzione non raggiunge il suggestivo risultato einsteiniano di uno spazio tridimensionale finito ma illimitato. Ma qualora si volesse ritenere lo spazio stesso come infinito, la trattazione precedente non subirebbe modificazioni essenziali: basterebbe considerare il valore limite assunto dall'entropia \mathfrak{S} quando R tende all'infinito.

dove

$$(25) \quad \mathfrak{I}_1^* = \int_0^R \frac{4\rho_0^2 \rho^2}{\{\rho_0^2 - h(\rho_0^2 - \rho^2)\}} d\rho$$

$$\mathfrak{I}_2^* = \int_0^R \frac{4\rho_0^2 \rho^2}{\{\rho_0^2 - h(\rho_0^2 - \rho^2)\}^2} \left\{ \log \frac{4h}{\rho_0^2 - h(\rho_0^2 - \rho^2)} + 1 \right\} d\rho.$$

Dalla (24) appare che la derivata rispetto al tempo dell'entropia totale \mathfrak{S} risulta funzione lineare delle derivate temporali della velocità della luce $c(t)$ sulla galassia e della funzione $h(t)$. A proposito di questa funzione, ricordiamo che essa è data da

$$h = 1 - \frac{c_0}{c}$$

dove c_0 e c sono rispettivamente le velocità della luce al centro dell'universo e sulla galassia, onde la funzione stessa può essere interpretata come un parametro di difformità dell'universo.

Ma prima di cercare quali legami intercedano fra le funzioni \mathfrak{S} , c , h , sarà bene indagare il segno, se non il valore, dei coefficienti che compaiono in (24).

Dall'esame delle posizioni (21) e (22) appare che

$$A > 0 \quad B > 0 \quad \left(\text{essendo } \mathfrak{I}_1 = \int_0^R \chi \varepsilon \rho^2 d\rho > 0 \right).$$

Per poter stabilire il segno del coefficiente D , dobbiamo anzitutto indagare i segni di K_1 e \mathfrak{I}_2 : poichè l'ordine di grandezza di $K^{(1)}$ risulta di 10^2 , quello del prodotto (negativo) $\alpha c_v \log \chi$ di 10^{-3} , dalle (21) si ricava:

$$K_1 > 0 \quad \mathfrak{I}_2 = \int_0^R \chi \varepsilon \rho^2 \log \chi \varepsilon d\rho < 0,$$

onde è possibile asserire che anche

$$D > 0.$$

Ne segue

$$(26) \quad \frac{A}{c^3} \{ B(1 - \log c^2) - 2D \} < 0.$$

D'altra parte le (25) mostrano che

$$\mathfrak{I}_1^* > 0 \quad \mathfrak{I}_2^* = \int_0^R \frac{4\rho_0^2 \rho^2}{\{\rho_0^2 - h(\rho_0^2 - \rho^2)\}^2} (\log \chi \varepsilon + 1) d\rho < 0,$$

(1) Il valore di K (costante assoluta dell'entropia) si può determinare valendosi di una di quelle relazioni che esprimono l'entropia di un gas perfetto monoatomico. Cfr., per esempio, FERMI, *Introduzione alla fisica atomica*. Bologna, Zanichelli, 1928, p. 289.

(infatti, per valori di ε anche molto più grandi di quelli che si constatano, è ampiamente verificata la disuguaglianza $\log \chi \varepsilon < 1$); possiamo dunque scrivere

$$(27) \quad \frac{A}{c^2} \left\{ \left(2 \alpha \log c + \frac{K_1}{c_v} \right) \mathfrak{F}_1^* + (1 - \alpha) \mathfrak{F}_2^* \right\} > 0.$$

Se ora indichiamo rispettivamente con \mathfrak{N} , \mathfrak{N} i valori assoluti delle espressioni (26) e (27), possiamo trasformare la (24) in

$$(28) \quad \frac{d\mathfrak{S}}{dt} = -\mathfrak{N} \frac{dc}{dt} + \mathfrak{N} \frac{dh}{dt},$$

dall'esame della quale è facile dedurre l'andamento della funzione $c(t)$ in base a quelli delle funzioni $\mathfrak{S}(t)$ e $h(t)$. Infatti, per $\frac{d\mathfrak{S}}{dt} > 0$ e $\frac{dh}{dt} < 0$ la (28) richiede che sia $\frac{dc}{dt} < 0$.

9. CONCLUSIONE. — La nostra ipotesi fondamentale di simmetria sferica nella soluzione particolare a spazio geometrico euclideo, appoggiandosi alla teoria di evoluzione dell'universo, in base alla quale l'entropia \mathfrak{S} crescerebbe col tempo, mentre la funzione h tenderebbe a zero $\left(\frac{dh}{dt} < 0 \right)$, si concilia con l'ipotesi di una progressiva diminuzione della velocità della luce sulla galassia al volger dei secoli. Questo risultato non è contraddetto dall'esperienza⁽¹⁾: ad esso si giunge senza formulare nessuna ipotesi sulla posizione della galassia nell'universo in esame.

Qualora poi, in conformità a quanto ci risulta dallo studio dello spostamento delle righe spettrali (n. 4), ammettessimo la possibilità di una posizione centrale per la galassia, essendo per $\rho_0 = 0$

$$\mathfrak{F}_1^* = \mathfrak{F}_2^* = 0,$$

la (24) si ridurrebbe a

$$\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \frac{A}{c^3} \{ B(1 - \log c^2) - 2D \} \frac{dc}{dt},$$

dove non compare più traccia della funzione $h(t)$. In tal caso la decrescenza della velocità della luce risulta direttamente dalla crescita dell'entropia, senza bisogno di invocare una tendenza all'uniformità.

Notiamo infine, ricordando la (17), che dalla decrescenza della velocità della luce sulla galassia consegue la decrescenza di quella che abbiamo definita come temperatura dell'universo stesso, risultato questo che si accorda col principio di evoluzione più sopra invocato.

(1) Cfr. POLVANI, FINZI, BIANCHI, loc. cit.

Meccanica. — *Varietà sostanziali nel moto di un sistema continuo.* Nota di G. LAMPARIELLO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Se si considera un qualunque sistema continuo in movimento regolare (senza cavitazioni nè compenetrazioni) e si fissa l'attenzione sui campi S_0, S dello spazio occupati dal sistema in due istanti differenti t_0, t , si desume l'esistenza di una trasformazione T che fa passare dal generico punto P_0 di S_0 ad un determinato punto P di S e viceversa.

Più precisamente, supposto $t > t_0$, il punto P che corrisponde a P_0 in T è la posizione occupata all'istante t dall'elemento materiale (particella) del sistema che all'istante iniziale t_0 è in P_0 .

Dalla continuità del moto segue che una superficie σ_0 (o curva Γ_0) regolare di S_0 si trasforma in una superficie σ (o curva Γ) regolare di S .

Ciò posto, sia dato un qualunque vettore ω , dipendente dal posto P e dal tempo t , continuo e derivabile, e si consideri in S_0 una qualunque superficie regolare σ_0 luogo di punti P_0 nei quali ω è tangente a σ_0 .

Questa condizione si esprime annullando la componente normale a σ_0 del vettore ω

$$(1) \quad \omega_n = 0.$$

Si pone allora la questione di ricercare le condizioni cui deve soddisfare ω affinchè la (1) risulti verificata qualunque sia l'istante t per la superficie trasformata σ .

In altri termini, si tratta di ricercare le condizioni cui deve soddisfare ω affinchè competa carattere sostanziale alla superficie σ cui ω è ovunque tangente, nel senso che le particelle materiali che in un istante determinato sono distribuite su σ , in un qualunque altro istante si distribuiscano su di una superficie lungo la quale ω è sempre tangente.

Poichè la linea Γ , intersezione di due superficie siffatte, è una linea del campo del vettore ω , tale cioè che lungo essa ω è ovunque tangente, quando sia risolta la questione posta, segue senz'altro che le condizioni trovate assicurano la sostanzialità delle linee del campo di ω .

Lo scopo della presente comunicazione è di assegnare un'equazione differenziale caratteristica cui deve soddisfare il vettore ω , affinchè sussista la sostanzialità delle linee Γ (e quindi anche delle superficie σ luoghi di linee Γ) cui ω è ovunque tangente.

(1) Nella seduta del 5 dicembre 1937.

2. Riferiamoci specificamente ai due classici sistemi di variabili: le variabili di Lagrange x_0, y_0, z_0, t , cioè, oltre il tempo t , le coordinate (ad es. cartesiane ortogonali) della particella materiale che ad un istante determinato $t = t_0$ è nel generico punto P_0 di S_0 ; le variabili di Eulero x, y, z, t , cioè, oltre il tempo t , le coordinate cartesiane ortogonali della generica particella materiale all'istante t .

Indipendentemente da qualsiasi considerazione dinamica, le caratteristiche principali del moto sono rispettivamente x, y, z (Lagrange); u, v, w (Eulero), essendo u, v, w le componenti cartesiane della velocità $\mathbf{V}(P|t)$ della particella che all'istante t passa per P .

La rappresentazione lagrangiana espressa dall'equazione vettoriale

$$(T) \quad P = P(P_0|t)$$

si desume dall'integrazione dell'equazione differenziale

$$(2) \quad \dot{P} = \mathbf{V}(P|t) \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt} \right)$$

e fornisce la trasformazione geometrica T di cui al n. 1. Se essa è nota, è subito visto come con operazioni in termini finiti si possa decidere la questione posta al numero precedente.

Infatti, se

$$(3) \quad f(P|t) = c \quad (c \text{ costante})$$

è l'equazione di una σ lungo la quale ω è ovunque tangente, basta sostituire al posto di P la sua espressione (T).

Il carattere sostanziale di σ è accertato se l'equazione ottenuta in P_0 non involge il tempo t .

Ma, quando non si conosce la soluzione lagrangiana (ed è questo il caso generale) non è così immediato il riconoscimento della richiesta sostanzialità sulla base della sola determinazione euleriana $\mathbf{V}(P|t)$ della velocità.

3. Per raggiungere lo scopo che abbiamo in vista, introduciamo gli operatori differenziali

$$D = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\Omega = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z},$$

dove ξ, η, ζ denotano le componenti cartesiane del vettore ω .

Supponiamo che questo vettore, funzione del posto nel campo che si considera, sia, in ogni punto P del campo, tangente alla particolare superficie della famiglia (3) che passa per P .

Si è allora condotti per f alla condizione

$$(1') \quad \Omega f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Questa dovendo essere soddisfatta lungo qualsiasi superficie della famiglia si presenta come un'equazione a derivate parziali (lineare del 1° ordine) nella funzione f .

Le particelle che all'istante t costituiscono una generica superficie integrale di $(1')$ formano in un qualsiasi altro istante t' una superficie σ' .

Indichiamo con P' il generico punto di σ' e con $f'(P'|t')$ un parametro della famiglia delle σ' corrispondente alla famiglia delle σ .

Dovremo esprimere in conformità che, sopra ogni σ' , si ha

$$f'(P'|t') = \text{costante}.$$

Ora, in base all'equazione (2), i punti P' sono funzioni ben determinate dei punti P e del tempo. Immaginando di introdurre in $f'(P'|t')$ siffatte funzioni, la condizione imposta alla f' di assumere valore costante sulle singole σ' equivale a richiedere che, in quanto espressa nelle variabili P, t , essa si mantenga costante sulle singole σ .

Per costruire una f' che soddisfi a codesta condizione, consideriamo in particolare uno spostamento infinitesimo, ponendo $t' = t + dt$ e conseguentemente

$$P' = P + \mathbf{V} dt.$$

Si ha allora

$$f(P|t) = f(P' - \mathbf{V} dt|t' - dt) = f(P'|t') - dt \left(\frac{df}{dt} \right)_{\substack{P=P' \\ t=t'}},$$

e basterà assumere

$$f'(P'|t') = f(P|t) = f(P'|t') - dt \left(\frac{df}{dt} \right)_{\substack{P=P' \\ t=t'}}.$$

In quest'ultima espressione, oltre P', t' , comparisce esplicitamente anche il tempuscolo dt che va trattato come un parametro arbitrario.

Sopprimendo gli apici, si è in definitiva condotti ad esprimere che dalla $(1')$ consegue necessariamente l'equazione

$$(4) \quad \Omega \frac{df}{dt} = 0.$$

Ma si ha

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + Df$$

e la (4) diventa

$$(4') \quad \Omega \frac{\partial f}{\partial t} + \Omega Df = 0.$$

Si osservi ora che, insieme con la (1'), sussistono le equazioni

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} D\Omega f = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \Omega f = 0, \end{array} \right.$$

di cui la seconda è suscettibile della forma

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} f + \Omega \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

dove è

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Inoltre dalle (5) si deduce ancora l'equazione

$$\frac{d}{dt} \Omega f = \frac{\partial \Omega}{\partial t} f + \Omega \frac{\partial f}{\partial t} + D\Omega f = 0.$$

Dunque la (4') assume la forma

$$(6) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} f + (D\Omega) f = 0,$$

dove il simbolo $(D\Omega)$ denota l'operazione alternata ⁽¹⁾ delle operazioni D, Ω .

In definitiva, la (4) diventa

$$(1'') \quad \left(\frac{d\xi}{dt} - \Omega u \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{d\eta}{dt} - \Omega v \right) \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{d\zeta}{dt} - \Omega w \right) \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Affinchè questa equazione sia una conseguenza della (1') è necessario e sufficiente che i coefficienti delle derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ siano proporzionali.

(1) Per le operazioni differenziali lineari del 1° ordine e loro alternate, cfr. T. LEVI-CIVITA, *Calcolo differenziale assoluto*, cap. 3, Roma, Stock, 1925 (ed. inglese *The absolute differential calculus*, London, Blackie, p. 35, 1927); L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, Pisa, Spoerri, p. 16, 1918.

Concludiamo che la sostanzialità delle linee del campo di ω è analiticamente espressa dall'equazione differenziale a derivate parziali

$$(7) \quad \frac{d\omega}{dt} = \Omega \mathbf{V} + \lambda \omega,$$

dove λ è *a priori* indeterminato.

4. Le considerazioni fatte valgono qualunque sia la natura del sistema materiale in moto.

L'idrodinamica offre un esempio notevole che rientra nella questione generale dei numeri precedenti.

Un celebre teorema di Helmholtz afferma la sostanzialità delle linee vorticose in seno ad un fluido perfetto barotropo, soggetto a forze di massa conservative.

Le linee vorticose sono le linee del campo del vortice $\omega = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{V}$, le cui componenti si deducono, come è ben noto, applicando a quelle di \mathbf{V} particolari operatori differenziali del 1° ordine a coefficienti costanti.

Dalle equazioni idrodinamiche di Eulero, Helmholtz⁽¹⁾ deduce un sistema di equazioni differenziali che in forma vettoriale è

$$(7') \quad \frac{d\omega}{dt} = \Omega \mathbf{V} + \frac{d \log \rho}{dt} \omega,$$

dove ρ è la densità del fluido ed Ω è l'operatore del 1° ordine, definito al n. 3, associato al vettore ω nella determinazione particolare che gli compete all'istante t .

Dal confronto della (7') con la (7) si desume una notevole interpretazione cinematica delle equazioni di Helmholtz secondo cui queste esprimono la sostanzialità delle linee vorticose.

Dalle considerazioni generali istituite ai nn. precedenti consegue quindi una nuova dimostrazione del teorema di Helmholtz.

(1) Cfr. la Memoria *Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen*. « Journ. für die reine und ang. Math. », Bd. LV, Berlin, 1858. Helmholtz deduce la (7') nel caso dei fluidi incompressibili. La (7') è stabilita in NANSON, « Mess. of Math. », 1874; G. KIRCHHOFF, *Mechanik*; STOKES, *Papers*, 2, 1883.

Meccanica. — *Sulla teoria dell'arco elastico a direttrice circolare.* Nota I di F. TRICOMI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In un recente, importante lavoro di Fubini ⁽²⁾ sono state gettate le fondamenta per lo studio, da un nuovo e più promettente punto di vista, delle deformazioni elastiche di un arco elastico, omogeneo ed isotropo, a sezione costante e direttrice circolare ⁽³⁾, segnalando particolarmente due speciali casi di deformazione, che sono i soli possibili in cui le tensioni interne non cambiano passando da una sezione dell'arco all'altro. A questi due casi — che, da certe due costanti caratteristiche che in essi compaiono, potremo chiamare rispettivamente: *caso (a)* e *caso (b)* — sono dedicati due miei precedenti lavori, nel primo dei quali ⁽⁴⁾ studio il caso (b) (che ha molta analogia con la *torsione* di una trave rettilinea) nell'ipotesi che la sezione \mathcal{A} dell'arco considerato sia un rettangolo, mentre nell'altro ⁽⁵⁾ studio il caso (a) (che ha molta analogia con la *flessione semplice*) supponendo soltanto che le dimensioni trasversali dell'arco siano piccole rispetto al raggio di curvatura del medesimo.

Allo stato attuale delle cose il caso (b) è dunque esaurientemente discusso soltanto nell'ipotesi che la sezione dell'arco sia un rettangolo (con due lati paralleli all'asse di curvatura), ipotesi che è certo quella di gran lunga più importante dal punto di vista tecnico (basti pensare al caso dei ponti), ma non la sola importante chè, per esempio, nell'applicazione al calcolo delle molle elicoidali di piccolo passo ⁽⁶⁾, è la sezione circolare quella in cui più di frequente ci si imbatte.

Nella presente Nota e in una che le farà seguito mi propongo di colmare, almeno in parte, questa lacuna trattando il caso (b) nell'ipotesi che il contorno della sezione dell'arco non sia proprio una circonferenza (caso matematicamente complicato, che non sembra dominabile con formule sufficientemente semplici) bensì una di certe curve di quart'ordine di cui si dirà più appresso,

(1) Nella seduta del 5 dicembre 1937.

(2) *Sulla teoria delle travi ad asse curvo.* «Atti R. Acc. Scienze Torino», 72, pp. 386-410, 1936-37.

(3) Generabile, dunque, mediante la rotazione di un'area piana invariabile \mathcal{A} attorno ad un retta del suo piano (che diremo *asse di curvatura* dell'arco) che non l'attraversi.

(4) *Su di un notevole caso di deformazione di una trave curva.* «Atti R. Acc. Scienze Torino», 73, 1937-38.

(5) *Sulla flessione semplice di un arco elastico.* Ibidem.

(6) Che, come ho osservato nel lavoro prec. cit. sotto (4), vengono ordinariamente cimentate proprio nelle condizioni caratteristiche pel caso (b).

curve che offrono il vantaggio di rendere il problema (*b*) altrettanto semplice ed elementare quanto la torsione di una trave rettilinea a sezione circolare, e che inoltre, nelle condizioni in cui ordinariamente ci si trova, differiscono tanto poco da circonferenze da essere con queste confondibili.

In altre parole: mentre nello studio della torsione di una trave rettilinea il caso più semplice ed elementare è quello della sezione circolare, nello studio del caso (*b*) per un arco elastico a direttrice circolare, il caso corrispondente non è quello in cui la sezione sia limitata da una circonferenza, bensì da una di quelle quartiche cui si è fatta allusione più sopra.

2. Dal punto di vista matematico il momento essenziale della trattazione del problema (*b*) per un arco di sezione \mathcal{A} , è l'integrazione della equazione a derivate parziali

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \Phi = 0$$

congiunta alla condizione al contorno (di \mathcal{A})

$$(2) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} + \frac{b}{r} \right) \cos(\chi n) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\Phi}{r} \right) \cos(rn) = 0,$$

dove b è una costante (*a priori* indeterminata) e χ ed r possono interpretarsi come coordinate cartesiane ortogonali⁽¹⁾ nel piano di \mathcal{A} , fissate in modo che il semiasse r positivo passi pel baricentro di \mathcal{A} e l'origine O cada sull'asse di curvatura.

Nel primo dei due miei lavori precedentemente ricordati — quello citato sotto⁽⁴⁾ a p. 388 — ho risoluto il precedente problema di valori al contorno, nell'ipotesi che \mathcal{A} sia un rettangolo coi lati paralleli agli assi, mediante una serie della forma

$$\Phi = \left(\alpha r + \frac{\beta}{r} \right) \chi + \sum_{n=1}^{\infty} [i a_n J_1(inr) + b_n H_1^{(1)}(inr)] \sin n\chi$$

dove α, β, a_n, b_n sono delle costanti da determinarsi opportunamente e J_1 e $H_1^{(1)}$ denotano funzioni di Bessel d'ordine 1.

Proviamo ora a porre senz'altro $a_n = b_n = 0$, cioè supponiamo che sia semplicemente

$$(3) \quad \Phi = \left(\alpha r + \frac{\beta}{r} \right) \chi$$

(1) Veramente χ ed r erano originariamente, assieme con una terza coordinata angolare φ , coordinate cilindriche spaziali.

e, lasciando (pel momento) α e β indeterminati, chiediamoci reciprocamente come debba esser fatta la sezione \mathfrak{A} affinchè la funzione Φ data dalla (3) soddisfi non solo alla (1), com'è quasi evidente, ma anche alla (2).

Per rispondere a questo quesito osserviamo anzitutto che, detto ds l'elemento d'arco del contorno di \mathfrak{A} , può evidentemente porsi

$$\cos(\chi n) = -\frac{dr}{ds} \quad , \quad \cos(rn) = \frac{d\chi}{ds} \quad ,$$

di guisa che, sostituendo nella (2), moltiplicando per $-ds$ e tenendo conto che dalla (3) segue

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{b}{r} = \alpha r + \frac{\beta + b}{r} \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\Phi}{r} = -2\beta \frac{\chi}{r^2} \quad ,$$

si avrà l'equazione differenziale

$$\left(\alpha r + \frac{\beta + b}{r} \right) dr + 2\beta \frac{\chi}{r^2} d\chi = 0 \quad ,$$

donde, separando le variabili e integrando, segue

$$(4) \quad \frac{\alpha}{4} r^4 + \frac{\beta + b}{2} r^2 + \beta \chi^2 = \text{cost.}$$

L'equazione ottenuta rappresenta i possibili contorni di \mathfrak{A} , nonchè le relative *linee di tensione* ⁽¹⁾ che, come senz'altro si vede, sono delle *curve algebriche di quarti' ordine*, simmetriche rispetto ad entrambi gli assi coordinati.

3. Per farsi una più precisa idea delle curve (4) e, soprattutto, per indagare se — com'è manifestamente essenziale — fra di esse ce ne siano di chiuse, tutte contenute nel semipiano $r \geq 0$, è anzitutto opportuno porre

$$(5) \quad \frac{\beta + b}{\alpha} = -r_0^2 \quad , \quad \frac{\beta}{\beta + b} = -m^2 \quad .$$

col che, e col dare un'opportuna forma alla costante del 2° membro, la (4) può scriversi

(6)

$$(r^2 - r_0^2)^2 + 4m^2 r_0^2 \chi^2 = c^2 r_0^4$$

(1) Cioè le linee tali che la risultante delle tensioni interne esercitantesi in ciascun loro punto, abbia la direzione della rispettiva tangente.

dove c denota una nuova costante *a priori* indeterminata, che nulla vieta di supporre, al pari di r_0 e di m , *non negativa*. Più semplicemente ancora, se si pone ulteriormente

$$(7) \quad x = \frac{r}{r_0} \quad , \quad y = m \frac{\tilde{\kappa}}{r_0} ,$$

il che si può interpretare tanto come scelta di opportune unità di misura sui due assi, quanto come effetto dell'azione della trasformazione *affine* (7) sulle curve (6); l'ultima equazione assume la forma

$$(8) \quad \boxed{(x^2 - 1)^2 + 4y^2 = c^2} ,$$

in cui non figura più che un solo parametro: la costante c .

La (8), da cui si deduce subito che

$$(9) \quad y = \frac{1}{2} \sqrt{c^2 - (x^2 - 1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{[(1 + c) - x^2][x^2 - (1 - c)]} ,$$

mostra a colpo d'occhio molte cose interessanti, fra cui: 1) che le nostre quartiche sono quartiche *ellittiche*, cioè di genere 1, dotate di due punti doppi coincidenti (tacnodo) nel punto all'infinito dell'asse y ; 2) che per $c < 1$ e $x > 0$ la curva (8) ha punti reali allora e solo allora che è $\sqrt{1 - c} \leq x \leq \sqrt{1 + c}$, punti i quali riempiono un'ovale bisecata dall'asse x , che la incontra nei due punti di ascisse

$$(10) \quad x_1 = \sqrt{1 - c} \quad , \quad x_2 = \sqrt{1 + c} ;$$

3) che per $c > 1$ la curva (8) ha invece una ed una sola intersezione reale col semiasse asse x positivo: il punto di ascissa x_2 , epperò non può chiudersi su se stessa senza uscire dal semipiano $x \geq 0$; 4) che y è massima (o minima) ed uguale a $\pm c/2$ per $x = 1$.

Da quanto sopra segue in particolare che le sole curve (8) o (6) che possono aver per noi interesse, sono quelle per cui è $0 \leq c \leq 1$, curve di cui le estreme, cioè quelle corrispondenti a $c = 0$ e $c = 1$, sono rispettivamente una curva ridotta all'unico punto reale C di coordinate $x = 1$, $y = 0$ e la quartica *razionale* di equazione

$$(11) \quad x^4 - 2x^2 + 4y^2 = 0 ,$$

che ha manifestamente, oltre al solito tacnodo all'infinito, un nodo nella origine con tangenti di coefficienti angolari $\pm \sqrt{1/2}$. Alcune di queste curve sono rappresentate nella figura alla p. seg., assieme con la (11) e con una delle curve $c > 1$, onde dare un'idea anche dell'andamento di quest'ultime.

Pel tracciamento della figura — che presenta un'ingannevole simiglianza con la classica figura delle cassinoidi e la lemniscata — è stata molto utile l'osservazione che la (8) può riguardarsi come la trasformata del cerchio

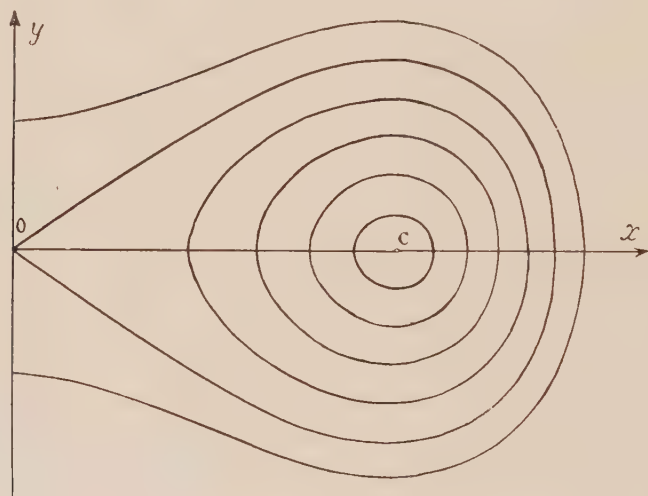
$$\xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

nella trasformazione algebrica

$$(12) \quad \xi = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \quad , \quad \eta = y$$

facilmente costruibile per mezzo della parabola (del piano x, ξ) di equazione

$$(13) \quad \xi = \frac{1}{2}(x^2 - 1) = (x - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2.$$



Quest'ultima osservazione è importante anche per convincersi che, come del resto si vede anche dalla figura, *per piccoli valori di c* , cioè nell'ipotesi che le dimensioni trasversali della sezione del nostro arco siano piccole rispetto al suo raggio di curvatura, *la curva (8) differisce pochissimo da un cerchio*. Infatti se c (e quindi, *a fortiori*, $x - 1$) è tanto piccolo da potersene trascurare il quadrato, la trasformazione (12) può, come mostra la (13), identificarsi con la *traslazione* $\xi = x - 1$, $\eta = y$.

Se ne conclude che, nelle condizioni ora indicate, un arco la cui sezione abbia per contorno una delle quartiche (8) (o, ciò che è lo stesso, una delle (6), nel caso $m = 1$) può praticamente considerarsi come un arco a sezione circolare.

Meccanica. — *Sulla teoria dell'arco elastico a direttrice circolare.* Nota II di F. TRICOMI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Nuove ricerche sull'« ammasso del Sole ».* Nota di L. GIANELLA, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla forma della vibrazione luminosa in un mezzo sottoposto a campo magnetico alternato.* Nota di G. ZANOTELLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. LO SURDO.

In un precedente lavoro ⁽²⁾ studiai sperimentalmente la rotazione paramagnetica del piano di polarizzazione in campo alternato, ed in tale occasione ho riassunto i risultati delle varie ricerche eseguite sull'effetto Faraday prodotto da un campo magnetico variabile nel tempo. Tali ricerche cui debbono aggiungersi alcune più recenti di Bretscher e Deck ⁽³⁾ non hanno riscontrato, fuori dell'intorno delle frequenze di risonanza della sostanza esaminata, modificazione sensibile delle proprietà magneto-ottiche di essa in confronto al caso statico: la rotazione segue le variazioni del campo anche a frequenza relativamente alta prontamente, e senza che la costante di Verdet risulti di valore apprezzabilmente diverso da quello statico.

Senza entrare nella considerazione di eventuali modificazioni delle proprietà magneto-ottiche del mezzo, lo studio della forma della vibrazione emergente non è privo di interesse: anzi conduce, come vedremo, a prevedere un nuovo aspetto dell'effetto Faraday qualora occorra tener conto della variazione del campo magnetico durante il tempo impiegato dalla luce ad attraversare il mezzo: ciò dovrà tenersi presente quando questa condizione sia realizzata sperimentalmente per la lunghezza del percorso e per l'elevatezza della frequenza, al fine di poterne sceverare gli effetti nella valutazione delle proprietà magneto-ottiche intrinseche della sostanza esaminata.

(1) Nella seduta del 5 dicembre 1937.

(2) « Rendiconti R. Acc. dei Lincei », 19, 718, 1934.

(3) « Helv. Phys. Acta », 6, 229, 1934 e 9, 42, 1936.

Prenderemo come punto di partenza un risultato sperimentale acquisito cioè la formula di Verdet che applicheremo con una ipotesi che ne conservi la validità nelle speciali condizioni che qui si considerano. Per precisare, fissata in un certo mezzo materiale una terna cartesiana ortogonale destra $xy\zeta$, consideriamo un'onda luminosa piana di frequenza $1/T$ polarizzata rettilineamente, propagantesi con velocità v secondo il verso positivo dell'asse ζ , ed un campo magnetico h_ζ , funzione del tempo, nella direzione della propagazione stessa e determinante l'attività ottica del mezzo: supporremo che, in un intervallo $d\zeta$ tale che il tempo impiegato dalla luce a percorrerlo sia così piccolo da potervi considerare il campo come costante, possa scriversi per l'angolo di rotazione del piano di polarizzazione della luce la relazione

$$(1) \quad d\alpha = V h_\zeta d\zeta$$

ove V è la costante di Verdet della sostanza considerata.

Sia il campo attivante per semplicità sinusoidale di ampiezza h_0 e di periodo $\tau = \omega/2\pi$ ed agisca nel solo semispazio $\zeta \geq 0$, cioè

$$(2) \quad h_\zeta = 0 \quad \text{per } \zeta < 0, \quad h_\zeta = h_0 \sin \omega t \quad \text{per } \zeta \geq 0.$$

L'azione di detto campo nello spazio compreso fra i piani $\zeta = 0$ e $\zeta = \zeta_0$, ($\zeta_0 > 0$) si esplicherà come una rotazione misurata da

$$(3) \quad \alpha = V \int_0^{\zeta_0} h_\zeta d\zeta$$

ove h_ζ appare funzione di ζ in quanto, considerando la luce che attraversa il piano $\zeta = \zeta_0$ al tempo t , essa si trovava nel punto ζ , intermedio fra zero e ζ_0 , al tempo $t - (\zeta_0 - \zeta)/v$ quando il campo ivi assumeva il valore

$$h_\zeta = h_0 \sin \omega \left(t - \frac{\zeta_0 - \zeta}{v} \right).$$

Introducendo tale valore nella (3) ed eseguendo l'integrazione si ottiene

$$(4) \quad \alpha = \frac{2Vh_0v}{\omega} \sin \frac{\omega \zeta_0}{2v} \sin \omega \left(t - \frac{\zeta_0}{2v} \right).$$

Sia ora nel piano $\zeta = 0$ il vettore luminoso della nostra onda definito dalle sue componenti

$$(5) \quad E_x = E_0 \cos \alpha_0 \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad E_y = E_0 \sin \alpha_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

ove α_0 è l'angolo compreso fra il piano di vibrazione ed il piano $y = 0$ ⁽¹⁾. Ammettendo nel mezzo un'attività quale quella considerata, nel piano $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_0$ il vettore luminoso avrà assunto la forma

$$(6) \quad \begin{cases} E_x = E_0 \cos(\alpha_0 + \alpha) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\tilde{\alpha}_0}{\lambda} \right) \\ E_y = E_0 \sin(\alpha_0 + \alpha) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\tilde{\alpha}_0}{\lambda} \right) \end{cases}$$

ove si è posto $\lambda = vT$. Le sue due componenti secondo gli assi coordinati, essendo α funzione del tempo, non sono più sinusoidali; trasformando $\cos(\alpha_0 + \alpha)$ e $\sin(\alpha_0 + \alpha)$ in prodotti applichiamo le note relazioni ⁽²⁾

$$\cos(m \sin \vartheta) = J_0(m) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(m) \cos 2n\vartheta$$

$$\sin(m \sin \vartheta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(m) \sin(2n+1)\vartheta$$

nelle quali è indicata con $J_k(m)$ la funzione di Bessel di primo tipo, di ordine k e di argomento m . Con alcune ulteriori trasformazioni formali le (6) possono tradursi in forma di serie di seni e coseni di argomento

$$(7) \quad 2\pi \left[\left(\frac{1}{T} \pm \frac{k}{\tau} \right) t - \left(\frac{1}{T} \pm \frac{k}{2\tau} \right) \frac{\tilde{\alpha}_0}{v} \right]$$

ove k è un numero intero positivo o nullo; le due vibrazioni si spezzano così in componenti sinusoidali di frequenza

$$(8) \quad \frac{1}{T} \pm \frac{k}{\tau}$$

propagantesi nel verso positivo dell'asse $\tilde{\alpha}$ con velocità differente e data da

$$(9) \quad v \frac{\tau \pm kT}{2\tau \pm kT}.$$

(1) La distribuzione del campo determinata con le (2) equivale in sostanza a considerare il piano $\tilde{\alpha} = 0$ come piano di discontinuità separante due mezzi l'uno inattivo e l'altro attivo; tale piano potrà intendersi come piano di incidenza per l'onda che, attraversandolo, penetra nel mezzo attivo; a tutto rigore la forma della vibrazione nel primo mezzo non è deducibile semplicemente dalle (5) in quanto ha luogo a considerare anche per la riflessione, come è fatto più oltre per la rifrazione, la variabilità delle proprietà ottiche del secondo mezzo in funzione del tempo, il che implica in genere una discontinuità dell'indice di rifrazione nel piano $\tilde{\alpha} = 0$. Poichè la diversità di indice è però minima se ne è trascurata per semplicità la considerazione.

(2) Cfr., p. es., GRAY e MATHEWS, *Treatise on Bessel functions* ecc., Londra, 1922, p. 32.

L'ampiezza delle componenti di frequenza (8) si riscontra in fine essere

$$(10) \quad \begin{cases} E_{ox}^{(k)} = E_0 \left| \cos \left(\alpha_0 + k \frac{\pi}{2} \right) J_k \left(\frac{2Vb_0v}{\omega} \sin \frac{\omega \chi_0}{2v} \right) \right| \\ E_{oy}^{(k)} = E_0 \left| \sin \left(\alpha_0 + k \frac{\pi}{2} \right) J_k \left(\frac{2Vb_0v}{\omega} \sin \frac{\omega \chi_0}{2v} \right) \right| \end{cases}$$

a seconda che si consideri quella lungo l'asse x o rispettivamente lungo l'asse y ⁽¹⁾.

Interpretiamo ora i risultati ottenuti: osservando la (4) si rileva che l'angolo α di cui nel piano $\chi = \chi_0$ appare in un certo istante ruotato il piano di polarizzazione della luce può riguardarsi funzione sinusoidale del tempo di ampiezza $\frac{2Vb_0v}{\omega} \sin \frac{\omega \chi_0}{2v}$; poichè per $\chi_0 \neq 0$ si ha $|\alpha| < |Vb_0\chi_0|$ si rileva che α è sempre minore dell'angolo di rotazione ottenibile in eguali condizioni con un campo costante di intensità b_0 : raggiunge in valore assoluto il suo massimo $2Vb_0v/\omega$ là ove $\chi_0 = (2n+1)\pi v/\omega$ essendo n un intero positivo o nullo; dove al contrario $\chi_0 = 2n\pi v/\omega$ si ha $\alpha = 0$, cioè la luce riassume in tali piani lo stato di polarizzazione che aveva nel piano $\chi = 0$: In questi stessi piani le due componenti secondo gli assi x e y sono esattamente monocromatiche, mentre per ogni altro valore di χ_0 , come si rileva dalle (10), esse appaiono scisse in componenti di varie frequenze, poste fra loro alla distanza costante $1/\tau$ e le cui ampiezze sono date dalle stesse (10). Nel caso particolare in cui per $\chi = 0$ il piano di polarizzazione coincida con uno dei piani coordinati le successive componenti risultano alternativamente polarizzate ad angolo retto. Il fenomeno considerato si differenzia pertanto dall'effetto Faraday ottenibile con campo costante in primo luogo perchè la rotazione non aumenta indefinitamente con l'aumentare del percorso della luce nel mezzo attivo, ma raggiunto un certo massimo torna poi a diminuire: inoltre all'uscita del mezzo in conseguenza della variabilità dell'angolo di rotazione la luce non può più essere estinta da un nicol convenientemente orientato, come se fosse parzialmente depolarizzata: infine la luce incidente monocromatica appare all'emergenza spezzata in componenti di frequenza diversa che sembrano generarsi nel mezzo attivo.

Per avere un'idea concreta dell'andamento del fenomeno consideriamo come esempio un campo magnetico alternato per cui $1/\tau = 5 \cdot 10^8$, frequenza

(1) Supponendo che il piano $\chi = \chi_0$ limiti l'azione del campo nel mezzo, cioè che per $\chi > \chi_0$ sia $b_\chi = 0$, la forma della vibrazione emergente attraverso tale piano dal mezzo attivo può considerarsi molto approssimativamente determinata dalle (10): a tutto rigore, anche in questo caso occorrerebbe considerare la discontinuità dell'indice di rifrazione e la conseguente riflessione sul piano $\chi = \chi_0$.

realizzabile con i mezzi della tecnica moderna: si ha così, assumendo il valore della velocità della luce nel vuoto, $\pi v/\omega = 30$ cm., il che vuol dire che quando la luce attraversa uno spessore di 30 cm. del mezzo attivo, la rotazione istantanea ottenibile è la massima, e, come si vede dalla (4), ammonta a circa il 64 % di quella che si potrebbe avere con un campo costante di valore uguale al valor massimo del campo alternato. Qualora la lunghezza d'onda della luce fosse di 6000 \AA la distanza fra le varie componenti all'emergenza sarebbe di $6 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$ cioè queste sarebbero risolubili con l'uso di uno spettroscopio interferenziale. L'intensità delle varie componenti si rileva dalle (10) e dipende fra l'altro dalla lunghezza del percorso della luce nel mezzo: con l'ausilio della relazione (1)

$$J_0^2(m) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(m) = 1$$

si verifica che le ampiezze delle componenti emergenti sono, come è naturale, minori dell'ampiezza della luce incidente, e che l'intensità luminosa di questa si ritrova interamente nelle intensità di quelle.

Nel solfuro di carbonio, per un campo del valor massimo di 800 gauss, si ha che $2Vh_0 v/\omega$ è circa 0,2 radianti, assumendo per la costante di Verdet il valore statico: Qualora possa sperimentarsi sul percorso necessario per avere la rotazione massima all'emergenza l'ampiezza della prima e seconda componente laterale risulta circa il 10 % e rispettivamente il 0,5 % dell'ampiezza della luce incidente; disponendo all'uscita un nicol incrociato con il piano di polarizzazione della luce all'ingresso si vedrebbe pertanto al posto della riga centrale un doppietto di due righe distanti fra loro $1,2 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}$, ma di intensità circa 100 volte minore.

Per riassumere i risultati del presente studio possiamo asserire che, qualora per le condizioni sperimentali occorra tener conto della variazione del campo nel tempo impiegato della luce a propagarsi nel mezzo, è da attendersi una diminuzione, che può essere anche rilevante, della rotazione massima in confronto a quella calcolabile con la formula di Verdet: in ogni caso la luce all'uscita risulta generalmente spezzata in componenti di frequenza diversa, ma l'entità del fenomeno è minima anche, come si è visto, nel caso di un campo magnetico assai intenso in relazione alla estensione ed alla frequenza di variazione.

(1) Cfr. GRAY ecc., op. cit., p. 44.

Fisica chimica. — *Considerazioni sull'energia potenziale molecolare* ⁽¹⁾. Nota di P. GUARESCHI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. L. ROLLA.

La legge di attrazione molecolare per i liquidi può essere espressa con la relazione generale $f = \Phi(q)$ dove q è la distanza molecolare essendo $\Phi(q) = -\frac{c}{q^n}$ e dove c è una costante universale indipendente da q . La coesione del fluido C , dicendo con v il volume specifico, è data dalla relazione

$$C = \frac{1}{3v} \sum q \Phi(q)$$

e se N_1 è il numero di molecole per unità di volume sarà

$$(1) \quad C = \frac{2 \pi c N_1^2}{3(n-4)q^{n-4}}.$$

Nel caso dei liquidi l'Edser arriva ad una espressione della tensione superficiale γ del fluido data da

$$(2) \quad \gamma = \frac{2 \pi c N_1^2}{16(n-5)q^{n-5}}$$

e il rapporto

$$\frac{\gamma}{C} = \frac{3(n-4)}{16(n-5)} q = \frac{q}{m_1} \quad \text{dove} \quad m_1 = \frac{16(n-5)}{3(n-4)}.$$

Per tutti i liquidi egli ha trovato che il valore di m_1 è compreso fra 4 e 5 ciò che corrisponde ad una legge di attrazione molecolare per $f = -\frac{c}{q^n}$ dove n è compreso fra 8 e 12. Prendendo, come fa l'Edser, il valore 4 si scriverà allora che la coesione C è data in funzione della tensione superficiale del fluido da

$$(3) \quad C = \frac{4\gamma}{q}.$$

1. Se si considerano però due molecole che siano poste ad una distanza q fra i loro centri e indichiamo con δ il diametro d'azione molecolare noi

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Genova.

(2) Nella seduta del 5 dicembre 1937.

diremo che l'energia potenziale delle due molecole è una funzione di q e in caso particolare di δ . Se si applica a tale sistema la relazione generale della dinamica e cioè

$$(3 \text{ bis}) \quad E = F + U(q)$$

dove E rappresenta l'energia interna, F l'energia cinetica e $U(q)$ l'energia potenziale si avrà modo di conoscere U quando si conosca E ed F .

Per intanto considerando le due molecole agenti l'una sull'altra secondo una forza f già sopra definita si può formulare l'ipotesi, e i risultati numerici seguenti mi permettono di ritenerla attendibile, che l'energia potenziale di una molecola sia proporzionale al volume della semisfera di azione mutua $V/2$ delle due molecole, potremo quindi scrivere $U(q) = CV/2$ dove C è un coefficiente di proporzionalità che si identifica con la coesione molecolare. Ci è allora facile esprimere l'energia potenziale in funzione della tensione superficiale γ del fluido, di cui abbiamo abbondanti dati sperimentali, per modo che fatte le debite sostituzioni si ottiene il seguente valore di $U(q)$ e cioè

$$(4) \quad U(q) = \frac{\pi}{3} \gamma q^2.$$

Nella (4) per una determinata temperatura, è necessario conoscere sia γ che q . Nel caso dei liquidi i valori di γ sono facilmente conosciuti mentre per q si può ammettere, come fece già l'Edser, che il suo valore coincida col valore del diametro d'azione molecolare ossia che sia $q = \delta$ per cui la (4) diviene nel caso particolare dei liquidi $U(\delta) = \frac{\pi}{3} \gamma \delta^2$ che appunto ci permette di calcolare il valore dell'energia potenziale molecolare $U(q)$.

Nella tabella I io ho calcolato alcuni valori per qualche liquido. Per avere un controllo di tali valori si può, ritenendo valida la relazione generale (3 bis), calcolare i valori di E e di F .

In alcune mie Note⁽¹⁾ ho introdotto la costante d'azione molecolare o molquanto d'azione H che risulta proporzionale alla costante h di Planck. Dicendo con ν la frequenza di urto delle molecole considerando per semplicità il liquido al punto di ebollizione si può esprimere l'energia totale con la relazione $E = H\nu$. Se ni, in prima approssimazione, per i liquidi alla temperatura di ebollizione T_0 , si trascura l'energia di rotazione propria delle molecole si potrà con un certo errore in difetto considerare l'energia cinetica pari a $3/2 kT_0$. Si ottengono allora i seguenti valori abbastanza concordanti.

(1) P. GUARESCHI, *Sulla viscosità dei gas*. « Rend. Reale Acc. dei Lincei », vol. XXIII, ser. 6^a, aprile 1936; *Sulla viscosità dei liquidi*. « Idem », maggio 1936; *Sul calcolo dei calori latenti di ebollizione*. « Idem », maggio 1936.

TABELLA I.

Liquidi alla temperatura d'ebollizione T_0	$U(\delta)$ calcolato con la (4) ergs	$U(\delta) = E - F$ ergs	$E = H\vartheta$ ergs	$F = 3/2 kT_0$ ergs
Acqua	$8.6 \cdot 10^{-14}$	$9.54 \cdot 10^{-14}$	$17.1 \cdot 10^{-14}$	$7.56 \cdot 10^{-14}$
Benzene. . . .	5.35	7.8	15	7.2
Tetracloruro di C	5.4	7.4	14.5	7.1
Solfuro di C . .	6.2	6.6	13.1	6.5

Per le restrizioni fatte sopra, specialmente nell'espressione dell'energia cinetica, i valori non danno una concordanza perfetta, ma ritengo che per ora sia sufficiente a dimostrare che i valori dati dalla (4) sono abbastanza attendibili almeno per i fluidi in vicinanza del punto di ebollizione.

2. Si è scritto per l'energia interna di una molecola la relazione generale $E = F + U$. Vogliamo ora mettere in luce che introducendo il quanto d'azione molecolare come già da me definito, e rappresentando la energia totale col prodotto $H\nu$ dove ν è la frequenza d'urto delle molecole si può ottenere per il fluido sia allo stato gassoso che allo stato solido i valori conosciuti per i periodi di oscillazione che di vibrazione.

Io ho con la (4) espresso l'energia potenziale con la seguente formula dove per $q = \delta$ si ha

$$(5) \quad U(\delta) = \frac{\pi}{3} \gamma \delta^2.$$

Osservando la (4) e quindi la (5) si vede che essa è della forma $U(q) = K \frac{q^2}{2}$ ossia U non rappresenta che il potenziale di una forza del tipo $f_1 = -Kq$ dove f_1 è la forza alla quale è soggetto un oscillatore armonico moventesi con frequenza che diremo ν_0 e in cui q rappresenta allora la elongazione.

La molecola considerata, e soggetta alla forza $f_1 = -Kq$, compie delle oscillazioni armoniche circolari intorno ad un punto e la cui ampiezza e frequenza potranno essere calcolate in dipendenza delle condizioni iniziali.

Si potrà allora calcolare la frequenza di oscillazione con la nota relazione

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

dove m rappresenta la massa della molecola.

Poichè per la (5) si può ottenere subito il valore di K che sarà $K = \frac{2\pi}{3}\gamma$, allora la frequenza di oscillazione della molecola diviene $\nu_0 = \frac{\gamma}{6\pi m}$.

Si può far variare q fra i limiti $q = \delta$ e $q = l$ dove l è il libero percorso delle molecole del fluido allo stato gassoso. Ripigliando la relazione generale

$$(6) \quad F + U(q) = E = f(H\nu)$$

si nota che i vari stati, solido, liquido e gassoso di un fluido dipendono dal valore di q e dal valore dell'energia cinetica sia di traslazione che di rotazione.

STATO LIQUIDO. - Si consideri un determinato fluido allo stato liquido. Si può ritenere che al limite sia nulla l'energia cinetica di traslazione e rotazione e cioè sia $F = 0$. La (6) diviene $U(q) = E = f(H\nu)$ ossia $H\nu = \frac{\pi}{3}\gamma q^2$ e poichè $\gamma = 6\pi m\nu_0^2$ sarà $U(q) = 2\pi^2 m\nu_0^2 q^2 = H\nu$ e per $q = \delta$ dicendo con α il coefficiente di associazione molecolare sarà

$$\nu_0^2 = \frac{H\nu}{2\pi^2 \alpha m \delta^2} \quad \text{ossia} \quad \nu_0 = \frac{1}{\pi\delta} \sqrt{\frac{H\nu}{2\alpha m}};$$

Per lo stato solido deve essere $\nu = \nu_0$, si avrà

$$(7) \quad \nu_0 = \frac{H}{2\pi^2 \alpha m \delta^2}.$$

La (7) ci permette di calcolare i valori di ν_0 riportati nella tabella II per lo stato solido⁽¹⁾.

TABELLA II.

Stato solido	δ cm.	m gr.	ν_0
Ghiaccio	$3.75 \cdot 10^{-8}$	$29.7 \cdot 10^{-24}$	$6.05 \cdot 10^{12}$
Benzene	5.192	128	1.78
Tetracloruro di C. . . .	4.994	252	0.95
Solfuro di C.	4.618	125	2.34

Dalla tabella II si nota che i valori di ν_0 ossia la frequenza di vibrazione della molecola per lo stato solido dati dalla relazione generale (6) e dalla (4)

(1) La (7) si può identificare con la formula di Lindeman come vedremo in altra mia Nota.

conducono agli stessi valori o almeno allo stesso ordine di grandezza della frequenza di vibrazione dell'atomo secondo le vedute di Planck, Einstein, Nernst ecc.

STATO GASSOSO. — Si consideri la molecola di un fluido al punto critico per modo che nella equazione generale (6) si potrà scrivere $U(q) = 0$ essendo $\gamma = 0$. Si avrà allora $F = E = f(H\nu)$ e se in via di grande approssimazione poniamo che allo stato gassoso sia $F = 3/2 kT_c = H\nu$ (dove T_c è la temperatura critica) poichè $U(q) = 0$ sarà pure $\nu_0 = 0$ cioè la frequenza di oscillazione della molecola sarà nulla e quindi il moto molecolare oltre il punto critico si riduce ad un movimento di traslazione e di rotazione propria della molecola come vuole appunto la teoria cinetica dei gas.

In tal caso sarà $q = l$ dove l è il libero percorso. Nella tabella III sono stati calcolati i valori di q che, come si vede, sono molto prossimi ai valori del libero percorso molecolare l , quale è definito dalla teoria.

TABELLA III.

Fluido allo stato di vapore al punto critico T_c	Punto critico T_c	m gr.	ν	$q = \sqrt{\frac{2H}{m\nu}}$	libero percorso l al punto critico T_c
Acqua	648	$29.7 \cdot 10^{-24}$	$14 \cdot 10^{-9}$	$76 \cdot 10^{-7}$	$69.5 \cdot 10^{-7}$
Benzolo	561	128	12.4	39	35.5
Tetracloruro di C .	556	252	12	28.2	52
Solfuro di C . . .	553	125	10.8	42.2	44.2
Alcool etilico . .	516	76	10	56.4	50.2
Alcool metilico . .	513	106	10.5	46.6	61
Cloroformio . . .	532	197	8.5	38	42.3
Acetato di metile .	523	122	12.4	40	27.2

CONCLUSIONE. — Partendo dall'equazione generale della dinamica applicata al sistema di molecole e dalla (4) da me stabilita nel paragrafo I si può considerare le molecole come degli oscillatori soggetti ad una forza del tipo $f_1 = -Kq$. Variando il valore della elongazione q dai valori $q = \delta$ per lo stato solido, a $q = l$ per i gas dove l è il libero percorso delle molecole allo stato gassoso si ottiene nel primo caso il valore di ν_0 della frequenza di vibrazione dell'ordine di grandezza di quello trovato per gli atomi da Einstein e nel secondo caso si ottiene $\nu_0 = 0$ corrispondente alle vedute della teoria cinetica dei gas.

Chimica fisica. — *Sul calcolo dei calori molecolari dei liquidi*⁽¹⁾. Nota di P. GUARESCHI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. ROLLA.

In altra mia Nota⁽³⁾ ho scritto per l'energia totale delle molecole la relazione generale $E = U(q) + F = f(H\nu)$ e come valore dell'energia potenziale molecolare ho dato il valore

$$(1) \quad U(q) = \frac{\pi}{3} \gamma q^2$$

dove q è la distanza media fra i centri delle molecole e γ è la tensione superficiale del liquido ad una data temperatura.

Il calore specifico è dato da

$$C = \frac{dE}{dT}$$

e quindi si dovrà scrivere

$$(2) \quad C = \frac{dU(q)}{dT} + \frac{dF}{dT}.$$

Per il momento a noi interessa verificare la validità dell'espressione da noi data dell'energia potenziale molecolare. Poichè questa nei liquidi è preponderante rispetto all'energia cinetica per semplificare i nostri calcoli, anche ottenendo dei valori in difetto, trascureremo in via di prima approssimazione, il valore dell'energia cinetica sia di traslazione che di rotazione delle molecole.

Porremo quindi $dF = 0$ e quindi il calore molecolare si ridurrà per i liquidi, e in via di prima approssimazione, alla espressione

$$(3) \quad C = \frac{dU(q)}{dT}.$$

Non avremo che da derivare la (1) rispetto a T . Per l'ipotesi già fatta che nei liquidi la distanza fra i centri si riduce al valore del diametro δ d'azione molecolare e poichè entro limiti ristretti della temperatura si hanno

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Genova.

(2) Nella seduta del 5 dicembre 1937.

(3) P. GUARESCHI, *Considerazioni sull'energia potenziale molecolare*. « Rend. Reale Acc. dei Lincei », dicembre 1937.

variazioni che si possono in un primo tempo trascurare, si potrà ritenere q indipendente dalla temperatura per variazioni non troppo grandi di questa.

Si avrà allora il valore del calore molecolare dato da

$$(4) \quad C = \frac{\pi}{3} q^2 \frac{d\gamma}{dT}$$

e per $q = \delta$

$$(5) \quad C = \frac{\pi}{3} \delta^2 \frac{d\gamma}{dT}.$$

Nella cinetica delle superfici liquide si ritiene in via sufficientemente approssimata che il rapporto $\frac{d\gamma}{dT}$ sia costante almeno entro certi limiti di temperatura non troppo ampi.

Il calore molecolare risulterà allora proporzionale al quadrato della distanza

$$C = \frac{\pi}{3} \frac{d\gamma}{dT} q^2$$

fra i centri di due molecole e nel caso particolare di $q = \delta$ il calore molecolare sarà proporzionale alla terza parte della superficie della sfera d'azione molecolare e cioè

$$C = \frac{d\gamma}{dT} \frac{\pi}{3} \delta^2.$$

Esprimendo il calore molecolare in calorie/grado-grammomolecola si avrà

$$(6) \quad C = \frac{\pi}{3} \frac{d\gamma}{dT} \frac{N}{I} q^2$$

e per $q = \delta$

$$C = \frac{\pi}{3} \frac{d\gamma}{dT} \frac{N}{I} \delta^2$$

dove N è la costante di Avogadro e I l'equivalente dinamico del calore, che è uguale a $4.2.10^7$ ergs./caloria.

I valori sono calcolati nella tabella I ma si deve osservare che la (6) non fornisce il valore dei calori molecolari ma bensì quello dei calori atomici. Per ottenere i calori molecolari è necessario moltiplicare tale valore per il numero degli atomi formanti la molecola. È inoltre necessario, naturalmente, moltiplicare i valori ottenuti per il coefficiente di associazione per avere il calore molecolare della molecola associata. Dicendo con n il numero degli atomi nella molecola e con α il coefficiente di associazione si avrà

$$(7) \quad C_M = \alpha n C = \alpha n \frac{\pi}{3} \frac{d\gamma}{dT} \frac{N}{I} \delta^2.$$

TABELLA I.

Liquidi	$\frac{d\gamma}{dT}$	δ	C calore medio atomico cal./gr. at. k.	n	α	C _M (sperimentale) cal./gr. mol. k.	C _M (calcolato con la (7)) cal./gr. mol. k.
Benzene	0.13	$3.7 \cdot 10^{-8}$	2.7	12	1	34	32.4
Alcool etilico . .	0.08	3.3	1.32	9	2.24	32.8	26.55
Alcool metilico .	0.071	4.0	1.69	6	1.79	18.9	18.25
Joduro d'etile . .	0.137	4.8	4.8	8	—	25.2	38.4
Cloroformio. . .	0.113	4.79	3.93	5	1	27.7	19.65
Solfuro di carbonio	0.1607	4.35	4.5	3	1	18.1	13.5
Bromo	0.53	3.2	8.2	2	—	17.1	16.4
Acqua	0.16	3.756	2.4	3	2.1	18	15.12

Metalli alla temperatura di fusione.

	$\frac{d\gamma}{dT}$	δ	C calore atomico
Hg	0.3	$3.6 \cdot 10^{-8}$	5.95
Sn	0.089	4.6	2.87
Na	0.072	5.14	2.89
Pb	0.096	4.8	3.37
Cu	0.74	2.17	5.3
Fe	0.375	3.2	5.85
Sb	0.063	4.7	2.12

I valori calcolati risultano, come si era previsto, in difetto, ma ad ogni modo non presentano scarti notevoli se si toglie il joduro di etile. Quello però che ritengo utile notare è che la formula (6) nella quale intervengono dati molecolari, quali si ritengono siano la tensione superficiale, fornisce invece valori medi quasi esatti del calore atomico. Si dovrebbe quindi ammettere, che almeno sulla superficie liquida, la tensione superficiale sia una forza di valenza che si esercita fra gli atomi della molecola ossia si deve pensare che l'attrazione molecolare non avvenga per azione fra il complesso molecolare, ma attraverso un legame diretto fra atomo e atomo contenuto nelle diverse molecole. Dai valori ottenuti con la (7) e dai valori sperimentali, specialmente per i metalli allo stato fuso è possibile ottenere il rapporto fra il calore atomico dovuto alla energia cinetica e quello dovuto all'energia potenziale.

Chimica fisica. — *Sulla velocità di dissoluzione del piombo negli acidi*⁽¹⁾. Nota III di G. TEDESCHI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. O. SCARPA.

È noto che nella dissoluzione dei metalli negli acidi una aggiunta di sali neutri alla soluzione corrodente esercita generalmente una notevole influenza sulla velocità della reazione. Per spiegare tale fenomeno e per avere maggior numero di dati su cui basare l'interpretazione della reazione di attacco da parte degli acidi, sono state eseguite numerose ricerche le quali hanno condotto a ritenere che, in molti casi⁽³⁾, l'azione dell'aggiunta dei sali trova una soddisfacente spiegazione nelle variazioni della costante di diffusione.

Nel caso in cui la reazione appare dominata dal fenomeno chimico è stato però osservato che la velocità della reazione viene aumentata in misura molto maggiore per effetto di una aggiunta di sali neutri. Un'interpretazione del fenomeno che sia soddisfacente non è stata ancora data. Centnerszwer in un primo tempo⁽⁴⁾ attribuiva la dissoluzione dei metalli nell'acido cloridrico all'azione delle molecole indissociate e spiegava l'azione dell'aggiunta di un cloruro alcalino adducendo che questa faceva retrocedere il grado di dissociazione dell'acido, cioè aumentava il numero di molecole indissociate. Tale punto di vista urta evidentemente contro le attuali conoscenze sugli elettroliti forti e Centnerszwer⁽⁵⁾, in seguito a una critica di Thiel e Eckell⁽⁶⁾, si limitò a constatare che l'azione dei sali neutri dipende oltre che dalla concentrazione anche dalla natura degli anioni del sale aggiunto.

Anche nel caso del piombo l'aggiunta di sali neutri all'acido accelera notevolmente la velocità della reazione.

Ad esempio lo sviluppo di idrogeno che si osservava⁽⁷⁾ mettendo alcuni grammi di piombo spugnoso a contatto con una soluzione di acido cloridrico Normale era di $0,37 \cdot 10^{-7}$ grammimolecole al minuto primo

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica e Chimica fisica del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 5 dicembre 1937.

(3) C. V. KING e M. M. BRAVERMAN, « J. Am. Chem. Soc. », 54, 1744 (1932); C. V. KING e W. H. CATHCART, « J. Am. Chem. Soc. », 59, 63 (1937).

(4) M. CENTNERSZWER e W. ZABLOCKI, « Zs. Phys. Chem. », 122, 455 (1926).

(5) M. CENTNERSZWER, « Zs. Phys. Chem. », A 141, 297 (1929).

(6) A. THIEL e J. ECKELL, « Zs. Elektrochem. », 33, 370 (1927).

(7) Per la descrizione e i dettagli del metodo seguito per effettuare le esperienze rimando alla Nota I (« Rend. R. Accad. Naz. Lincei », XXV, 641, 1937).

mentre saliva al valore di $3,4 \cdot 10^{-7}$ per un'aggiunta di 2 grammimolecole di KCl per litro della soluzione dell'acido.

Anche coll'acido solforico si nota un aumento della velocità di reazione, benchè più limitato, e si è avuto, ad esempio, un aumento del 30 % circa nello sviluppo di idrogeno aggiungendo a una soluzione 1,75 Molare di acido solforico del solfato potassico nella proporzione di una grammimolecola per litro.

Per studiare in modo quantitativo il fenomeno nel caso dell'acido cloridrico ho eseguito le seguenti misure, determinando con i metodi già descritti le velocità di reazione rispetto a una serie di soluzioni che contenevano quantità variabili di HCl e KCl, ma in proporzioni tali che la somma della concentrazione dell'acido cloridrico, che chiamo C_a , più quella del cloruro potassico, C_s , risultava costante: nel caso qui considerato era $C_a + C_s = 3$. In tal modo si aveva una serie di soluzioni circa di uguale forza ionica per cui veniva notevolmente diminuita la probabilità di complicazioni dovute a importanti variazioni dei coefficienti di attività.

La tabella I riporta i risultati di una serie di queste misure.

TABELLA I.

Volume palloncino = 129 cc. Pb \approx 15 gr.
Volume Pb + soluzione = 82 cc. Temperatura 40°
Volume rimanente = 47 cc. $C_a + C_s = 3$

C_a	$\frac{C_s}{C_a}$	$\frac{\Delta P}{\Delta \tau}$	$\frac{\Delta n}{\Delta \tau}$
3	0	4	$6,91 \cdot 10^{-7}$
2.5	0.2	3.93	$6,8 \cdot 10^{-7}$
2.02	0.49	3.44	$5,95 \cdot 10^{-7}$
1.57	0.91	3.51	$6,06 \cdot 10^{-7}$
1.16	1.59	3.15	$5,45 \cdot 10^{-7}$
0.99	2.03	3.06	$5,28 \cdot 10^{-7}$
0.80	2.75	2.88	$4,98 \cdot 10^{-7}$
0.56	4.36	2.75	$4,75 \cdot 10^{-7}$
0.43	5.98	2.12	$3,66 \cdot 10^{-7}$
0.32	8.38	1.47	$2,54 \cdot 10^{-7}$

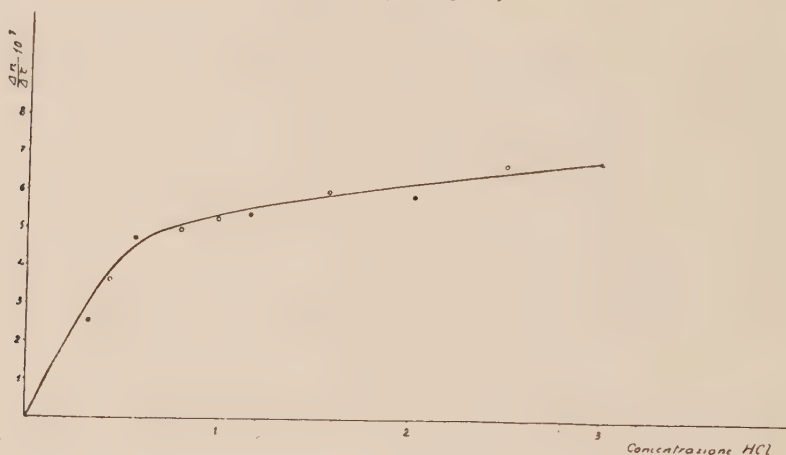
C_a = concentrazione dell'acido cloridrico (Mol/litro).

C_s = » del KCl »

$\frac{\Delta P}{\Delta \tau}$ = aumento della pressione per un minuto in mm di tetralina ($d_{15} = 0,973$).

$\frac{\Delta n}{\Delta \tau}$ = grammimolecole di idrogeno sviluppate in un minuto.

Considerando la precedente tabella si può constatare che per piccoli valori del rapporto C_s/C_a la velocità varia assai poco con il variare della concentrazione dell'acido cloridrico (cioè l'aumento dovuto al KCl compensa quasi completamente la diminuzione che si sarebbe avuta per la minor concentrazione dell'HCl) mentre per valori grandi del rapporto C_s/C_a essa è assai influenzata dal variare della concentrazione dell'acido e tende ad annullarsi col tendere a zero di questa. (V. figura).



Questo fatto fa pensare alla possibilità che a partire da un determinato valore del rapporto suddetto possa subentrare un nuovo fenomeno al quale attribuire il diverso andamento della reazione.

Per poter decidere se questo avviene effettivamente o se invece la reazione è dominata dagli stessi fattori nelle diverse condizioni, ho determinato il coefficiente di temperatura per alcuni valori del rapporto C_s/C_a . Evidentemente se si verificasse la seconda ipotesi il coefficiente di temperatura dovrebbe rimanere pressochè costante.

La tabella II riporta i dati di queste determinazioni.

TABELLA II.

$\frac{C_s}{C_a}$	$\left(\frac{\Delta n}{\Delta \tau}\right) t = 30^\circ$	$\left(\frac{\Delta n}{\Delta \tau}\right) t = 40^\circ$	$\left(\frac{\Delta n}{\Delta \tau}\right) 40^\circ / \left(\frac{\Delta n}{\Delta \tau}\right) 30^\circ$
0	$3.29 \cdot 10^{-7}$	$6.06 \cdot 10^{-7}$	1.84
2.36	$2.85 \cdot 10^{-7}$	$4.39 \cdot 10^{-7}$	1.54
9	$2.01 \cdot 10^{-7}$	$2.61 \cdot 10^{-7}$	1.3

Dalla tabella II risulta che il coefficiente di temperatura varia notevolmente per i diversi valori di C_s/C_a e per valori alti è dell'ordine di grandezza di quelli presentati dalle reazioni dominate dalla diffusione. Si giunge

quindi alla singolare conclusione che al crescere del rapporto C_s/C_a la velocità della reazione diminuisce mentre il fenomeno della diffusione sembra tendere a prendere il predominio rispetto ai fattori chimici.

Riassumendo, i fatti osservati sono:

1) Un'aggiunta di sali neutri alla soluzione dell'acido aumenta notevolmente la velocità con cui il piombo spugnoso viene disciolto. In particolare nel caso dell'acido cloridrico l'entità dell'aumento della velocità, per un'aggiunta di cloruro potassico, è tale che non può certo essere attribuito ad una eventuale variazione della costante di diffusione.

2) Nel caso dell'acido cloridrico, se la forza ionica della soluzione rimane costante, l'andamento della reazione dipende strettamente dal rapporto fra la concentrazione del cloruro potassico e quella dell'acido cloridrico. Con l'aumentare di questo rapporto la reazione diminuisce di velocità, prima lentamente e poi più rapidamente, e tende ad assumere l'andamento caratteristico delle reazioni dominate dalla diffusione.

Ringrazio vivamente il chiar.mo prof. O. Scarpa per il suo appoggio e il suo benevolo incitamento.

Elettrochimica. — *Studio sulla orientazione preferenziale delle cristalliti in alcuni depositi anormali di rame elettrolitico* ⁽¹⁾.
Nota di V. MONTORO, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. O. SCARPA.

Per consiglio del prof. Scarpa ho preso in esame due tipi di escrescenze catodiche di rame elettrolitico per determinare con metodo röntgenografico le caratteristiche di orientazione delle cristalliti ⁽³⁾.

I campioni si presentano l'uno in forma di fili lunghi e sottili; l'altro in forma di aghetti di pochi millimetri di lunghezza, impiantati isolatamente e a ciuffi sulla lastra catodica. Nelle citate Note del prof. Scarpa sono riportate le fotografie dei due campioni.

Per l'esame röntgenografico furono prelevati pezzetti molto sottili dei filamenti e aghetti isolati del secondo campione ed essi furono sottoposti a prova in una grossa camera cilindrica, mantenendoli in rotazione durante l'esposizione.

Gli spettrogrammi ottenuti con i filamenti e con gli aghetti risultarono di aspetto nettamente diverso. E infatti mentre i filamenti presentano le normali righe Debye-Scherrer, come se si trattasse di comuni fili metallici

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica ed Elettrometallurgia del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 5 dicembre 1937.

(3) O. SCARPA, «Rendiconti Lincei», XXV, 533, 1937; ID., «Rendiconti Lincei», XXVI, 135, 1937.

ottenuti per trafilatura, gli aghi presentano degli effetti di diffrazione localizzati.

Come conclusione immediata si può dire che mentre nei filamenti i cristalli elementari sono orientati in tutte le direzioni, negli aghi hanno invece una direzione sensibilmente comune.

Per caratterizzare l'orientazione preferenziale dei cristalli negli aghi basta notare che sulla linea equatoriale dello spettrogramma relativo, le riflessioni $(2\ 2\ 0)$, α e β , sono ben localizzate, mentre mancano tutte le altre riflessioni.

Questa caratteristica prova che i cristalli sono orientati con l'asse $[1\ 1\ 1]$ lungo l'asse geometrico degli aghi.

In quanto ai filamenti, con un attento esame delle riflessioni lungo la linea equatoriale dello spettrogramma, si può notare che le riflessioni $(2\ 2\ 0)$, α e β , e solamente esse, sono leggermente più accentuate nella parte centrale.

Se ne ricava che pur avendosi nei filamenti cristalli orientati in ogni direzione, se ne trovano in numero maggiore disposti con l'asse cristallografico $[1\ 1\ 1]$ lungo l'asse geometrico dei filamenti.

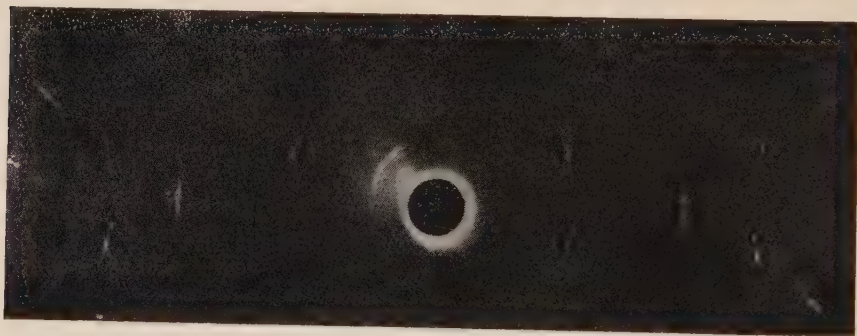


Fig. 1 - Spettrogramma di un aghetto
Antic. Fc $\Phi = 56.7$ mm.

Per una indagine più approfondita sugli aghi, ho avuto l'opportunità di servirmi del metodo di Polanyi⁽¹⁾, poichè, in grazia della forte orientazione preferenziale dei loro cristalli, essi possono essere studiati come cristalli unici.

Per questo scopo ho impiegato una camera cilindrica, a diametro più piccolo della precedente e molto più alta, in modo da potersi ottenere sul film diversi ordini di « Schichtlinien », dalla cui posizione, come è noto, si può ricavare per un cristallo aghiforme il periodo di identità lungo l'asse.

Dallo spettrogramma mostrato in fig. 1 e da altri simili ottenuti su parecchi aghetti si ricava, per il periodo di identità lungo l'asse degli aghi, un valore compreso fra 6.2 e 6.3 \AA e che in relazione alla nota costante

(1) R. GLOCKER, *Materialprüfung mit Röntgenstrahlen*. Springer, 1936.

reticolare del rame: $a = 3.6077 \text{ \AA}$ ⁽¹⁾ corrisponde approssimativamente alla diagonale del cubo elementare: $\sqrt{3} \cdot a = 6.249 \text{ \AA}$. Ciò significa che i cristalli elementari di cui si compongono gli aghi sono disposti con l'asse $[1\ 1\ 1]$ lungo l'asse geometrico degli aghi, così come si era ricavato dal primo spettrogramma.

Data questa orientazione dei cristalli negli aghi, per l'interpretazione dello spettrogramma è opportuno assumere come cella elementare il romboedro corrispondente al reticolo di traslazione semplice ⁽²⁾, riferendolo alla croce assiale esagonale.

Considerando in particolare le due riflessioni α e β della linea equatoriale, alle quali ora spettano gli indici $(1\ 1\ \bar{2}\ 0)$ ($d = 1.275 \text{ \AA}$) si ricava:

$$a_{(\text{esag.})} = d \cdot \left(\frac{4}{3} (h^2 + k^2 + hk) + \frac{l^2}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= d \cdot 2 = 2.550 \text{ \AA}$$

e inoltre:

$$c_{(\text{esag.})} = a_{(\text{esag.})} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 6.246 \text{ \AA}.$$

Si trova così per via indiretta il periodo di identità lungo l'asse degli aghi.

In conclusione, l'orientazione preferenziale dei cristalli negli aghi risulta di questo tipo:

$$[1\ 1\ 1] // \text{asse della fibra}$$

(asse geometrico degli aghi).

Per i filamenti questa stessa orientazione deve essere intesa come scarsamente preferenziale ⁽³⁾.

Per la costante reticolare ho trovato in ambedue i campioni valori che sono in buon accordo con la nota costante reticolare del rame (3.6077 \AA).

Ho trovato:

$$a_{200} = 3.606 \text{ \AA} \text{ negli aghi} \quad \text{e} \quad a_{200} = 3.608 \text{ \AA} \text{ nei filamenti.}$$

(1) LANDOLT-BÖRNSTEIN, Eg. III b, 1210, 1935.

(2) Confronta P. P. EWALD e C. HERMANN, *Strukturbericht*, 13, 1931.

(3) GLOCKER e KAUPP («Z. f. Physik.», 24, 121, 1924) sperimentando su lastre di rame ottenute elettrolizzando una soluzione *n* di solfato di rame hanno trovato una orientazione preferenziale diversa dal tipo qui descritto. Ciò non può meravigliare se si pensa, come oggi si ammette per i metalli cubici in genere (confronta R. GLOCKER, loc. cit.), che possono verificarsi per uno stesso metallo più tipi di orientazione preferenziale, in dipendenza dalla natura dell'elettrolita. A questo proposito è da ricordare che i campioni qui esaminati furono ottenuti in soluzioni di solfato di rame molto acidificate usando anodi fortemente impuri.

Parassitologia. — *Una specie asiatica di «Anopheles» rinvenuta in Etiopia* («*A. dthali* PATTON», 1905). Nota preventiva di A. CORRADETTI, presentata⁽¹⁾ dal Socio S. BAGLIONI.

Durante i mesi di aprile e maggio 1937 ho trovato nella regione del Semien, a circa 1300 metri di altezza, numerose larve di un *Anopheles* che non risulta ancora descritto per l'Africa tropicale, ma che era stato segnalato in India, Mesopotamia, Arabia, Palestina, Sinai, Belucistan e Waziristan.

La specie anofelica in questione è l'*A. dthali* PATTON, 1905, specie molto affine all'*A. rhodesiensis* THEOBALD, 1901, con il quale per molti anni è andato confuso. Fu soltanto nel 1931 che CHRISTOPHERS e PURI studiando l'*A. rhodesiensis* di Sierra Leone e confrontandolo con il supposto *A. rhodesiensis* presente in India si accorsero che quest'ultimo era notevolmente diverso e che corrispondeva invece alla descrizione dell'*A. dthali* data da PATTON nel 1905.

Secondo CHRISTOPHERS e PURI il territorio di distribuzione dell'*A. dthali* è esclusivamente mediterraneo-orientale, mentre quello dell'*A. rhodesiensis* è tipicamente etiopico. Il rinvenimento dell'*A. dthali* in una regione dello interno dell'Abissinia fa senz'altro modificare questa concezione, e quindi l'*A. dthali* deve entrare nel novero delle specie etiopiche.

Una descrizione morfologica della specie rinvenuta (larve e adulti), insieme con notizie sulla sua ecologia e sul suo *habitat*, comparirà in un prossimo numero della « Rivista di Parassitologia ».

Esemplari di adulti maschi e femmine e di larve di *A. dthali* sono depositati nella Sezione di Malariologia dell'Istituto di Sanità Pubblica in Roma.

(1) Nella seduta del 5 dicembre 1937.

Microbiologia. — *Studi sul genere «Trichosporon Behrend»*⁽¹⁾.
Nota di V. PUNTONI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Gli ifomiceti tallosporei (*Thallosporales* Vuill. 1910) vengono abitualmente divisi in due sottordini: *Blastosporineae* Vuill. 1911, che si riproducono per blastospore; ed *Arthrosporineae* Vuill. 1911, che si riproducono per artrospore.

Studi recenti hanno dimostrato l'esistenza di miceti che possono, al tempo stesso, riprodursi per blastospore, per artrospore e per elementi intermedi (blasto-artrospore).

I generi ai quali si attribuiscono questi miceti blasto-artrosporei sono: *Trichosporon* Behrend 1890, em. Ota 1926; *Proteomyces* Moses e Vianna 1913, em. Ciferri 1930; *Geotrichoides* Langeron e Talice 1932.

Senonchè studiando i miceti attribuiti da Langeron e Talice al genere *Geotrichoides* si è constatato che alcuni di essi debbono considerarsi come *Trichosporon* nel senso di Ota (specie *cutaneus*, *asteroides*, *balzeri*) mentre altri (specie *krusei*, *vulgaris*) non presentano mai artrospore tipiche, ma solo blastospore; per il che riteniamo che questo genere non sia omogeneo e che, emendato nel senso di sottrarvi i *Trichosporon*, debba rientrare nelle blastosporie pure.

In quanto al genere *Proteomyces*, un nostro studio lo ha assorbito nel genere *Trichosporon*.

A nostro parere è pertanto solo al genere *Trichosporon* che è stato finora accertato il carattere di riproduzione mista per blastospore e per artrospore.

Il genere *Trichosporon* è passato per tre successive tappe:

1^a — Venne creato nel 1890 dal Behrend, per l'agente della Piedra Colombiana che egli chiamò *Trichosporon giganteum*; la scarsa definizione botanica data dall'A. fece assumere a questo genere piuttosto un significato medico (nel senso di includervi i miceti agenti delle Tricomicosi nodose o piede) che un significato botanico.

2^a — Il Vuillemin, nel 1902, ne iniziò lo studio botanico, riportando ad esso l'agente della Piedra Europea o nostras, già descritto dal Beigel nel 1865 e chiamato *Pleurococcus beigeli* dal Rabenhorst nel 1867; avendo osservato soltanto delle artrospore, l'A. assegnò questo genere, di cui cambiò arbitrariamente la sillabazione in *Trichosporum*, ai miceti artrosporei puri.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Microbiologia della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 5 dicembre 1937.

Anche dopo gli studi di Vuillemin, il genere seguì ad avere un significato prevalentemente medico e patologico, nel senso di comprendere tutti, e soltanto, i miceti agenti delle Piedre.

3^a - Ota, nel 1926, ne compì un profondo studio botanico, dimostrando la contemporanea formazione di artrospore e di blastospore, nonché di elementi a tipo intermedio; egli diede così un significato botanico al genere e spezzò la sua pretesa unità patologica. Infatti al genere *Trichosporon* egli assegnò dei miceti agenti di tutt'altre affezioni che delle Piedre, come l'*Oidium cutaneum* De Beurmann ecc. 1919, il *Parendomyces asteroides* Rischin 1921, il *Parendomyces balzeri* Gougerot e Burnier 1911, l'*Hemisphora rugosa* Castellani 1910.

D'altra parte, dopo le osservazioni di Ota, vennero radiati dal genere *Trichosporum* alcuni miceti che in essi si comprendevano, come l'agente della Piedra brasiliana di Horta, a noduli neri, oggi trasferito nel genere *Piedraia* da Fonseca e Leao, sotto il nome di *Piedraia hortai* (Brumpt) Langeron 1929.

Avendo compiuto un completo studio sui miceti artro-blastosporei, abbiamo potuto convincerci dell'esattezza delle osservazioni e dei concetti di Ota, accettati anche da Nannizzi nel suo Repertorio dei miceti patogeni dell'uomo e degli animali. Le caratteristiche fondamentali del genere *Trichosporon* possono riassumersi:

Dal lato colturale; nell'aspetto cerebroide delle agarcolture su terreni zuccherati, e crateriforme delle colonie isolate, aspetto ben diverso da quello cremoso dei miceti blastosporei (*Torulopsidaceae*) o da quello membranoso degli artrosporei puri riportabili al genere *Geotrichum*; nella formazione di pellicole assai consistenti alla superficie dei terreni liquidi zuccherati (assenza di pellicola nei terreni poveri); nella presenza di alcune proprietà proteolitiche, mentre mancano proprietà saccarolitiche.

Dal punto di vista della morfologia microscopica: nel micelio ad ife settate, larghe 3-5 μ , arieggiante a quello dei geotrichi, ma con maggior tendenza a ramificarsi per branche laterali che per biforcazioni; nella produzione di artrospore, di blastospore e di elementi intermediari (blasto-artrospore), nonché di clamidospore e di incostanti formazioni dall'apparenza di pseudoconidi;

Dal punto di vista patologico, i *Trichosporon* sono agenti sia di forme di Piedre che di micosi cutanee, mucose o profonde.

La precisa definizione del genere, avendo riguardo a queste proprietà salienti, potrebbe essere la seguente:

Hiphæ hyalinae 3-5 μ . *crassae*, *effusae*, *septatae*, *ramulosae* et *latere prae-bentes*, *saepius cohibentes*, quae ex parte in arthrosporas franguntur, ex parte blastosporas atque blasto-artrosporas gignunt. In agris solidis (agar glycosatum) culturas efficiunt prominentes, cerebroideas, spissas et firmas, agro adhaerentes, quae primum cereae levesque, mox vero fuscae et villosae apparent; coloniae cra-

teris saepe formam praebent. In agris liquidis membranulam firmam superne efficiunt. Proteinis modice, sacchara nullo modo fermentescunt.

* * *

Al genere *Trichosporon*, così inteso, riteniamo di poter riferire i seguenti miceti da noi studiati:

1° Fra gli agenti delle Piedre, il *T. beigeli* (Rabenhorst) Vuillemin 1902; il *T. giganteum* Behrend 1890; il *T. granulosum* (Kambayaschi 1923) Ota 1928; il *T. cerebriforme* (Kambayaschi 1923) Ota 1928; ed il *Trichosporon*, stipite Kawazuki, descritto da Ota (1926).

2° Fra gli agenti di micosi cutanee, mucose o profonde, i miceti originariamente denominati: *Oidium cutaneum* De Beurmann ecc. 1919, *Parendomyces asteroides* Rischin 1921, *Parendomyces balzeri* Gougerot e Burnier 1911, *Hemispora rugosa* Castellani 1910 (tutti e quattro già inclusi nel genere *Trichosporon* da Ota); *Oidium rotundatum* Castellani 1911, *Oidium brasiliense* De Magalhaes 1918; *Mycoderma liquefaciens* Auct., *Proteomyces infestans* Moses e Vianna. È da ritenere inoltre che il *Parendomyces brocquii* Beintema, come opina anche Nannizzi, sia un *Trichosporon*; ma tale stipite non è stato da noi studiato.

Rimane ora da vedere se tutti i miceti sopra elencati meritino di essere considerati come altrettante specie diverse, per cui basterebbe cambiare, ove occorra, il loro originale nome generico con quello di *Trichosporon*.

Uno studio superficiale potrebbe dare l'impressione di diversità, anche notevoli, fra tutti questi stipiti; ma ove si moltiplichino le osservazioni e si proceda ad una sintesi dei caratteri, si osserva che le diversità sono apparenti e non reali, dovute spesso al notevole polimorfismo che questo gruppo presenta.

Di scarsissimo valore è la biometria portata sulle blastospore e sulle artrospore, potendo questi elementi subire le più grandi varietà di dimensioni. Più costante è apparso l'aspetto macroscopico delle colture e di un certo valore sono pure alcuni aspetti miceliari.

Basandoci soprattutto sullo studio di colture su vetro alla Rivalier-Seydel, colorate con ematossilina ferrica, siamo venuti alla determinazione di comprendere in sei diverse specie i 15 stipiti studiati.

I. — *Trichosporon beigeli* (Rebenhorst) Vuill. 1902.

A questa specie riportiamo i seguenti ceppi studiati: *Trich. beigeli*, stipite Siena, ricevuto da Ota; stipite denominato « Piedra Europea » ricevuto da Negroni (Buenos Aires).

Presenta in modo spiccato tutte le caratteristiche fondamentali del genere, e su agar glucosato di Sabouraud forma colture sode e compatte con circonvoluzioni cerebriformi di media ampiezza, e con superficie lanuginosa ed a spazzola per coremi ifali.

Lo stipite « Piedra Europea » di Negroni presenta poi la particolarità di produrre dei coremi ifali levogiri, che potrebbero indurre ad istituire una varietà « levogira » del *Tr. beigeli*.

Dal punto di vista parassitario determina la Piedra Europea con nodi costituiti da piccoli elementi del diametro di 3-4 μ .

II. — *Trichosporon giganteum* Behrend 1890.

A questa specie riportiamo due stipiti, ricevuti nel 1934, l'uno dal Prof. Redaelli (Catania) e l'altro dal Prof. Pollacci (Pavia); non è escluso che possa trattarsi del medesimo ceppo esistente in due collezioni diverse.

Caratteristiche di questa specie sono: formazione su agar Sabouraud, di colture poco consistenti (a causa della facile frammentazione dei filamenti) con circonvoluzioni cerebroidi fitte e sottili, a superficie lanuginosa od a spazzola; produzione di organi fissatori arboriformi (appressori) al termine di alcune ife.

Dal punto di vista parassitario determina la Piedra colombiana, con nodi costituiti da grandi elementi del diametro di 12-14 μ .

III. — *Trichosporon granulosum* (Kambayashi 1923) Ota 1928.

A questa specie riportiamo tre stipiti, tutti di provenienza giapponese: *Trichosporon granulosum* (Kambayashi 1923) Ota 1928; *Trichosporon cerebriforme* (Kambayashi 1923) Ota 1928, ambedue ricevuti da Ciferri nel 1935; e *Trichosporon*, stipite Kawazuki, ricevuto da Ota nel 1935, col n° 84, e ritenuto da Ota come *Tr. beigeli*.

Caratteristiche di questi tre ceppi, che non sembrano differenziabili fra loro, è di dare, su agar Sabouraud, delle colture consistenti a superficie pianeggiante, lanuginosa od a spazzola per coremi ifali, mancante o quasi di circonvoluzioni cerebroidi; carattere di così assoluta costanza, da far distinguere a colpo d'occhio questi ceppi giapponesi, da quelli di *Tr. beigeli*.

Allo stato parassitario determinano la Piedra del Giappone, con nodi ad elementi di dimensioni alquanto variabili, ma tuttavia piccole.

IV. — *Trichosporon cutaneum* (De Beurmann, Gougerot et Vaucher 1909) Ota 1926.

A questa specie crediamo di dover riportare i seguenti miceti, dei quali diamo il nome originale e quello corretto:

Oidium cutaneum De Beurmann ecc. 1909 — *Trichosporon cutaneum* (De Beurmann ecc.) Ota 1926; ricevuto da Langeron nel 1930, col n. 388.

Hemispora rugosa Castellani 1910 — *Trichosporon rugosum* (Castellani) Ota 1926; ricevuto da Castellani nel 1931.

Oidium rotundatum Castellani 1911 — *Trichosporon rotundatum* (Castellani) Puntoni 1935; ricevuto da Castellani nel 1930.

Oidium brasiliense De Magalhaes 1918 — *Trichosporon brasiliense* (De Magalhaes) Puntoni 1935; ricevuto da Langeron nel 1930.

Mycoderma liquefaciens auct. — *Trichosporon liquefaciens* (Auct.) Puntoni 1936; ricevuto da Langeron nel 1930 col n. 390.

Parendomyces asteroides Rischin 1921 — *Trichosporon asteroides* (Rischin) Ota 1926; ricevuto da Ota nel 1934 col n. 85.

Forse anche *Parendomyces brocquii* Beintema 1913 — *Trichosporon brocquii* (Beintema) Nannizzi 1934 (studiato solo nelle descrizioni esistenti).

Fra tutti questi stipiti, che presentano i caratteri fondamentali del genere, non abbiamo potuto rilevare delle sostanziali diversità. Diremo di più, che le loro circonvoluzioni cerebriformi, di media ampiezza, con superficie lanuginosa od a spazzola per coremi ifali, costituiscono un carattere comune col *Trich. beigeli*, col quale si sarebbe tentati di identificarli.

Se per ora manteniamo separato questo gruppo dal *Tr. beigeli*, è sulla base del fragile concetto della specificità patogena, già infranto in micologia per molti gruppi di parassiti; mentre il *T. beigeli* è ritenuto l'agente della Piedra europea, i miceti del gruppo *T. cutaneum* sono gli agenti di micosi cutanee, mucose e viscerali.

Qualora ulteriori ricerche dimostrino che uno stesso stipite possa produrre al tempo stesso la Piedra e micosi cutanee, mucose e viscerali, qualsiasi barriera cadrà ed i miceti assegnati al gruppo *T. cutaneum* saranno assorbiti nel *T. beigeli*.

V. — *Trichosporon balzeri* (Gougerot et Burnier) Ota 1926.

Questo micete chiamato originariamente *Parendomyces balzeri*, Gougerot et Burnier 1912, è ritenuto agente di micosi cutanee e mucose.

Suoi caratteri differenziali sono: l'aspetto delle agarcolture su Sabouraud, che presentano circonvoluzioni cerebriformi molto ampie e grossolane; il grande spessore delle ife che possono superare i 5 μ . di diametro; la diramazione soprattutto per biforcazioni o triforcazioni come nei geotrici e con terminazioni ameboidi od a candelieri favici come in alcuni dermatofiti.

Lo stipite studiato ci è stato favorito da Pollacci nel 1934.

VI. — *Trichosporon infestans* (Moses e Vianna) Puntoni 1936.

Questo micete fu originariamente chiamato *Proteomyces infestans* Moses e Vianna 1913 e fu isolato dai suddetti AA. da una micosi generalizzata ad ascessi multipli sottocutanei e viscerali. Lo stipite studiato ci è stato favorito da Redaelli nel 1933 (proveniente dalla Collezione di Baarn).

La principale caratteristica di questo micete è costituita dallo aspetto delle agarcolture su Sabouraud che sono bensì a circonvoluzioni cerebriformi di media ampiezza, ma piatte, lisce e lucenti, diverse perciò da quelle del *T. beigeli* e del *T. cutaneum* che presentano spesso superficie a spazzola per formazioni di coremi e sono assai rilevate sulle superficie del terreno.

Commemorazione del Socio Nazionale Salvatore Pincherle

letta dal Socio U. AMALDI nella seduta del 5 dicembre 1937—XVI.

Salvatore Pincherle si è spento in Bologna la sera del 10 luglio dello scorso anno. Corrispondente Linceo dal 1887, Socio Nazionale dal 1901, era ormai il decano dei matematici italiani e, fra le nuove generazioni, recava ancora l'eco diretta degli elevati insegnamenti dei grandi promotori della rinascita matematica in Italia.

Nato l'11 marzo 1853 a Trieste, era stato portato nella prima infanzia a Marsiglia, dove il padre, per sottrarsi alle crescenti vessazioni poliziesche, cui nella città nativa lo esponevano i suoi sentimenti d'italianità, apertamente manifestati e difesi, si era indotto a cercare un nuovo centro ai suoi commerci; ed ivi il Pincherle trascorse la fanciullezza e l'adolescenza, in un ambiente familiare modesto e raccolto, dove l'intimità degli affetti era rinsaldata dalla tristezza dell'esilio e dall'appassionata attesa degli eventi storici, che in quegli anni, fra il 59 e il 70, preparavano l'unificazione della Patria. Compiuti i primi studi sotto la guida della madre, donna di alto sentire e di fine cultura, s'iscrisse a quel Liceo Imperiale e, mentre dapprincipio pareva inclinare verso le discipline umanistiche, acquistò, verso la fine delle Classi speciali, la consapevolezza della Sua vocazione per le scienze esatte. Scelta la via, fu senza incertezze deciso in famiglia ch'Egli dovesse continuare gli studi presso un'Università italiana; e, sul finire del 69, appena sedicenne, lasciò la casa paterna per raggiungere Pisa, dove per concorso si aggiudicò un posto di alunno interno in quella Scuola Normale Superiore.

Vi dominava l'alta figura del Betti, che, in quegli anni, tornando dalla Fisica matematica all'Analisi, poneva le basi della Topologia generale, mentre, accanto a lui, il Dini, conchiuso ancor giovanissimo il primo ciclo della sua attività nel campo della Geometria differenziale, si era volto con fervore alla elaborazione dei suoi *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabile reale* e a quel nuovo indirizzo ispirava il suo geniale insegnamento. Le elevate suggestioni di quei Maestri insigni trovarono immediata rispondenza nella mente aperta e versatile, nell'entusiasmo speculativo del Pincherle, che, compiuto brillantemente il Suo quadriennio di studi, conseguì nel 1874 la Laurea di Scienze fisico-matematiche e l'Abilitazione all'insegnamento con le due successive parti di una dissertazione teorico-sperimentale sulle superficie di capillarità e le relative costanti caratteristiche.

Gli si apriva così, larga di promesse, la via alla carriera scientifica; ma per proseguirla tranquillamente avrebbe dovuto ricorrere ancora agli aiuti paterni, e, posto dinanzi al dilemma di chiedere nuovi sacrifici ai Suoi Cari o d'imporre a se stesso la via più dura, prescelse decisamente di entrare nell'insegnamento secondario.

Per sua ventura fu destinato a Pavia, dove la Facoltà di scienze doveva l'anno seguente accogliere nel suo seno il Beltrami e già contava fra i suoi Maestri il Casorati, che, al pari del Betti, era conoscitore profondo e divulgatore geniale delle concezioni dal Riemann e, d'altra parte, per una certa propensione a problemi di natura operatoria, direttamente rispondenti alla mentalità del Pincherle, era destinato ad esercitare su di Lui un fascino particolare. Così, in quella sede tranquilla, il Pincherle trovava nuovi sussidi culturali, nuove suggestioni al Suo orientamento scientifico; e, nella freschezza delle Sue energie giovanili, apprendeva ad imporsi quella severa disciplina di lavoro, che poi costantemente osservò nella Sua lunga vita e che allora Gli consentì di non deviare dalla ricerca, pur tra le cure dell'insegnamento liceale, cui dedicava quell'indefesso fervore, che sempre Egli recò nella Scuola.

Decisivo fu per lui l'anno accademico 1877-78, che, grazie ad una borsa di perfezionamento, poté passare a Berlino. Al suo appassionato interesse culturale quel grande centro scientifico offriva le più larghe soddisfazioni: ma Egli si concentrò soprattutto nel seguire le lezioni del Weierstrass, alle quali gli studi precedenti lo avevano particolarmente preparato; e, tornato a Pavia, vi tenne, per invito dei professori di quell'Università, un corso, in cui, per la prima volta in Italia, venivano sistematicamente esposti i principi dell'Analisi secondo il Weierstrass, fino all'applicazione della teoria generale delle funzioni analitiche alle funzioni ellittiche. Quel corso, da Lui riassunto in un *Saggio*, pubblicato nel *Giornale* del Battaglini, ebbe larga risonanza e richiamò vivamente l'attenzione dei matematici italiani sulla forte tempra del giovane autore, che, conseguita per concorso nella primavera del 1880 la cattedra di Algebra complementare e Geometria analitica nell'Università di Palermo, era, nel successivo autunno, chiamato, per lo stesso insegnamento, a quella di Bologna.

Ancora era viva in quelle aule l'eco della parola incitatrice del Cremona; e il Pincherle, formatosi nelle elevate tradizioni delle Scuole di Pisa e di Pavia, accolse come una missione, cui poi sempre tenne fede, il proposito di restituire anche la Scuola matematica di Bologna all'antico prestigio. Gli erano compagni in quel fervore di entusiasmo giovanile due Suoi condiscipoli di Pisa, pur essi giunti allora alla cattedra in quello stesso Ateneo, C. Arzelà e L. Donati; e i tre giovani, associando i loro sforzi, ottennero anche a Bologna quel completamento dell'ordine degli studi per la Laurea in Matematica, che già era stato promosso, ma non raggiunto, dal Cremona, dal Chelini, dal Beltrami.

Così nel 1882 il Pincherle assumeva per incarico quell'insegnamento di secondo biennio, che poi conservò ininterrottamente per quarantasette anni. Sorretto da una cultura eccezionale, che mai cessò di approfondire e di estendere, anche fuori del Suo campo preferito di lavoro ed oltre i confini stessi della Matematica, variava di anno in anno l'argomento delle Sue lezioni, pur mirando sempre allo scopo d'illustrare la teoria generale delle funzioni analitiche nel suo sviluppo storico, nei suoi diversi orientamenti, nei suoi rapporti con gli altri rami dell'Analisi. Alle trattazioni strettamente monografiche preferì generalmente lo sviluppo a grandi linee di intere dottrine, spesso di due teorie che a vicenda s'illuminassero, e, pronto com'era a cogliere ogni nuovo atteggiamento di pensiero, recava nella Scuola i più recenti apporti di metodi e di risultati, dopo averli sottoposti ad una profonda rielaborazione personale. Le lezioni così accuratamente preparate esponeva con impeccabile nobiltà di forma e vi trasfondeva un fervore di entusiasmo, un calore di emozione estetica, che risultavano tanto più comunicativi quanto più erano contenuti e quasi dissimulati.

Altrettanto meditati e suggestivi erano i Suoi corsi di primo biennio, che Egli, costantemente dominato dalla preoccupazione delle contrastanti esigenze degli allievi ingegneri e degli aspiranti alle Lauree scientifiche, non si stancò mai di rimaneggiare e perfezionare sia nell'assetto generale, che in ogni più minuta particolarità di sviluppo; e la Sua raffinata perizia didattica resta documentata dalla serie di trattati, in cui via via riassunse le linee fondamentali del Suo insegnamento di ogni grado, dalle Matematiche elementari alla teoria delle funzioni analitiche, dalle lezioni di Algebra complementare a quelle di Calcolo, che, già preparate di lunga mano, pubblicò quando, scomparso prematuramente, nel 1912, l'Arzelà, ne assunse la cattedra di Analisi infinitesimale.

Col volgere degli anni, il crescente prestigio personale e la rinomanza scientifica via via più larga Lo designavano a sempre nuovi e più gravi doveri di uffici accademici; ma trovava tempo a tutto e mai negò di assecondare fattivamente qualsiasi iniziativa diretta al vantaggio della Scienza o della Scuola. Dal 1918 in poi partecipò con assidua cura alla direzione degli *Annali di Matematica*; nel 1922 promosse la costituzione dell'*Unione Matematica Italiana*, di cui tenne per un decennio la presidenza e sempre diresse il *Bollettino*; nel 1928, su mandato conferitogli a Toronto dai Delegati dei Comitati aderenti all'Unione Matematica Internazionale, organizzò e presiedette il Congresso di Bologna.

E, intanto, Gli erano venuti, dall'Italia e dall'estero, molteplici onori accademici; e, come già nel 1889 quest'Accademia lo aveva designato a dividere con L. Bianchi il Premio Reale, che, per la prima volta, si assegnava a matematici, così, al suo collocamento a riposo, il Comune di Bologna Gli conferiva il Premio « Sacchetti », destinato ad onorare i Maestri più insigni e più benemeriti di quello Studio glorioso.

Ma a chi ebbe la ventura di conoscerne a fondo l'animo e le intime aspirazioni, tutto ciò non appare che estrinseco episodio in una vita, che, fuori di ogni preoccupazione di personale interesse, fu tutta raccolta e tesa in un perenne sforzo di elevazione intellettuale, in una completa dedizione alla ricerca scientifica.

Come generalmente accade, anche il Pincherle, nei primi passi della Sua attività scientifica, aveva traversato un periodo d'incerto orientamento, e, pur essendosi decisamente volto dalla Fisica, cui s'era dappprincipio indirizzato, all'Analisi pura, aveva cercato la Sua via in direzioni svariate: superficie ad area minima ed equazioni algebrico-differenziali; relazioni fra coefficienti e radici di una trascendente intera, riprese più tardi dal Maillet; funzioni monodrome dotate di un teorema di moltiplicazione bilineare e funzioni a moltiplicatori, quali punto di partenza per una teoria delle funzioni ellittiche, che per quella stessa via fu vari anni dopo sviluppata dal Rausenberger.

Ma la Sua personalità matematica si delineò precisa dopo il viaggio a Berlino. Del Weierstrass egli amò sempre considerarsi discepolo; e in verità ne risentì fortemente l'influsso. Tuttavia gli impulsi, che ne aveva tratto, si erano in lui composti con quelli, che, a Pisa e a Pavia, aveva ricevuto dal Betti e dal Casorati in senso prevalentemente riemanniano; mentre già la Sua prima formazione culturale Lo aveva naturalmente condotto, fin dall'inizio dei Suoi studi matematici, a famigliarizzarsi con gli indirizzi della Scuola francese. Di qui il largo eclettismo di metodi e di vedute, che Egli sempre recò nella teoria delle funzioni di variabile complessa e che, in particolare, si rispecchia nel tipo dei problemi, da Lui affrontati nel dodicennio dall'82 al 94, in cui il suo pensiero matematico, traverso una progressiva evoluzione, doveva raggiungere la sua piena maturità.

Era apparsa nell'80 la classica Memoria del Weierstrass *Zur Functionenlehre*, che col celebre teorema sulle serie uniformemente convergenti di funzioni analitiche aveva aperto la via a superare il tecnicismo delle serie di potenze; e il Pincherle, intuendo acutamente i nessi profondi, che intercedono fra il problema, così sollevato, dello sviluppo di una funzione in serie ordinata secondo le funzioni di un sistema prestabilito e il problema dell'inversione degli integrali definiti nel campo complesso, concepì un vasto programma di ricerche, dirette a indagare sistematicamente i rapporti fra le singolarità di una funzione e quelle degli elementi funzionali di riferimento adottati per una sua rappresentazione analitica sia mediante lo sviluppo in serie di funzioni prefissate, sia mediante un integrale curvilineo. E si può notare come nella natura stessa di tali questioni Egli trovasse un incentivo ad applicare considerazioni di quel tipo operatorio, verso cui doveva in seguito orientarsi sempre più decisamente.

Degli sviluppi in serie, sotto ipotesi svariate circa il sistema base, si occupò in tutta una ricca serie di lavori, che per lo stesso tipo dei problemi e dei risultati, sfuggono alla possibilità di un rapido riassunto; ma già in

quelle ricerche giovanili colpisce l'ingegnosa novità di taluni concetti e di taluni spedienti, che assai più tardi dovevano entrare nell'uso corrente: tali la nozione di successione di funzioni equilimate; l'intervento di relazioni nettamente pertinenti alla teoria dei determinanti infiniti, in quel tempo nemmeno abbozzata; l'esplicito enunciato e l'applicazione, nel caso delle regioni piane di quel *teorema di copertura*, che un ventennio dopo fu ritrovato e messo in valore dal Borel.

Seguono in quello stesso periodo di tempo - e più precisamente dall'85 in poi - le ricerche sull'inversione degli integrali definiti nel campo complesso. Secondo la nomenclatura odierna, i problemi da Lui affrontati per primi in questo campo si riconnettono alla risoluzione di notevoli classi di equazioni integrali di prima specie; ma in ogni singolo caso Egli fissa più particolarmente la Sua attenzione sull'operazione funzionale, rappresentata dall'integrale a primo membro, e ne indaga le proprietà analitiche sia in rapporto al nucleo - o, com'Egli allora diceva, *funzione caratteristica*, - sia in relazione al campo funzionale, cui l'operazione s'intende applicata. Ed anche qui taluni Suoi risultati precorsero i tempi: cercando le operazioni integrali, la cui inversa ammette una analoga rappresentazione analitica, fu condotto a quei nuclei, che conservano la derivazione e che più tardi, nel campo reale, si ripresentarono nella teoria della composizione del Volterra, il quale, com'è ben noto, li chiamò *del ciclo chiuso*.

Ma sull'ulteriore sviluppo del pensiero del Pincherle un più decisivo influsso ebbero gli studi da Lui compiuti sulle proprietà intrinseche e sulle applicazioni di talune fra le più importanti operazioni funzionali classiche, in ispecie sulla trasformazione di Laplace-Abel. Egli per primo riconobbe come questa trasformazione, indipendentemente da ogni sua espressione analitica, si possa univocamente definire per mezzo di certe due proprietà operatorie - relative al suo comportamento di fronte alla derivazione e alla moltiplicazione per la variabile indipendente - e mise in luce come l'espressione, che per tale operazione va adottata, dipenda caso per caso dalla natura analitica della classe funzionale, in cui essa è destinata ad operare. Così svincolata da contingenti particolarità di forma, la trasformazione acquista una maggiore agilità algoritmica e una più larga possibilità di applicazioni, che il Pincherle illustrò in direzioni svariate; e fra i molti e notevoli risultati così conseguiti va ricordata una inattesa e riposta dualità fra le due generalizzazioni dell'equazione differenziale lineare ipergeometrica, dovute al Pochhammer e al Goursat, alla quale Egli pervenne, movendo dall'osservazione (da Lui per primo rilevata nella sua forma esplicita e generale) che la trasformazione di Laplace-Abel stabilisce una corrispondenza biunivoca fra le equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali e le analoghe equazioni alle differenze.

Ritrovava così sul Suo cammino il vecchio Calcolo delle differenze, al quale, in quegli stessi anni, era stato ricondotto anche il Poincaré nelle

sue celebri ricerche sulle equazioni differenziali lineari a integrali irregolari; e il Pincherle, riesumando quell'antico ordine di questioni alla luce dei metodi e delle vedute della teoria delle funzioni di variabile complessa, vi conseguì taluni dei Suoi risultati più importanti e più originali.

Tornando dapprima sugli sviluppi in serie secondo le funzioni di un sistema prestabilito, ravvisò nella *ricorrenza lineare*, quale risulta definita fra le funzioni di un tale sistema da un'equazione lineare alle differenze, un presupposto particolarmente atto a consentire, nell'indagine di quegli sviluppi, conclusioni precise; ed, esaurito rapidamente il caso delle ricorrenze del primo ordine, si trovò, con quelle del secondo, di fronte all'algoritmo delle frazioni continue algebriche, che indagò in senso inverso a quello prima di Lui considerato, cioè mirando a risalire dalle proprietà analitiche delle ridotte di una frazione continua convergente, data *a priori*, a quelle della funzione così definita. Ma ben più ardue difficoltà si presentavano nel caso delle ricorrenze d'ordine superiore, dove si trattava di scoprire la via a quella generalizzazione dell'algoritmo delle frazioni continue algebriche, che già era stata inutilmente cercata da E. Heine, sulla traccia del tentativo compiuto in senso strettamente aritmetico dallo stesso Jacobi; e il Pincherle risolse la questione in modo definitivo e geniale, introducendo, come analogo del valore della frazione continua, l'integrale da Lui chiamato *distinto*, che è quell'integrale dell'equazione lineare alle differenze, caratteristica della ricorrenza considerata, il cui rapporto ad ogni altro integrale della stessa equazione converge allo zero al tendere all'infinito dell'indice. Non è qui possibile render conto degli importanti sviluppi, che il Pincherle dedicò alla determinazione di siffatto integrale e alla sua applicazione al problema della migliore approssimazione di una data funzione per mezzo di combinazioni lineari, a coefficienti polinomiali, di prefissate serie di potenze. Basti ricordare, come una delle più profonde Memorie del Pincherle, quella del tomo 16° degli *Acta Mathematica* sulla generazione di sistemi ricorrenti per mezzo di equazioni differenziali lineari, nella quale estende agli sviluppi di una funzione analitica secondo serie precedenti per gli elementi di un sistema ricorrente le condizioni per la sviluppabilità secondo i denominatori delle ridotte di una frazione continua algebrica e pone in evidenza le proprietà asintotiche dei sistemi ricorrenti costituiti dai coefficienti dello sviluppo del Taylor degli integrali delle equazioni differenziali lineari di tipo regolare.

In tutte queste ricerche le equazioni lineari alle differenze, pur considerate nel campo complesso, intervenivano ancora sotto il loro originario aspetto di semplici relazioni di ricorrenza; ma il Pincherle, seguendo il naturale orientamento del Suo pensiero, fu condotto a superare quella concezione ristretta del Calcolo delle differenze e a considerarlo un particolare capitolo del Calcolo funzionale nel campo complesso. Come tale lo ricostruì sistematicamente, raccogliendo dapprima le teorie formali in un' *Algebra delle forme lineari alle differenze*, poi volgendosi ai problemi analitici veri e propri,

fino ad una prima risoluzione analitica delle equazioni lineari alle differenze, da Lui conseguita per mezzo di serie operatorie, di accertata convergenza, ordinate secondo le potenze dell'operatore del Casorati.

Con questo vasto e ben connesso gruppo di ricerche il Pincherle contribuì, forse più di ogni altro, a promuovere ed avviare quell'indirizzo, per cui il Calcolo delle differenze, uscendo dal primitivo suo stadio puramente formale ed aritmetico, è oramai entrato in modo organico nel quadro della teoria generale delle funzioni analitiche; e, se a quel nuovo ordine d'indagini più decisivi contributi sono stati in seguito recati da tutta una schiera di altri ricercatori, fra cui primeggia il Nörlund, basta scorrere le magistrali *Vorlesungen über Differenzenrechnung* dell'insigne matematico danese per riconoscere come, anche in un assetto definitivo della teoria, le vedute e i risultati del Pincherle conservino immutata la loro fondamentale importanza.

Tuttavia, nella progressiva evoluzione del Suo pensiero, le ricerche da Lui compiute sino allora costituirono soprattutto il prodromo ad una più larga visione di problemi e a un più elevato programma di lavoro. Sulla base del ricco materiale di osservazioni, di raffronti, di risultati concreti, raccolto nei precedenti Suoi studi su svariate classi di operazioni funzionali, e traverso una larga indagine storica sui vecchi metodi di Calcolo simbolico, il Pincherle concepì, intorno al 1894, il disegno di costruire nel campo complesso una teoria generale delle operazioni funzionali lineari, o, come Egli preferì dire, *distributive*, la quale, conservando l'agilità di quegli antichi metodi formali, conducesse a procedimenti di effettiva validità, controllabile quanto meno caso per caso, così da costituire un nuovo ramo della teoria delle funzioni analitiche. Fu quello per Lui il periodo di più acceso fervore di ricerca, sicchè già nel 1897 potè presentare nel *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif* («Math. Annalen», XLIX) lo schema organico della Sua teoria sintetica delle operazioni funzionali; poi, sperimentato in ripetuti corsi universitari lo sviluppo sistematico delle Sue idee, ne curò una trattazione divulgativa nel volume su *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi*, pubblicato nel 1901.

A fondamento della Sua teoria Egli pose quel concetto di *spazio funzionale*, che, da Lui per primo definito e fecondamente studiato, doveva poi evolversi in forme più larghe o più determinate, fino a costituire oramai una delle nozioni fondamentali e, in un certo senso, caratteristiche dell'Analisi contemporanea. Per il Pincherle si trattava di quegli spazi *affini*, o meglio *vettoriali*, ad una infinità numerabile di dimensioni, che costituiscono un'immagine geometrica degli insiemi lineari di funzioni analitiche sviluppabili secondo le funzioni di un prestabilito sistema, quando agli elementi di un tale sistema si attribuisca l'ufficio di vettori fondamentali di una base di riferimento.

Già nel caso di un numero finito di dimensioni sorgono per le operazioni distributive, che trasformano in sè un tale spazio — e che i vetto-

rialisti chiamarono più tardi *omografie vettoriali* — interessanti problemi di classificazione; e, per quanto, astrazion fatta dalla particolare interpretazione, tutto sostanzialmente si riduca alla classica discussione dell'equazione caratteristica di una sostituzione lineare, la trattazione sintetica datane dal Pincherle e, in ispecie, una Sua caratterizzazione operatoria dei divisori elementari presentano, rispetto alle molte trattazioni congeneri, singolari pregi di semplicità e di eleganza.

Negli spazi funzionali ad un'infinità di dimensioni, e, in particolare, in quello delle serie di potenze, cui più spesso si riferiva il Pincherle, ogni operazione distributiva assume la forma di un'affinità omogenea su infinite variabili, onde risulta, per l'operazione, una prima rappresentazione analitica per mezzo di una matrice infinita; e di questo tipo di rappresentazione (divenuta più tardi familiare, oltre che ai matematici, ai fisici teorici) Egli si valse a più riprese, soprattutto per caratterizzare e studiare quelle operazioni, da Lui dette *normali*, che generalizzano, sotto l'aspetto geometrico le cosiddette deformazioni pure, sotto l'aspetto analitico le forme differenziali lineari della classe del Fuchs, e che, nel gruppo totale delle operazioni distributive, costituiscono un sottogruppo di particolare interesse per le eleganti proprietà, di cui gode, e per le applicazioni, largamente illustrate dal Pincherle, di cui sono suscettibili. E va rilevato come fin dal 1897 il Pincherle, in base a siffatta rappresentazione di un'operazione per mezzo di una matrice infinita, associasse sistematicamente, sotto ipotesi di larga generalità, al fascio dell'operazione e dell'identità quel determinante infinito, che doveva poi assumere un ufficio essenziale nella teoria del Fredholm; e, assodandone il carattere di trascendente intera rispetto al parametro del fascio, ne deducesse quegli elementi, che oggi diconsi gli *autovalori* e le *autofunzioni* dell'operazione.

Ma allo sviluppo della teoria occorreva si assegnasse per le operazioni distributive qualche altra rappresentazione più maneggevole; e il Pincherle vi pervenne, movendo da una geniale osservazione algoritmica. Notò che, se per una qualsiasi operazione distributiva si valuta lo scarto dalla permutabilità rispetto ad un'operazione fissa, si perviene ad una nuova operazione, la cui deduzione da quella di partenza presenta una completa analogia algoritmica con l'ordinaria derivazione delle funzioni. Assumendo, perciò come *derivata funzionale* di un'operazione il suo scarto dalla permutabilità rispetto alla moltiplicazione per la variabile indipendente, poté stabilire che ogni operazione distributiva, nell'intorno di una generica funzione, è rappresentabile formalmente con una serie di potenze operatorie della derivazione ordinaria, perfettamente analoga alla serie del Taylor per le funzioni.

Non sfuggì naturalmente al Pincherle che tali serie operatorie, già da Lui prima incontrate nell'inversione delle forme differenziali lineari (o, se si vuole, nell'integrazione delle equazioni differenziali lineari non omogenee), hanno di regola un campo funzionale di effettiva validità piuttosto ristretto;

ma non mancò di mostrare (e di questo essenziale complemento non si è sempre tenuto il debito conto) che, con un ingegnoso trasporto di quegli stessi spediendi, che al Weierstrass e al Mittag-Leffler avevano consentito di assicurare la convergenza degli sviluppi di una funzione analitica in prodotto infinito e in serie di frazioni semplici, è possibile, caso per caso, ampliare quel primitivo campo funzionale di convergenza.

Ad ogni modo a questa rappresentazione di un'operazione con una serie di potenze della derivazione spetta, nella teoria del Pincherle, un ufficio in qualche modo sussidiario, giacchè per Lui ogni operazione è un'entità astratta, caratterizzata, indipendentemente da ogni espressione analitica, dalle sue proprietà operatorie intrinseche, che, quanto meno, nei casi più noti si traducono in equazioni simboliche assai semplici; e la *legge di permanenza* di tali proprietà consente, in generale, di prolungare l'operazione oltre i limiti del suo primitivo campo funzionale di definizione. Di queste Sue vedute, cui giustamente il Pincherle annetteva particolare importanza, diede un'espressiva applicazione, discutendo in modo esauriente il problema della derivazione di indice complesso qualsiasi, su cui già avevano fermato la loro attenzione, fra gli altri, il Liouville, il Riemann, l'Holmgren, il Bourlet.

D'altro canto, uno studio approfondito delle analogie, che intercedono fra le affinità vettoriali ordinarie e le operazioni distributive agenti in uno spazio ad infinite dimensioni condusse il Pincherle a riconoscere fra i due casi una differenza essenziale, che, rimasta allora pressochè inavvertita, fu nuovamente rilevata, per le operazioni integrali, da Hellinger e Toeplitz quindici anni più tardi. In uno spazio ad un numero finito di dimensioni ogni operazione distributiva degenerare gode insieme delle due proprietà di trasformare l'intero spazio in uno spazio ad un numero minore di dimensioni e di possedere, come il Pincherle diceva, qualche vettore *radice*, cioè qualche vettore, cui corrisponde il vettore nullo. Orbene, quando si passa alle operazioni distributive in uno spazio ad infinite dimensioni, queste due proprietà, pur trovandosi talvolta associate, possono anche presentarsi separatamente, talchè si hanno due tipi distinti di degenerazione; ed è manifesto come risulti essenzialmente diverso il problema d'inversione per le operazioni degeneri dell'una o dell'altra specie. Di queste operazioni degeneri il Pincherle indagò largamente le proprietà. In particolare, introdotta nello spazio funzionale l'omogeneità e sostituita all'immagine vettoriale quella puntuale, stabili, pel tramite di convenienti operazioni degeneri, l'esistenza di spazi lineari, pur essi a infinite dimensioni, ma meno comprensivi di quello totale, cui competono tutte le proprietà di incidenza e di appartenenza che caratterizzano gli iperpiani ordinari; e, definite per questi *iperpiani* dello spazio funzionale punteggiato opportune coordinate omogenee, aventi carattere contragrediente rispetto a quelle puntuali, pervenne ad una corrispondenza per *dualità*, che Gli consentì di associare ad ogni operazione un'operazione correlativa, la quale generalizza, con le rispettive proprietà caratteristiche, tanto

l'*aggiunta* del Lagrange, quanto quell'altra operazione analoga, che, sotto il medesimo nome, lo stesso Pincherle aveva introdotto nel Calcolo delle differenze.

Della Geometria dello spazio funzionale considerò anche altri problemi, più tardi ripresi, sotto punti di vista diversi, da vari ricercatori (curve e varietà non lineari dello spazio funzionale, loro spazi osculatori dei vari ordini, gruppi continui di operazioni e loro operazioni infinitesime ecc.); ma non vi si indugiò, giacchè rifuggiva dalle generalizzazioni, che potessero apparire scopo a se stesse; e si volse, invece, ad illustrare operosamente le applicazioni, di cui la Sua teoria era suscettibile nel campo delle funzioni analitiche: operazioni normali, come atte ad aggiungere o togliere ad una funzione singolarità di natura determinata, onde risultarono chiariti nella loro origine profonda i teoremi dell'Hadamard e del Darboux sulle singolarità delle serie di potenze; indagine approfondita delle dipendenze fra le singolarità di una *funzione determinante* e quelle della corrispondente *generatrice*; teoria generale dell'inversione delle operazioni integrali del ciclo chiuso nel campo complesso; classificazione delle equazioni funzionali lineari di seconda specie nei tre grandi tipi del Volterra, del Fredholm, dell'Hilbert.

A queste ricerche, direttamente legate al progressivo sviluppo delle Sue idee, altre ne intercalava di carattere collaterale o, in qualche modo, sussidiario. Così, in relazione alla risoluzione analitica delle equazioni lineari alle differenze, riprendeva quelle serie di fattoriali e del Newton, che già aveva incontrate in un suo precedente studio sulla interpolazione nel campo complesso e ne indagava le proprietà di convergenza, pervenendo per primo alle condizioni necessarie e sufficienti, affinchè una data funzione ammetta uno sviluppo in serie newtoniana. Inoltre, da una ricerca, per se stessa molto notevole, su taluni nuclei analitici era condotto a svariati problemi d'iterazione, in particolare a quello fondamentale dell'iterazione « in grande » delle funzioni razionali, che doveva poi essere ulteriormente approfondito dal Julia, dal Fatou, dal Ritt.

Nell'ultimo periodo della Sua vita ebbe l'intimo compiacimento di veder confermate l'importanza e la vitalità delle Sue vedute sintetiche sulle operazioni funzionali non soltanto da recenti sviluppi di Analisi, ma più ancora da nuovi ed inaspettati nessi coi concetti e i procedimenti algoritmici impostisi ai teorici della nuova Fisica. Con rinnovata fiducia tornò sui principî della Sua teoria e forse vagheggiò l'idea di rielaborarla su basi più larghe, chè ad un tale disegno sembra rispondere l'ultima sua Memoria, che la morte interruppe e fu pubblicata postuma⁽¹⁾, quasi auspicio di ulteriori sviluppi per il suo retaggio d'idee.

Quale posto Egli attribuisse alle Sue ricerche e ai Suoi contributi nel quadro generale degli indirizzi congeneri fu da Lui stesso chiarito nel magi-

(1) *Contributo alla teoria degli operatori lineari*, « Annali di Matematica », ser. IV, to. XV, 1936-XV, pp. 243-308.

strale articolo sulle equazioni e operazioni funzionali per la grande Enciclopedia delle Scienze matematiche⁽¹⁾. Ma nella rigida Sua obbiettività scientifica, nel Suo scrupoloso senso delle proporzioni finì con l'essere severo con se stesso; e ben più alta e più giusta valutazione dell'opera Sua fu solennemente espressa a Bologna, nel 1928, da J. Hadamard, che, delineando da par suo in una larga sintesi le origini, gli sviluppi, i futuri presumibili orientamenti del *Calcolo funzionale*⁽²⁾, additò nel Pincherle uno degli iniziatori ed uno dei cultori più insigni di quel promettente e caratteristico indirizzo della Matematica contemporanea.

A questo giudizio autorevolissimo null'altro andrebbe aggiunto; ma il vecchio discepolo, chiamato all'onore di parlare di Lui in quest'alta sede, non può negare a se stesso di rievocarne qui la luminosa figura morale, quale gli apparve fin dagli anni lontani della giovinezza. Pensoso e parco di parole, pareva che, soprattutto di fronte ai discepoli, amasse nascondere la Sua personalità dietro un fitto velo di geloso riserbo. Ma appunto per questo i giovani, con più intenso sforzo di comprensione e di reverente simpatia, scrutavano oltre quel velo le Sue note profondamente umane: il culto tenerissimo degli affetti famigliari, il fervido amor patrio, il multiforme interesse per ogni indirizzo speculativo, la raffinata sensibilità per ogni forma d'Arte, particolarmente per la Musica. Era ambito privilegio di pochissimi l'essere ammessi nell'intimità della Sua casa, dove, in piccola cerchia, recava nella conversazione, con arguzia garbata e senz'ombra di pesantezza, tutte le risorser della Sua vastissima cultura; e talvolta sedeva al pianoforte per interpretarvi, con una Sua caratteristica finezza di passione contenuta, le musiche classiche, che più Gli erano care, e alle quali mai cessò di dedicar quotidianamente qualche ora, nemmeno nei periodi di più intensa attività scientifica, quasi vi cercasse, più che uno svago, una fonte d'ispirazione intellettuale. In ogni circostanza Egli conservava quel Suo contegno di composta superiorità, in cui si rifletteva l'interiore equilibrio, da Lui raggiunto fra le ingenite inclinazioni di un'indole affettiva e sensibilissima e la concezione elevata ed austera, che della vita e dei rapporti umani aveva imposto a se stesso. Così alla profonda modestia, che Gli era istintiva, si associava in Lui un alto senso di dignità personale; l'estrema mitezza dell'animo si armonizzava con la sicura fermezza delle convinzioni, con la severità rettilinea dei criteri morali; e chi più Gli era vicino ben sapeva come, ad ogni richiamo della coscienza, Egli fosse pronto ad assumere la responsabilità di atteggiamenti o di decisioni, che pur ferivano la Sua sensibilità. Ma non ebbe nemici, nè mai suscitò intorno a sè risentimento o rancore, perchè la rigidezza della Sua dirittura era temperata dalla

(1) Vedasi specialmente l'edizione francese: *Equations et operations fonctionnelles*, III, 5^e vol., pp. 1-81, Paris, 1912.

(2) *Le développement et le rôle scientifique du Calcul fonctionnel*. « Atti del Congresso Internazionale dei Matematici », Bologna, 1928-VI, to. I, pp. 143-161.

larga tolleranza di chi dalla stessa saldezza delle proprie convizioni sa trar motivo a comprendere chiunque batta altre vie con pari purezza di cuore, e da ogni Suo atto traspariva limpidamente, come unica norma, l'ossequio incondizionato al dovere, cui sempre seppe sacrificare per primo se stesso.

Fu soprattutto per sentimento del dovere che, alieno per indole da ogni ufficio di comando e già quasi settantacinquenne, accettò a Toronto l'arduo compito di preparare e presiedere il Congresso di Bologna, col preciso mandato, confermatogli dal Governo Nazionale, di restaurarvi, per la prima volta dopo la Grande Guerra, la completa internazionalità delle adesioni e degli interventi. Gli animi erano turbati e divisi; e al di là delle Alpi parve dapprima che, sull'una e sull'altra sponda, quel tentativo di riavvicinamento non fosse destinato che ad esasperare le mal sopite passioni, ad approfondire i dissensi tenacemente superstiti. Ma il Pincherle, convinto di servire insieme la causa della Scienza e la secolare tradizione di universalità culturale dell'Italia, non si scoraggiò. Ai contrasti e alle amarezze, che non Gli furono risparmiate, oppose la Sua dignitosa serenità; le difficoltà ostinatamente risorgenti dominò e superò con un mirabile sforzo di tatto, di energia, di saggezza; e mai si ebbe, in quest'Europa senza pace, un più largo e più concorde raduno di scienziati di ogni nazione. Fu quello il coronamento ideale della Sua vita; e, assolto il nobile mandato, scese, in silenzioso accoramento, dalla cattedra, che aveva onorato per quasi cinquant'anni.

Giusto compenso alla Sua perenne spiritualità, non conobbe l'angoscioso declinare dell'attività intellettuale; e conservò intatti, nella vegeta vecchiezza, l'interesse per la ricerca, la gioia del lavoro, la fede nella missione progressiva della Scienza. Così, anche nell'ultimo Suo giorno, incurante di qualche oscuro presagio dell'incombente ora suprema, tornò all'usato lavoro, si raccolse ancora una volta a meditare sulla Memoria che doveva lasciare incompiuta, ancora una volta nella serena intimità domestica irradiò fra i Suoi cari l'inesausta Sua affettività, quando, al calar della notte sulla giornata operosa, quasi d'improvviso il puro e fervido cuore si arrestò.

Ma Egli vive nella Sua opera di Scienziato e di Maestro, vive nella luce della incontaminata Sua nobiltà morale.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio AMALDI pronuncia un'elevata e commossa commemorazione del Socio PINCHERLE.

Il Presidente MILLOSEVICH ringrazia il Socio AMALDI per la viva rievocazione della figura dello Scomparso che rimarrà indimenticabile nella memoria dei Colleghi e ringrazia particolarmente il figlio, prof. Pincherle che ha voluto intervenire alla seduta.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio SACCO presenta un suo opuscolo dal titolo: « Schema geologico della Etiopia » e ne illustra ampiamente il contenuto.

Il Presidente MILLOSEVICH presenta il volume delle « Memorie ed esperimenti inediti di Luigi Galvani » pubblicate in occasione del secondo centenario della nascita del Galvani, nonchè il taccuino di Luigi Galvani riprodotto in facsimile in quella medesima occasione.

L'accademico segretario aggiunto prof. AMALDI presenta i volumi giunti in dono all'Accademia segnalando il volume secondo del trattato di « Chimica agraria » a cura del Socio A. MENOZZI e U. PRATOLONGO; il trattato di « Analisi matematica algebrica ed infinitesimale » del prof. Beppò LEVI; i volumi XXIII, XXIV e XXV della « Sylloge Fungorum » a cura di P. A. SACCARDO.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci: ARMELLINI, LEVI-CIVITA, LO SURDO e SCARPA.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio SCORZA anche a nome del Socio AMALDI legge la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di N. Spampinato: « Sulla geometria dell' S_2 biduale proiettivo ».

L'Assemblea approva.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente sen. MILLOSEVICH, in sede di approvazione del verbale, dichiara che le ricerche del sen. GINORI CONTI sull'attività endògena si sono estese, oltre che nella zona dell'isola di Vulcano, anche nella zona Flegrea.

Il verbale viene approvato.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 dicembre 1937

- BABCOCK HAROLD D. — Internuclear distance in oxygen molecules. (Reprinted from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XXIII, pp. 119-122). Washington 1937. 8°.
- BANDINI MARIO. — La colonizzazione agricola dei popoli moderni. (Collana di quaderni agrari della Società Coltura Propaganda Agraria di Torino). Torino, 1936. 8°, pp. 1-20.
- BATTAGLIA M. — Les nouveaux milieux eutrophiques pour l'étude et la conservation des microorganismes pathogènes. (Estr. dal « Bollettino della Società Internazionale di Microbiologia », fasc. VIII). Milano, 1937. 8°, pp. 1-3.
- CINCIS TEODORICO. — Alla ricerca di una legge unica dei fenomeni naturali. Saggio di sintesi fisica. Roma, 1937. 8°, pp. 1-14.
- CLERICI CARLO. — L'Universo in corpuscoli. Contributo ad una teoria corpuscolare delle radiazioni. Milano, 1937. 8°, pp. 1-91.
- DE BEAUX OSCAR. — Relazione sull'attività del Museo Civico di Storia Naturale « G. Doria », durante l'anno 1936. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Vol. LIX, pp. XXVIII-XLVIII). Genova, 1937. 8°.
- DE TONI JOSEPH. — Diagnoses Algarum novarum post sylloges editionem descriptorum. I. *Myxophyceae*; centuria I, II. Brescia, 1937. 8°, pp. 1-100, 101-200.
- GABOTTO LUIGI. — Tartufi e tartuficoltura. (Collana di quaderni agrari della Società Coltura Propaganda Agraria di Torino). Torino, 1936. 8°, pp. 1-24.
- GALVANI LUIGI. — Il « Taccuino ». Riproduzione in facsimile dell'autografo conservato nella Biblioteca dell'Archiginnasio di Bologna a cura del Comitato per la celebrazione del II Centenario della nascita di L. G. Bologna, Editore Nicola Zanichelli, 1937. 12°, pp. 1-XXV, carte 1-68, pp. 1-41.
- GALVANI LUIGI. — Memorie ed esperimenti inediti con la iconografia di lui e un saggio di bibliografia degli scritti, a cura del Comitato per la celebrazione del secondo centenario della nascita di L. G. Bologna, Editore Licinio Cappelli, 1937. 8°, pp. 1-VI, 1-480.
- GESTRO RAFFAELLO. — Cenno necrologico. (Estr. dagli « Annali de Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Vol. LIX). Genova, 1937. 8°, pp. 1-12.
- ISSOGLIO GIOVANNI. — Le applicazioni chimiche nella autarchia economica delle industrie agrarie. (Collana di quaderni agrari della Società Coltura Propaganda Agraria di Torino). Torino, 1936. 8°, pp. 1-18.
- JACCHIA L. — Osservazioni meteorologiche dell'annata 1936. (Estr. dalle « Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Classe di Scienze fisiche ». Serie IX, tomo IV, 1936-1937). Bologna, 1937. 4°, pp. 1-11.
- KEISSLER KARL. — Siegfried Stockmayer. Ein Nachruf. (Sonderabdruck aus « Verhandlungen der Zoologisch-Botanischen Gesellschaft in Wien ». Band LXXXV). Wien, 1935. 8°, pp. 1-8.
- LA ROTONDA C. — Concimazione minerale e produzione agraria. (Collana

- di quaderni agrari della Società Coltura Propaganda Agraria di Torino). Torino, 1936. 8°, pp. 1-24.
- LARTSCHNEIDER JOS. — Die als *Acaridius acephalus* bezeichnete Missgeburt und deren Bedeutung für die Entwicklungslehre und Krebsforschung. (Sonderabdruck aus der « Wiener Klinischen Wochenschrift ». Nr. 35). Wien, 1937. 8°, pp. 1-7.
- LEVI BEPPO. — Analisi matematica algebrica ed infinitesimale. Bologna, Editore Nicola Zanichelli, 1937. 8°, pp. 1-541.
- LONGO B. — Germoglio di opuntia sviluppatosi in un peculiare ambiente umido. (Estr. dal « Bull. dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli ». Tomo XIV, pp. 23-26). Napoli, 1937. 8°.
- LUQUET A. — Recherches sur la Géographie botanique du Massif Central. Les colonies xéothermiques de l'Auvergne. (Mémoires de la Société des Lettres, Sciences et Arts. « La Haute-Auvergne ». Tome I). Aurillac, 1937. 8°, pp. 1-328.
- MARCONI GUILLERMO. — Homenaje a la memoria del ingeniero Guillermo Marconi. (Supplemento de « Anales de la Sociedad Científica Argentina ». Tomo CXXIV). Buenos Aires, 1937. 8°, pp. 1-16.
- MARUCCO GUIDO. — Dal frumento al pane. (Collana di quaderni agrari della Società Coltura Propaganda Agraria di Torino). Torino, 1936. 8°, pp. 1-16.
- MASOERO PROSPERO. — Alcuni aspetti del problema zootecnico dell'A. O. I. (Collana di quaderni agrari della Società Coltura Propaganda Agraria di Torino). Torino, 1937. 8°, pp. 1-14.
- MENOZZI A. e PRATOLONGO U. — Chimica agraria. Vol. II. Il terreno e i fertilizzanti. Milano, Editore Ulrico Hoepli, 1938. 8°, pp. 1-XVI, 1-535.
- Report on the Work of the Széchenyi Scientific Society, founded for the promotion of research in natural Sciences in Hungary. Budapest, 1937. 8°, pp. 1-144.
- Ricerche sulla vegetazione dell'Etruria Marittima. (Acta Horti Pisani. Vol. II). Firenze, 1937. 8°, pp. 1-308.
- RUSSO A. — Stadi del ciclo vitale dell'ovo maturo della coniglia, distinti dai diversi prodotti del metabolismo. (Estr. dall'« Archivio di Scienze Biologiche ». Vol. XXIII, pp. 367-372). Bologna, 1937. 8°.
- SACCARDO P. A. — Sylloge fungorum omnium hucusque cognitorum supplementum universale curante Alex. Trotter. Vol. XXIII. Pars X. Basidiomycetae. Vol. XXIV. Sectio I. Pars X. Phycomycetae Laboulbeniomycetae Pyrenomycetae p. p.). Vol. XXIV. Sectio II. Pars X. Pyrenomycetae p. p., Discomycetae Appendix (Addenda ad vol. XXIII-XXIV). Vol. XXV. Pars X. Myxomycetae, Myxobacteriaceae, Deuteromycetae, Mycelia sterilia. Abellini, 1925-31. 8°, pp. 1-XXXII, 1-1016. 1-703, 705-1435, 1-1093.
- SILVESTRI FILIPPO. — Description of two new Species of *Symphylurinus* (Dicellura, Family Protophygidae) from India and China. (From the « Records of the Indian Museum ». Vol. XXXIX). Calcutta, 1937. 8°, pp. 1-4.
- SILVESTRI FILIPPO. — Description of a new Species of *Symphylurinus*. (Insecta, Dicellura) from Central America. (From the « American Museum Novitates ». Nr. 920). New York, 1937. 8°, pp. 1-3.
- SILVESTRI FILIPPO. — Eine neue Campoidea von Kärnten. (Separatum ex « Festschrift zum 60 Geburtstag von Professor Dr. Embrik Strand ». Vol. I, pp. 529-532). Riga, 1936. 8°.
- TOSINI ENRICO. — La grandiosa transumanza dalla Libia occidentale alla Libia orientale nel 1936. Tripoli, 1937. 8°, pp. 1-30.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 19 dicembre 1937 - Anno XVI

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica (Idraulica). — *Le linee delle quantità di moto totali in correnti liquide permanenti gradualmente varie.* Nota di G. NEBBIA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. GIORDANI.

1. Per una generica sezione trasversale di corrente liquida, nella ipotesi che nella sezione stessa la pressione sia distribuita con legge idrostatica, si può definire la grandezza

$$\gamma M = \gamma \omega \zeta + \gamma \frac{1 + \eta}{g} \frac{Q^2}{\omega}$$

in cui γ è il peso specifico del liquido; $\omega \zeta$ la risultante delle pressioni sulla sezione idrica di area ω ; $1 + \eta$ il noto coefficiente di correzione della quantità di moto; g l'accelerazione di gravità; Q la portata.

In particolare se si tratta di correnti libere, per le quali normalmente nei casi di pratico interesse le sezioni trasversali possono con buona approssimazione ritenersi verticali, ζ è la profondità del baricentro della sezione.

In queste ipotesi, in un precedente lavoro ⁽²⁾ ho proposto di interpretare i termini $\gamma \omega \zeta$ e $\gamma \frac{1 + \eta}{g} \frac{Q^2}{\omega}$, i quali hanno entrambi le dimensioni

(1) Nella seduta del 19 dicembre 1937.

(2) NEBBIA, *Rappresentazioni grafiche adimensionali delle quantità di moto in correnti liquide libere.* Pubblicazione n. 4 dell'Istituto di Costruzioni Idrauliche ed Impianti Speciali Idraulici della R. Università di Napoli. Veggasi anche «Acqua e Gas», febbraio-marzo 1936.

di una quantità di moto divisa per un tempo, come *quantità di moto* che la portata possiede rispettivamente in *potenza* ed in *atto*, di talchè γM acquista il significato di una *quantità di moto totale* che la portata Q possiede nella sezione; a ciò spinto dal fatto che, come ho mostrato nel citato lavoro, la *quantità di moto totale*, così definita, presenta spiccate analogie con l'*energia specifica totale*, notariamente a sua volta definita, per una sezione di corrente libera nelle ipotesi innanzi poste, da:

$$H = h + \frac{\alpha Q^2}{2 g \omega^2}$$

in cui h è la quota del pelo liquido valutata rispetto al punto più depresso del contorno bagnato, ed α è il noto coefficiente di correzione della potenza cinetica.

Nella presente Nota mi propongo di segnalare alcune conseguenze che dalla proposizione fatta possono trarsi e che si presentano di notevole interesse nello studio di problemi riguardanti correnti libere.

In quanto segue eliminerò, per ragioni di semplicità, il fattore costante γ , ma continuerò tuttavia a chiamare quantità di moto totale la grandezza proporzionale M che ha dimensioni L^3 e riterrò $\alpha = 1$; $\eta = 0$. Queste ultime ipotesi sono in generale accettabili con buona approssimazione nelle normali correnti gradualmente varie.

2. È noto che se' in un alveo, di cui sia assegnata la configurazione geometrica e la scabrosità delle pareti, defluisce in regime permanente gradualmente vario una portata costante, date le condizioni del deflusso in una sezione, resta definito anche il profilo longitudinale della corrente e possiamo tracciarlo con uno dei procedimenti, oramai numerosi, che si conoscono al riguardo; uno dei quali, ad esempio, particolarmente conveniente in alcuni casi, è stato segnalato da me in questi stessi « Rendiconti » (gennaio 1936). I risultati cui si perviene possono talvolta differire apprezzabilmente tra loro in dipendenza dei procedimenti usati e soprattutto dei criteri sempre approssimati con cui si valutano le dissipazioni di energia; ma non è dubbio che, salvo casi particolari, il fatto fisico debba intendersi univocamente definito.

Al profilo della corrente in questi ultimi decenni si è usato associare la linea dell'energia, di ben noto significato, la quale ha semplificato la risoluzione di molti problemi e soprattutto ha reso in generale più immediata la interpretazione fisica dei fenomeni. L'introduzione del nuovo parametro M , dati i caratteri di analogia che abbiamo detto esistere tra il comportamento delle grandezze H ed M in una generica sezione di corrente gradualmente varia, ci consente evidentemente di associare alla corrente anche una terza linea, che chiameremo *delle quantità di moto totali*. Questa risulta pertanto definita come il luogo degli estremi superiori dei segmenti che in ciascuna sezione misurano, in assegnata scala, le corrispondenti grandezze

M della quantità di moto totale. Tali segmenti si intendono condotti verticalmente ed, in ciascuna sezione, contati a partire dal punto più depresso del contorno bagnato.

3. Limitiamoci a considerare il caso di un alveo cilindrico di scabrezza costante e di lunghezza indefinita e supponiamo che, essendo note le condizioni di deflusso in una sezione A, si sia determinato il corrispondente profilo della corrente. Poichè tra gli elementi noti figurano la portata e la sezione ⁽¹⁾, la:

$$(1) \quad H = h + \frac{Q^2}{2g\omega^2}$$

ci permette di tracciare la linea dell'energia, e la:

$$(2) \quad M = \omega\zeta + \frac{Q^2}{g\omega}$$

quella delle quantità di moto totali.

Nello stesso alveo, ed a parità di portata, si abbia a considerare una seconda condizione di deflusso nella quale si riscontri in una generica sezione B la profondità che nella prima si riscontrava in A; il profilo che corrisponde a questa seconda condizione si potrà ricavare da quello già determinato per la prima con una traslazione di quest'ultimo, e precisamente con la traslazione B-A.

È evidente che anche le linee dell'energia e delle quantità di moto subiscono la stessa traslazione in quanto (1) e (2) ci dicono che, in B, H ed M assumono, nella seconda condizione di deflusso, i corrispondenti valori esistenti in A nella prima. Così in definitiva, detta s la distanza, valutata nella direzione della generatrice dell'alveo e contata positivamente nel senso del moto, di una sezione generica da altra di riferimento, le tre linee $h(s)$; $H(s)$; $M(s)$, per ciascun alveo di lunghezza indefinita e di scabrezza assegnata e costante, possono considerarsi come un sistema, che può subire traslazioni per rispetto all'alveo, ma che resta sempre rigidamente connesso e dipende univocamente dalla portata Q.

L'andamento delle $h(s)$ e delle $H(s)$ si deduce nei singoli casi con le normali discussioni sui profili di rigurgito che sarebbe fuor di posto richiamare qui; è invece di grande interesse esaminare l'andamento delle $M(s)$.

4. Se tra (1) e (2) si elimina h si giunge, come ho già mostrato nel citato lavoro, ad una:

$$(3) \quad M = f(H, Q)$$

(1) In rapporto alla sezione intendo dire che sia nota comunque, anche solo attraverso una rappresentazione grafica, una relazione che lega le aree delle sezioni idriche alle corrispondenti profondità, cioè una $\omega = f(h)$.

la quale deve intendersi come una relazione che, in una sezione verticale assegnata in forma e grandezza, lega i valori corrispondenti dei tre parametri, portata, carico totale e quantità di moto totale, sempre che la pressione sia distribuita con legge idrostatica.

Non sempre è possibile pervenire ad una rigorosa espressione esplicita del simbolo funzionale f che, anche nel caso semplice della sezione rettangolare, corrisponde a relazioni abbastanza complicate; nè qui interessa cercarle. Giova invece ricavare l'espressione di $\frac{\partial M}{\partial H}$ che si deduce da (3).

Di (1) e (2) eseguiamo le derivate parziali rispetto ad h , tenendo presente che $\omega \zeta$ è il momento statico dell'area ω rispetto al pelo libero:

$$(4) \quad \frac{\partial H}{\partial h} = 1 - \frac{Q^2}{g\omega^3} l$$

$$(5) \quad \frac{\partial M}{\partial h} = \omega - \frac{Q^2}{g\omega^2} l$$

nelle quali l rappresenta la larghezza della sezione alla quota h . Dividendo (5) per (4) si ha:

$$(6) \quad \frac{\partial M}{\partial H} = \omega.$$

La relazione (6), semplicissima e generale, ci dice che, a parità di portata, in una sezione corrispondente alle nostre ipotesi, la quantità di moto totale è una funzione sempre crescente dell'energia specifica totale, e che cresce più o meno rapidamente di questa a seconda che ω o, ciò che è lo stesso, h sia a sua volta una funzione crescente o decrescente di H . È ben noto, e si deduce del resto da (4), che ω ed h sono funzioni crescenti di H nel campo delle correnti lente, mentre sono funzioni decrescenti di H nel campo delle correnti veloci. Si conclude che M cresce più o meno rapidamente di H a seconda che si sia in correnti lente o veloci.

5. Per la discussione dell'andamento della $M(s)$ in correnti permanenti gradualmente varie a portata costante in alvei cilindrici di scabrezza costante, osserviamo che, in conformità di quanto si è innanzi detto in merito ai profili ed alle linee dell'energia e delle quantità di moto, le grandezze h, ω, H, M possono considerarsi nel caso funzioni unicamente di s . Per Q costante anche (3) si riduce ad una $M = f(H)$. In conseguenza possiamo senz'altro porre:

$$(7) \quad \frac{dM}{ds} = \frac{dM}{dH} \frac{dH}{ds} = \omega \frac{dH}{ds}$$

$$(8) \quad \frac{d^2 M}{ds^2} = \frac{d\omega}{ds} \frac{dH}{ds} + \omega \frac{d^2 H}{ds^2}.$$

L'equazione del moto permanente gradualmente vario, nelle condizioni in esame, può essere scritta nella nota forma sintetica:

$$(9) \quad i - J = \frac{dH}{ds}$$

in cui i è la pendenza del fondo e J è la dissipazione unitaria di carico (dissipazione di energia per unità di peso di liquido e per unità di spostamento in direzione s) che notoriamente corrisponde alla pendenza della linea dell'energia.

Da (7) e (9) si deduce integrando:

$$(10) \quad M_2 - M = i_1 \int_{s_1}^{s_2} \omega ds - \int_{s_1}^{s_2} J \omega ds.$$

Il primo termine del secondo membro corrisponde, a meno del fattore γ che, come si è detto, si è sistematicamente eliminato, alla componente nella direzione s del peso del tronco di corrente compreso tra le sezioni s_2 ed s_1 ; il secondo termine corrisponde alla totale forza resistente che agisce sullo stesso tronco. Od anche, come risulta da semplici trasformazioni, la differenza tra le quantità di moto totali $M_2 - M_1$ è eguale alla somma degli impulsi nella direzione s che la portata riceve, nel passare da s_1 ad s_2 , per effetto del suo peso e delle resistenze cui è soggetta.

Osservo incidentalmente che (10) si sarebbe potuta scrivere senz'altro con l'applicare al caso la prima equazione globale dell'equilibrio dinamico dei sistemi continui; la via seguita ha consentito di scrivere in modo più diretto, cioè senza l'ausilio delle equazioni del moto, le (6), (7) ed (8) di cui ci gioveremo per discutere la $M(s)$.

Da (8) e (9) si deduce:

$$(11) \quad \frac{d^2 M}{ds^2} = \frac{d\omega}{ds} \frac{dH}{ds} - \omega \frac{dJ}{ds}.$$

In conformità di quanto si è detto innanzi $\frac{d\omega}{ds} \frac{dH}{ds}$ è positivo per le correnti lente, negativo per quelle veloci; il termine $-\omega \frac{dJ}{ds}$ è invece positivo per correnti ritardate, negativo per quelle accelerate almeno per gli ordinari alvei aperti, per i quali il raggio medio non presenta massimi in funzione della profondità, ed ai quali solo da questo punto in poi intendiamo riferirci; di talchè per le correnti lente ritardate e per le veloci accelerate si deduce senz'altro che $\frac{d^2 M}{ds^2}$ ha lo stesso segno di $\frac{d^2 H}{ds^2}$; per gli altri

casi (11) non è sufficiente a definire il segno di $\frac{d^2 M}{ds^2}$ e bisogna ricorrere alle condizioni ai limiti. Queste, e la conoscenza ormai acquisita dell'andamento dei profili di corrente e delle linee dell'energia, conducono al risultato che, per alvei a fondo orizzontale o declivi nel senso del moto, $\frac{d^2 M}{ds^2}$ ha sempre lo stesso segno di $\frac{d^2 H}{ds^2}$. Di conseguenza possiamo enunciare che:

in una corrente permanente gradualmente varia a portata costante in un ordinario alveo aperto, a fondo orizzontale o declive, di scabrezza costante, la linea delle quantità di moto totali si presenta concava o convessa verso l'alto a seconda che sia concava o convessa quella dell'energia.

L'andamento relativo delle $M(s)$ e delle $H(s)$ dipende dalla base che si adotta per ridurre le quantità di moto totali M (di dimensioni L^3) a grandezze lineari. In particolare indichiamo con l'indice Q i valori che corrispondono ad uno stato critico di portata Q nella assegnata sezione dell'alveo, con C una costante, e poniamo $M' = \frac{M}{\omega_Q} + C$, il che equivale ad assumere ω_Q come base di riduzione per il tracciamento della $M(s)$ ed a conferire alla linea, che con tale base risulta, la traslazione verticale C . Determiniamo C in guisa che sia:

$$(12) \quad M'_Q = H_Q.$$

La (6) ci dà:

$$(6') \quad \frac{dM'}{dH} = \frac{\omega}{\omega_Q}.$$

Da (6') e (12) discende direttamente che per alvei del tipo innanzi definito:

la $M'(s)$ e la $H(s)$ si incontrano ed hanno la stessa tangente in una sezione di stato critico;

la $M'(s)$ risulta sempre più alta della $H(s)$ se la corrente è lenta; accade il contrario per correnti veloci.

Per gli alvei a sezione rettangolare si trova $C = 0$.

I risultati che precedono consentono un facile tracciamento a carattere qualitativo della $M'(s)$ in rapporto alla $H(s)$.

6. Non insisto su ulteriori particolari in merito ma, pur senza darne qui lo sviluppo, mi preme osservare che molti dei risultati a cui siamo pervenuti, riferendoci unicamente ad alvei cilindrici, possono estendersi, in qualche caso, anche ad alvei a loro volta gradualmente vari, purchè si tratti di variazioni molto lievi e gradualità.

L'aver posto $\alpha = 1$ ed $\eta = 0$, con che si sono implicitamente trascurati i termini dovuti alla distribuzione delle velocità nelle espressioni del moto gradualmente vario e delle quantità di moto, e l'aver trascurato le inclinazioni per rispetto alla verticale delle sezioni trasversali della corrente, che ci ha consentito di trattare le quantità di moto totali come grandezze scalari, diminuisce benvero il rigore dei risultati cui siamo pervenuti, ma non ne altera la sostanza nella maggior parte dei casi pratici.

Sarebbe per altro possibile portare in conto gli elementi trascurati per conferire la massima semplicità possibile alla trattazione fatta, solo accettando la complicità di formule, non sempre lieve, che ne discende.

7. La gradualità del movimento di una corrente permanente può in generale interrompersi o perchè si interrompe la gradualità dell'alveo (ad es. allargamenti bruschi, o discontinuità nel profilo del fondo ecc.) o per cause insite nella corrente (ad es. salto di Bidone, cambiamenti di tipo di corrente).

Per schematizzare taluni fenomeni che ne conseguono si suole ricorrere, quando impegnano tratti brevi, alla ipotesi semplificatrice di considerarli localizzati in una sezione trasversale della corrente nella quale si considerano pure localizzate le dissipazioni di energia meccanica che nella maggior parte dei casi essi determinano. In questa sezione la linea dell'energia presenta, in conseguenza, una discontinuità o, più precisamente, una caduta brusca corrispondente all'energia specifica dissipata. La linea delle quantità di moto totali invece, quando come forze impulsive possono portarsi in conto le sole pressioni idrostatiche (ad es. salto di Bidone, brusco allargamento), si presenta continua in corrispondenza di tali sezioni; una discontinuità si riscontra di regola solo nella $\frac{dM}{ds} = f(s)$ e, di conseguenza, nella pendenza della linea delle quantità di moto totali.

In questi casi l'uso delle linee delle quantità di moto totali può riuscire di gran vantaggio nella risoluzione di problemi pratici. In più opportuna sede ne darò qualche esempio in applicazioni concrete.

Meccanica. — *Sulla teoria dell'arco elastico a direttrice circolare.* Nota II di F. TRICOMI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

4. Per procedere ad un ulteriore studio dei possibili contorni delle sezioni di un arco elastico per cui valga la (3) della Nota I⁽²⁾, cioè delle curve di quart'ordine rappresentate dalla (8) (o, ciò che è poi sostanzialmente lo stesso, dalla (6) nel caso $m = 1$) è utile servirsi della rappresentazione parametrica di tali curve mediante funzioni ellittiche. A tale scopo osserviamo che, ponendo

$$x = \sqrt{1 + c} \cos \varphi,$$

dalla (9) segue subito

$$y = \sqrt{\frac{c(1+c)}{2}} \sqrt{1 - \frac{1+c}{2c} \sin^2 \varphi} \sin \varphi;$$

basta dunque porre

$$\varphi = amv \quad \text{con} \quad k^2 = \frac{1+c}{2c},$$

per dedurre subito che le curve (8) sono suscettibili della rappresentazione parametrica:

$$(14) \quad x = \sqrt{1+c} \, cnv, \quad y = \sqrt{\frac{c(1+c)}{2}} \, snv \, dnv, \quad \left(k^2 = \frac{1+c}{2c}\right).$$

Questa rappresentazione parametrica va benissimo se è $c > 1$. Se invece è, come nei casi che a noi effettivamente interessano, $c < 1$, essa presenta l'inconveniente di fare intervenire valori maggiori di 1 del modulo k^2 che, come si sa, è meglio evitare. Tale inconveniente può, del resto, assai facilmente eliminarsi ricorrendo alle formule di trasformazione lineare delle funzioni di Jacobi, e precisamente a quelle relative al caso in cui e_1, e_2, e_3 vengono cambiate risp. in e_2, e_1, e_3 ; caso in cui k^2 viene cambiato in $k'^2 = 1/k^2$ e $sn(v, k)$, $cn(v, k)$, $dn(v, k)$ rispettivamente in

(1) Nella seduta del 5 dicembre 1937.

(2) In questo stesso volume dei « Rendiconti », pp. 388-392. Nella presente Nota continuiamo la numerazione dei paragrafi e delle formule.

$k \operatorname{sn}(kv, k)$, $dn(kv, k)$, $cn(kv, k)$ ⁽¹⁾. Si vede così che le formule parametriche (14) possono rimpiazzarsi con le altre

$$(15) \quad \boxed{x = \sqrt{1+c} \operatorname{dn} u, \quad y = c \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u} \quad , \quad \left(k^2 = \frac{2c}{1+c} \right),$$

in cui, per semplicità, si è scritto u al posto di kv .

Le (15) possono, fra l'altro, utilizzarsi per determinare l'area A della sezione \mathcal{A} del nostro arco quando il suo contorno è una delle ovali (8), giungendo così alla conclusione interessante che essa differisce soltanto per termini dell'ordine di c^4 da quella di un cerchio di raggio $c/2$.

All'uopo si osservi che quando u cresce da 0 a $\mathbf{K} = \mathbf{K}(k)$ il punto (x, y) le cui coordinate son date dalle (15) percorre, da destra verso sinistra, la metà superiore del contorno di \mathcal{A} , epperò potrà porsi

$$A = -2c \sqrt{1+c} \int_0^{\mathbf{K}} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \, d(\operatorname{dn} u)$$

donde, ricordando che

$$d(\operatorname{dn} u) = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \, du$$

e tenendo conto che, calcolando la derivata del prodotto $\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ e poi integrando fra 0 e \mathbf{K} , si ottiene facilmente la formula

$$3k^2 \int_0^{\mathbf{K}} \operatorname{sn}^4 u \, du = 2(1+k^2) \int_0^{\mathbf{K}} \operatorname{sn}^2 u \, du - \mathbf{K},$$

segue che

$$A = \frac{2}{3} c \sqrt{1+c} \left[(k^2 - 2) \int_0^{\mathbf{K}} \operatorname{sn}^2 u \, du + \mathbf{K} \right];$$

ma, d'altra parte, si ha notoriamente ⁽²⁾:

$$\int_0^{\mathbf{K}} \operatorname{sn}^2 u \, du = \frac{\mathbf{K} - \mathbf{E}}{k^2};$$

dunque avremo in definitiva che

$$(16) \quad A = \frac{2}{3} \sqrt{1+c} [\mathbf{E} - (1-c) \mathbf{K}] \quad , \quad \left(k^2 = \frac{2c}{1+c} \right),$$

(1) Cfr. le mie *Funzioni ellittiche* (Bologna, Zanichelli, 1937), quadro a p. 168, caso C.

(2) Cfr., p. es., loc. cit. (3), p. 257.

donde, servendosi dei noti sviluppi in serie di **K** ed **E**, segue finalmente che

$$(17) \quad A = \frac{\pi}{4} c^2 + O(c^4),$$

come si era annunciato in principio.

Passiamo ora alla determinazione del baricentro **G** di **Q** che riesce più elementare di quella di **A** e conduce al risultato che, a meno di termini dell'ordine di c^2 , **G** coincide col punto **C** di coordinate $x = 1$, $y = 0$.

A tal uopo, detta x' l'ascissa di **G**, partiamo dall'ovvia formula

$$A x' = 2 \int_{x_1}^{x_2} xy \, dx \quad , \quad (y \geq 0)$$

donde, sostituendo ad y il suo valore dato dalla (9), segue

$$A x' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{c^2 - (x^2 - 1)^2} x \, dx ;$$

poniamo ora

$$(18) \quad x^2 = 1 + ct,$$

avremo così, tenuto anche conto delle (10), che

$$A x' = \frac{c^2}{2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - t^2} \, dt = \frac{\pi}{4} c^2$$

ossia che

$$(19) \quad x' = \frac{\pi c^2}{4A} = 1 + O(c^2),$$

come volevasi dimostrare.

Finalmente occupiamoci del calcolo della importante costante λ definita⁽¹⁾ dalla formula

$$\lambda = \iint_Q \left(-\frac{1}{b} \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\gamma}} + \frac{1}{r} \right) dQ,$$

che, moltiplicata per **G** (modulo di elasticità tangenziale del materiale), dà il rapporto per l'intensità **F** della forza risultante agente sulla sezione terminale dell'arco (forza la cui retta d'azione deve coincidere, per ipotesi, con l'asse di curvatura) e la costante b che, precedentemente, si era lasciata indeterminata:

$$(20) \quad F = bG\lambda.$$

(1) Cfr. FUBINI, loc. cit. nella Nota I, p. 399 o il mio lavoro cit., pure nella Nota I, sotto (4).

Allo scopo indicato osserviamo anzitutto che, avendo noi, in quest'ultimo paragrafo, operato come se fosse

$$(21) \quad r_0 = 1, \quad m = 1;$$

in virtù delle (5) dovremo conseguentemente porre

$$(22) \quad \alpha = \beta = -\frac{b}{2},$$

donde segue

$$(23) \quad \Phi = -\frac{b}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \zeta$$

e, successivamente,

$$\lambda = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{A}} \left(\frac{1}{r} - r \right) d\mathcal{A} = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{A}} \left(\frac{1}{x} - x \right) d\mathcal{A}.$$

Ciò posto serviamoci, come dianzi, della (9); avremo così che

$$\lambda = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \sqrt{c^2 - (x^2 - 1)^2} x dx$$

donde, con l'ausilio della stessa sostituzione (18) dianzi usata, si trae

$$\lambda = -\frac{c^2}{2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-t^2} \frac{ct}{1+ct} dt$$

e, successivamente,

$$(24) \quad \lambda = \frac{\pi}{8} \left(1 - \sqrt{1-c^2} - \frac{1}{2} c^2 \right) = \frac{\pi}{32} \left(c^4 + \frac{1}{2} c^6 + \dots \right).$$

Tutto questo nelle ipotesi (21), la prima delle quali equivale, come già sappiamo ad aver scelto r_0 (cioè il segmento OC) come unità di misura delle lunghezze (su entrambi gli assi, perchè è inoltre $m = 1$). Se invece l'unità di misura delle lunghezze è generica, allora la (8) va rimpiazzata con la (6) (in cui sia stato posto $m = 1$), e le formule (23) e (24) rispettivamente con le due altre:

$$(23') \quad \Phi = -\frac{b}{2} \left(\frac{r}{r_0} + \frac{1}{r} \right) \zeta$$

e

$$(24') \quad \lambda = \frac{\pi r_0}{8} \left(1 - \sqrt{1-c^2} - \frac{1}{2} c^2 \right) = \frac{\pi r_0}{32} \left(c^4 + \frac{1}{2} c^6 + \dots \right).$$

5. Dopo tutto quanto precede, lo studio approssimato della deformazione di un arco elastico a direttrice circolare (di raggio R) e sezione pure circolare (di raggio ρ), incastrato ad un estremo e sollecitato all'altro da un sistema di forze la cui risultante F abbia come retta d'azione l'asse di curvatura dell'arco⁽¹⁾, non offre più alcuna difficoltà, supposto che — come di regola si verifica nella pratica — il rapporto ρ/R sia tanto piccolo da potersene trascurare il quadrato⁽²⁾.

Infatti, nelle condizioni suaccennate la sezione dell'arco potrà identificarsi con la quartica rappresentata dalla (6) nel caso in cui sia

$$r_0 = R \quad , \quad c = \frac{2\rho}{r_0} \quad , \quad m = 1 \quad ,$$

epperò avremo anzitutto che

$$\lambda = \frac{\pi\rho^4}{2R^3} \left(1 + \frac{2\rho^2}{R^2} + \dots \right)$$

ossia

$$(25) \quad \boxed{\lambda = \frac{J_0}{R^3} \left[1 + O\left(\frac{\rho^2}{R^2}\right) \right]} \quad ,$$

avendo osservato che $\pi\rho^4/2$ coincide col *momento d'inerzia polare* J_0 di un cerchio di raggio ρ rispetto al proprio centro.

D'altra parte sappiamo già⁽³⁾ che, in generale (cioè qualunque sia la sezione dell'arco considerato, purchè simmetrica rispetto a quello ch'è qui l'asse x), la sezione terminale dell'arco subisce una traslazione T , parallela all'asse di curvatura, e una rotazione θ (nel suo piano) date dalle formule

$$T = b\varphi + c_2 R \sin \varphi \quad , \quad \theta = -c_2 \sin \varphi$$

dove φ è l'ampiezza angolare dell'arco (la cui direttrice ha, dunque, la lunghezza $l = R\varphi$) e si è posto

$$c_2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} \right)_G \quad .$$

Conseguentemente, avendosi attualmente, in seguito alla (23'),

$$c_2 = -b/R \quad ,$$

(1) È il tipo di sollecitazione che, per esempio, si presenta — di regola — nella teoria delle molle elicoidali.

(2) Ipotesi che, se non si verificasse, porrebbe in questione la stessa legittimità del trattar l'arco, come facciamo, *alla maniera di Saint-Venant*.

(3) Cfr. il mio lavoro citato (nella Nota I) sotto (4), § 3.

sussisteranno le formule

$$T = b(\varphi - \sin \varphi) = \frac{F}{G\lambda}(\varphi - \sin \varphi), \quad \theta = \frac{b}{R} \sin \varphi = \frac{F}{G\lambda R} \sin \varphi,$$

che, servendosi della (25) ridotta al suo solo primo termine, possono anche più esplicitamente scriversi:

$$(26) \quad T = \frac{FR^3}{GJ_0}(\varphi - \sin \varphi), \quad \theta = \frac{FR^2}{GJ_0} \sin \varphi.$$

Le ultime formule si prestano, fra l'altro, a considerazioni perfettamente analoghe a quelle svolte in fine del precedente mio lavoro ripetutamente citato, cioè a ritrovare, come caso limite per $R \rightarrow \infty$, le classiche formule sulla torsione di una trave rettilinea, stavolta a sezione circolare.

Infatti si vede anzitutto che, quando si fa tendere R a ∞ ferma tenendo la lunghezza l dell'arco, il che implica

$$\sin \varphi \simeq \frac{l}{R}, \quad \varphi - \sin \varphi \simeq \frac{1}{3!} \frac{l^3}{R^3},$$

onde evitare che θ tenda ad ∞ insieme con R , occorre supporre che F tenda a zero come $1/R$, cioè che il momento $\mathfrak{M} = RF$ della risultante delle forze esterne rispetto al baricentro della sezione dell'arco, tenda ad un certo valore finito \mathfrak{M}^* . Ma, d'altra parte, dalla seconda delle (26) segue che

$$\theta^* = \lim_{R \rightarrow \infty} \theta = \frac{l}{GJ_0} \lim_{R \rightarrow \infty} RF;$$

dunque il valor limite θ^* di θ ed \mathfrak{M}^* sono legati dalla relazione

$$(27) \quad \theta^* = \frac{\mathfrak{M}^* l}{GJ_0},$$

identica a quella che vale nella torsione di una trave rettilinea a sezione circolare⁽¹⁾.

Quanto alla traslazione T , dalla prima delle (26) segue che, nelle condizioni suindicate, essa tende a zero per $R \rightarrow \infty$.

(1) Ved., p. es., G. COLONNETTI, *La statica delle costruzioni*. I (Torino, Utet, 1928), p. 155, form. (76), dove ω è da identificare con θ^* , \mathfrak{Q} con \mathfrak{M}^* e χ con l .

Astronomia (Statistica stellare). — *Nuove ricerche sull'«ammasso del Sole»* ⁽¹⁾. Nota I di L. GIALANELLA, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. ARMELLINI.

1. La considerazione di un «ammasso del Sole», cioè di un gruppo di stelle moventisi di conserva col Sole e come tali aventi quindi velocità spaziale relativa minima, rimonta — sebbene senza la esplicita attuale denominazione — allo Schiaparelli, il quale nel 1908 aveva segnalato la possibile esistenza di una corrente di stelle associate al Sole ⁽³⁾, a simiglianza dei noti insiemi di stelle, tendenti verso una mèta comune, dell'Orsa Maggiore, del Toro, dello Scorpione.

Una trattazione più estesa ed una più concreta impostazione di questo problema, per non ricordare precedenti lavori di altri (P. H. Stroobant, P. Bourgeois) — resa possibile da una enormemente più grande e precisa conoscenza di caratteristiche stellari (velocità radiali, moti propri e parallassi) — si deve a G. Horn d'Arturo in tempi assai più recenti. Egli, in due belle Memorie del 1929 e 1930 ⁽⁴⁾, considerando stelle con velocità spaziali non eccedenti i 3.4 km/sec., è pervenuto alla considerazione di nucleo di diciassette stelle che si muoverebbero di conserva col Sole, e ha trovato che esse possono considerarsi distribuite con buona approssimazione in due piani paralleli tra di loro e paralleli alla retta che indica la direzione del moto del Sole verso l'apice. G. Horn ha chiamato questi due piani *Piano del Sole* e *Piano del Cigno* per la loro rispettiva prossimità al Sole e alla stella γ Cygni. Tale nucleo di stelle sarebbe poi circondato da due agglomeramenti più vasti, formati dalle stelle con velocità compresa tra 3.4 e 6 km/sec., i quali andrebbero sensibilmente a condensarsi lungo i due piani sopradetti.

Ora, il nuovo materiale pubblicato in gran copia in questi ultimi anni — dopo le ricerche dell'Horn — mi ha indotto a riprendere in considerazione ex-novo l'interessantissimo problema e portare il mio contributo — anche se modesto — alla conoscenza dell'Universo siderale; conoscenza che è tra gli scopi finali di ogni ricerca astronomica moderna.

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Roma.

(2) Nella seduta del 5 dicembre 1937.

(3) Cfr. *Orbite cometarie, correnti cosmiche, meteoriti*. «Riv. di Fis. Mat. e Sc. Nat.», Pavia, 1908.

(4) *L'ammasso delle stelle dotate di velocità spaziali minime*. Pubbl. Osserv. di Bologna, vol. II, 4-1929; e *L'ammasso biplanare delle stelle concomitanti il Sole*. Pubbl. Osserv. di Bologna, vol. II, 5-1930.

Per questo mio lavoro ho utilizzato le più recenti raccolte di dati stellari fornite dai vari osservatori astronomici, e pubblicate sino a tutto questo anno; principalmente:

J. H. MOORE, *A general Catalogue of the radial velocities of Stars, Nebulae and Clusters*. Pub. of the «Lick Observatory», vol. XVIII, 1932.

F. SCHLESINGER, *General Catalogue of Stellar Parallaxes*, 2^a ed., 1935.

R. SCHORR, *Bergedorfer Eigenbewegungs-Lexikon*, bd. I-II, 1936.

Y., *Parallaxes of 851 stars*, in «Trans. of the Astron. Observatory of Yale Univ.», 1936.

GR. *Observations of Stellar Parallaxes*, vol. II, «Greenwich Observatory», 1934.

Prima di entrare nei dettagli della ricerca, dico subito che da questo materiale ho potuto ricavare e formulare la nuova costituzione di quell'agglomeramento di stelle che si possono considerare moventisi sensibilmente insieme con il Sole, e che per questo è chiamato senz'altro «ammasso del Sole». *Esso viene ad essere costituito da 122 stelle distinte in un primo gruppo di 36 stelle dotate di velocità spaziale relativa minore di 4 km/sec., e in un secondo gruppo di 86 stelle dotate di velocità spaziale relativa compresa tra 4 e 7 km/sec.*⁽¹⁾

2. Ho iniziato il lavoro facendo una prima scelta di stelle dal *General Catalogue* di Lick, e cioè considerando quelle stelle di cui la velocità radiale non oltrepassa l'errore probabile più alto [da 3 a 9 km/sec.]: dalle 6739 stelle contenute nel catalogo ho potuto così sceglierne 2055.

Sono passato poi alla considerazione delle parallassi per questo gruppo di 2055 stelle, prendendole innanzi tutto dal grande catalogo dello Schlesinger. Generalmente mi sono servito delle parallassi spettroscopiche, in primo luogo perchè sono le più numerose e in secondo luogo per rendere più omogenea la ricerca. Quando tale parallasse spettroscopica mancava, ho assunto la trigonometrica, e nei casi in cui i due valori (trigon. e spett.) non erano molto differenti, e specialmente per i tipi spettrali più avanzati, ho assunto come valore la media delle due parallassi. Ma questo è accaduto solo in pochi casi che ho contrassegnato rispettivamente con gli indici *t* e *m*. Così pure, per quei sistemi binari di cui è nota la parallasse dinamica (sempre

(1) La distinzione in due gruppi è, evidentemente, del tutto artificiale; ma può essere comoda. E per questo — avendola assunta durante l'elaborazione della ricerca, seguendo l'Horn — ho preferito mantenerla: essendo di circa 20 km/sec. la velocità del Sole verso l'apice, il 1° gruppo è composto dalle stelle con velocità spaziale relativa minore di $\frac{1}{5}$ della velocità del Sole, e l'altro dalle stelle con velocità minore di $\frac{1}{3}$. Il 1° gruppo tenderebbe, pertanto, a conservarsi sensibilmente *invariabile col tempo*, mentre il secondo potrebbe più o meno diradarsi.

riportata nel *General Catalogue* di Schlesinger) e non quella spettroscopica o trigonometrica, ho assunto questo valore contrassegnandolo con l'indice d .

Le altre parallassi dedotte dalle successive liste portano accanto la sigla corrispondente.

Ho ricavato infine i moti propri — ove possibile — dal *General Catalogue* delle parallassi di Schlesinger, salvo poi a confrontarne o migliorarne i valori con il *Bergedorfer Eigenbewegungs-Lexikon* di Schorr.

Con questi dati così raccolti sono passato alla determinazione delle *velocità trasversali* V_t , mediante la formula:

$$V_t = 4.74 \frac{\mu''}{\pi''} \quad (\text{in km/sec.})$$

essendo:

μ'' il moto proprio annuo in secondi d'arco, e π'' la parallasse in secondi d'arco.

Ne ho ricavato poscia la *velocità spaziale* W :

$$W = \sqrt{V_r^2 + V_t^2}$$

essendo V_r la velocità radiale; la W è stata così espressa anch'essa in km/sec.

Le tabelle I e II di questa Nota contengono i primi risultati della mia ricerca, fornendo rispettivamente le caratteristiche dei due gruppi di stelle che vengono a costituire l'« ammasso del Sole ». Di ogni stella è dato il nome o l'indicazione del Catalogo [B = catalogo di Boss, β GC = cat. di stelle doppie di Burnham], le coordinate, la grandezza, il tipo spettrale, la velocità radiale, la parallasse, il moto proprio, e la velocità spaziale calcolata.

Nella successiva Nota darò di quest'« ammasso del Sole » una rappresentazione grafica, e un modello, cercando di rintracciare — nella nuova costituzione di esso — la distribuzione biplanare pensata dall'Horn, e ricavandone le possibili deduzioni.

Cercherò poi di estendere in altre Note più profondamente la ricerca, sia utilizzando il materiale che successivamente potrà essere elaborato e pubblicato (con speciale riguardo alle parallassi e ai moti propri ancora ignoti o poco bene noti), e sia prendendo in esame — per una più completa statistica — altri elementi, come grandezze assolute, luminosità, tipi spettrali ecc.

TABELLA I.

Stelle con velocità spaziale minore di 4 km/sec.

N.	*	$\alpha_{1900.0}$	$\delta_{1900.0}$	Mag.	Sp.	V_e	π''	μ''	W
1	B 229	0 ^h 58 ^m .3	— 46° 56'	5 .34	K o	— 1.4	0''.015 _m	0''.004	1.90
2	33. Ceti	1 05 .4	+ 1 55	6 .20	K 1	— 2.6	.006	.004	4.00
3	v Piscium	1 36 .2	+ 4 59	4 .68	K 5	+ 0.4	.032 _t	.018	2.69
4	I Arietis	1 44 .6	+ 21 47	6 .2	G 9	+ 3.6	.008	.017	3.60
5	ι Cassiopeiae A	2 20 .8	+ 66 57	4 .7	A 4	+ 0.5	.019	.013	3.27
6	γ Persei	2 57 .6	+ 53 07	3 .08	F 9	+ 1.0	.023	.012	2.67
7	B 864	3 40 .4	+ 65 13	4 .71	M 1	— 3.2	.010 _m	.004	3.72
8	46 Tauri	4 08 .2	+ 7 28	5 .35	F o	+ 4.0	.025 _m	.002	4.00
9	β GC 2220 <i>np</i>	4 24 .1	+ 53 42	6 .61	B o	— 0.7	.003	.000	0.7
10	5 Camelopard.	4 46 .9	+ 55 06	5 .58	A o	+ 2.4	.012	.008	3.96
11	26 Tauri	5 32 .2	+ 30 26	5 .49	A 9	+ 1.6	.019	.014	3.96
12	23 Camelopard.	5 34 .9	+ 61 26	6. 39	G 5	— 3.6	.008	.002	3.79
13	W Geminorum	6 29 .2	+ 15 25	6.7-7.5	G o	— 1.2	.016 _t	.010	3.08
14	12 Lyncis	6 37 .4	+ 59 33	5. 2	A 3	— 1.6	.019	.015	4.07
15	δ Geminorum <i>b</i>	7 14 .2	+ 22 10	3 .51	A 3	+ 2	.052 _m	.023	2.89
16	δ Geminorum <i>f</i>	7 14 .2	+ 22 10	8 .0	K 4	+ 2.2	.039 _d	.023	3.56
17	B 1916	7 16 .5	+ 81 06	6 .50	G 5	— 2.0	.007	.002	2.42
18	4 Puppis	7 41 .3	— 14 19	5 .11	F o	— 1.8	.024 _m	.014	3.29
19	B 2349	8 40 .8	— 42 17	4 .12	G 5	— 2.3	.046 _t	.018	2.95
20	B 2783	10 23 .7	— 57 08	4 .94	F 1	— 1.2	.016 _t	.005	1.98
21	B 2952	11 02 .4	— 61 53	4 .76	G 5	— 2.0	.051 _t	.022	2.86
22	B. D. + 34° 2264	11 46 .0	+ 33 56	6 .14	F o	+ 0.8	.013	.010	3.74
23	B 3182	12 07 .5	+ 78 10	5 .12	A 5	+ 0.3	.027 _m	.023	4.00
24	12 Comae	12 17 .5	+ 26 24	4 .82	A	+ 1.9	.036	.013	2.56
25	16 Comae	12 22 .0	+ 27 23	5 .04	A 2	+ 1.7	.020 _m	.012	3.31
26	83 Virginis	13 39 .1	— 15 41	5 .71	G 3	+ 0.5	.018	.010	2.68
27	47 Herculis	16 45 .5	+ 7 25	5 .46	A o	— 2.1	.016	.009	3.39
28	θ Scorpii	17 30 .1	— 42 56	2 .04	F o	+ 1.4	.024	.012	2.75
29	34 Draconis	17 56 .9	+ 72 00	5 .54	A 9	— 2.7	.022	.012	3.73
30	Y Sagittarii	18 15 .5	— 18 54	5.4-6.2	G 2	— 2	.022 _t	.014	3.61

Segue: TABELLA I.

N.	*	$\alpha_{1900.0}$	$\delta_{1900.0}$	Mag.	Sp.	V_e	π''	μ''	W
31	B 4724	18 ^h 34 ^m .6	+ 77° 28'	5 .84	K 2	+ 1.1	0''.007	0''.005	3.55
32	B. D. + 12° 3750	18 55 .3	+ 12 45	7 .3	K 5	— 2.5	.004	.000	2.5
33	ρ Sagittarii	19 15 .9	— 18 02	3 .95	A 4	+ 1.8	.052	.029	3.19
34	γ Aquilae	19 41 .5	+ 10 22	2 .80	K 3	— 2.0	.023	.012	3.18
35	B 5190	20 11 .0	+ 25 17	4 .82	B 3	— 1	.006	.003	2.57
36	DT Cygni	21 02 .3	+ 30 47	5 .86	F 7	— 0.2	.014	.006	2.04

TABELLA II.

Stelle con velocità spaziale compresa tra 4 e 7 km/sec.

N.	*	$\alpha_{1900.0}$	$\delta_{1900.0}$	Mag.	Sp.	V_e	π''	μ''	W
37	B 5	0 ^h 01 ^m .2	+ 63° 37'	5 .49	B 8	— 1.6	0''.008	0''.010	6.13
38	22 Andromedae	0 05 .1	+ 45 31	5 .08	F 2	— 4.8	.017	.007	5.15
39	B 41	0 11 .6	+ 60 59	5 .80	G 3	— 4.6	.007	.004	5.34
40	32 Andromedae	0 35 .7	+ 38 55	5 .42	G 6	— 5.1	.014	.007	5.62
41	B 166	0 42 .3	+ 50 54	6 .76	A 2	— 4.7	.006	.005	6.13
42	ϕ Andromedae	1 03 .7	+ 46 42	4 .28	B 8	— 0.3	.012	.013	5.18
43	40 Cassiopeiae	1 30 .5	+ 72 32	5 .50	G 5	— 4.0	.010	.010	6.21
44	λ Arietis	1 52 .4	+ 23 07	4 .83	A 5	+ 0.1	.086 _m	.094	5.17
45	49 Cassiopeiae	1 56 .0	+ 75 38	5 .30	G 5	0.0	.021 _i	.020	4.79
46	ϵ Trianguli	1 57 .1	+ 32 48	5 .44	A 2	+ 2.6	.019	.024	6.51
47	10 Trianguli	2 13 .2	+ 28 11	5 .28	A 3	+ 3.8	.016	.015	5.84
48	ζ Horologii	2 37 .6	— 54 59	5 .26	F 2	— 1.1	.027 _i	.038	6.73
49	B 699	2 58 .9	+ 63 40	5 .82	A 0	— 2.2	.006	.016	6.67
50	β Persei	3 01 .7	+ 40 34	2.3–3.5	B 8	+ 5.7	.034 _m	.011	5.89
51	31 Persei	3 12 .5	+ 33 51	4 .92	K 2	+ 1.8	.009	.012	6.55
52	B 896	3 48 .6	+ 62 57	4 .87	B 9	+ 4.6	.010	.006	5.40
53	β GC 1927 <i>b</i>	3 48 .6	+ 60 49	5 .3	K 4	— 2.4	.011 _m	.013	6.08
54	B 914	3 53 .3	+ 80 26	5 .25	F 8	+ 3.0	.019	.016	4.99
55	ν Tauri	3 57 .8	+ 5 43	3 .94	A 0	— 6.0	.031	.009	6.15
56	B 974	4 08 .9	+ 53 22	5 .12	A 1	+ 4	.018	.005	4.38

Segue: TABELLA II.

N.	*	$\alpha_{1900.0}$	$\delta_{1900.0}$	Mag.	Sp.	V_e	π''	μ''	W
57	66 Tauri	4 ^h 18 ^m .4	+ 9° 14'	5 .06	A 3	— 1.5	0''.020	0''.026	6.35
58	58 Persei	4 29 .7	+ 41 04	4 .46	G 1	+ 3.7	.021 _t	.026	6.94
59	SZ Tauri	4 31 .4	+ 18 20	7.2-7.7	G 0	— 3.2	.016 _t	.015	5.45
60	α Camelopard.	4 44 .1	+ 66 10	4. 38	O 9	+ 6.0	.020 Gr.	.009 Gr.	6.37
61	B 1146	4 45 .7	+ 42 25	5 .6	A 2	— 2.4	.012 MW ⁽¹⁾	.014	5.99
62	5 Aurigae	4 53 .4	+ 39 15	6 .00	F 1	+ 6.0	.026	.012	6.38
63	B 1234	5 05 .9	+ 15 55	5 .36	K 6	— 6.1	.010	.005	6.46
64	B 1268	5 13 .4	+ 33 51	5 .16	A 4	— 4.2	.022	.017	5.57
65	B 1348	5 28 .4	+ 54 20	5 .96	M 0	+ 0.6	.006	.007	5.49
66	2 Lyncis	6 10 8	+ 59 03	4 .42	A 2	— 3.8	.020	.022	6.45
67	B 1672	6 29 .2	+ 56 56	5 .75	A 1	+ 0.4	.010 MW ⁽¹⁾	.013	6.17
68	ν_3 Canis Maior.	6 33 .5	— 18 09	4 .65	K 0	— 1.5	.011 _t	.012	4.97
69	42 Camelopard.	6 40 .5	+ 67 41	5 .04	B 3	— 1.2	.008 _m	.009	5.44
70	B. D + 33° 1454	6 55 .2	+ 33 49	7 .34	F 0	+ 6.3	.008	.005 B	6.95
71	B 1816	6 58 .4	— 51 16	5 .02	M 3	+ 5.3	.019 Y	.016	6.71
72	B 1830	7 01 .7	— 59 02	5 .69	B 9	— 5	.015 _d	.006	5.32
73	B 1961	7 24 .0	— 28 57	5 .52	B 9	+ 4.2	.018	.020	6.73
74	82 Geminorum	7 42 .6	+ 23 23	6 .21	A 7	— 4.9	.018	.017	6.39
75	B 2064	7 44 .9	— 24 40	5 .32	F 8	+ 1.6	.031 _t	.040	5.94
76	ζ Puppis	7 45 .1	— 24 37	3 .47	K 1	+ 3.7	.005	.004	5.30
77	B 2291	8 31 .7	— 49 36	4 .87	K 0	+ 4.4	.004 _t	.004	6.47
78	σ^2 Ursae Maior.	9 01 .6	+ 67 32	4. 87	F 5	— 1.8	.052 _m	.068	6.55
79	τ^2 Hydrae	9 26 .9	— 0 44	4 .50	A 3	+ 5.5	.029	.023	6.66
80	B 2568	9 28 .4	— 40 12	5 .36	G 5	— 0.7	.019 _t	.018	4.54
81	42 Lyncis	9 32 .1	+ 40 41	5 .24	A 5	— 2.0	.020	.018	4.71
82	44 Hydrae	10 29 .3	— 23 14	5 .32	K 5	— 3.9	.010 _m	.010	6.14
83	67 Leonis	11 03 .5	+ 25 12	5 .63	A 3	— 5.6	.013	.006	6.01
84	ω Virginis	11 33 .3	+ 8 41	5 .47	M 6	+ 3.8	.009	.010	6.49
85	β Hyadis	11 47 .8	— 33 21	4 .40	B 9	— 1	.013	.013	4.84
86	14 Comae	12 21 .4	+ 27 49	5 .15	A 5	— 3.3	.026	.026	5.78
87	21 Comae	12 26 .0	+ 25 07	5 .39	A 2	+ 0.2	.016	.017	5.03
88	31 Comae	12 46 .8	+ 28 05	5 .07	F 6	+ 1.6	.025	.027	5.37
89	B 3478	13 20 .3	+ 24 23	5 .75	A 3	+ 1.5	.012 MW ⁽¹⁾	.014 B	5.72

(1) Mount Wilson Observatory.

Segue: TABELLA II.

N.	*	$\alpha_{1900.0}$	$\delta_{1900.0}$	Mag.	S _p .	V _e	π''	μ''	W
90	B. D. + 33° 2361	13 ^h 36 ^m .0	+ 33° 21'	7 .8	F 8	0.0	0''.016	0''.018	5.31
91	84 Ursae Maior.	13 42 .9	+ 54 56	5 .53	A 2	— 4.8	.011	.011	6.75
92	B. D. + 31° 2605	14 15 .8	+ 30 53	6 .34	A 3	+ 1.3	.014	.013	4.46
93	B. D. + 8° 2857	14 19 .0	+ 8 42	5 .74	A 0	— 4	.013	.012	5.85
94	π^1 Bootis	14 36 .0	+ 16 51	4 .94	A 0	— 0.4	.013	.015	5.46
95	B 3759	14 38 .8	— 34 46	5 .00	A 0	— 5.0	.016 _i	.016	6.89
96	56 Hydrae	14 42 .0	— 25 40	5 .39	G 7	— 0.9	.030 _i	.032	5.10
97	γ Ursae Minoris	15 20 .9	+ 72 11	3 .14	A 2	— 3.9	.036	.016	4.43
98	B 4022	15 45 .2	+ 55 41	5 .79	A 6	— 2.5	.017	.014	4.64
99	19 Ursae Minoris	16 13 .7	+ 76 08	5 .51	B 8	— 0.8	.008	.011	6.54
100	B 4185	16 21 .9	— 61 25	5 .11	K 2	+ 3.9	.008	.009	6.59
101	ω Ophiuchi	16 26 .2	— 21 15	4 .57	A 5	+ 2.5	.027 _m	.035	6.60
102	α Triang. Austr.	16 38 .1	— 68 51	1 .88	K 5	— 3.7	.025	.031	6.95
103	18 Draconis	16 40 .2	+ 64 47	5 .00	K 1	+ 0.3	.017 _m	.017	4.75
104	B 4270	16 43 .4	+ 56 58	4 .88	F 0	0.0	.044	.065	6.97
105	B. D. + 56° 1959	17 12 .2	+ 56 15	7 .9	F 5	— 3.4	.010	.01	5.83
106	Υ Ophiuchi	17 47 .3	— 6 07	6.2-7.0	G 0	— 5.0	.023 _i	.003	5.37
107	28 Aquilae A	19 15 .0	+ 12 12	5 .42	F 0	+ 3.3	.017	.017	5.78
108	B 5002	19 31 .4	+ 42 12	5 .29	A 2	+ 0.4	.019	.022	5.51
109	σ Aquilae	19 34 .3	+ 5 10	5 .17	B 3	— 5.0	.003	.002	5.92
110	δ Sagittae	19 42 .9	+ 18 17	3 .78	M 2	+ 3.0	.014	.009	4.28
111	B 5081	19 48 .7	— 59 10	5 .35	A 0	— 2.0	.018 _i	.023	6.39
112	B 5167	20 05 .5	+ 20 36	7 .29	K 2	— 6.0	.017 _d	.011	6.74
113	ν Capricorni	20 15 .1	— 13 04	4 .84	A 0	— 0.9	.021	.021	4.82
114	B 5222	20 17 .1	— 42 44	5 .68	A 3	+ 2	.012 _d	.014 B	5.83
115	52 Cygni	20 41 .6	+ 30 21	4 .34	G 8	— 1.4	.021	.024	5.58
116	5 Aquarii	20 46 .8	— 5 52	5 .50	B 9	— 2.2	.009	.009	5.23
117	φ Capricorni	21 09 .9	— 21 04	5 .35	K 0	— 5.2	.013 _m	.007	5.78
118	B. D. + 65° 1691	21 54 .7	+ 65 41	6 .28	B 3	+ 2.4	.002	.002	5.31
119	π Pegasi	22 05 .5	+ 32 41	4 .38	A 4	+ 2.2	.021	.027	6.45
120	89 Acuarii c3	23 04 .6	— 23 00	4 .94	G 3	— 4.8	.037 _i	.016	5.22
121	9 Andromedae	23 13 .7	+ 41 13	5 .90	A 6	— 3.9	.014	.010	5.16
122	104 Aquarii	23 35 .6	+ 75 12	7 .17	F 2	+ 0.1	.011	.010	4.74

Geofisica. — *Sull'effetto dello spostamento dei continenti nella durata della rotazione terrestre.* Nota di P. SCONZO, presentata ⁽¹⁾ dal Corresp. C. MINEO.

In una Nota precedente ⁽²⁾, mi sono occupato della impostazione matematica del problema di valutare l'effetto prodotto sul momento d'inerzia della Terra, rispetto all'asse di rotazione, da un piccolo spostamento di una data massa continentale. Per semplicità di calcolo mi sono messo in condizioni geometriche speciali e precisamente ho supposto la Terra sferica ed il continente, costituito da un blocco di Sial, di forma tronco-conica circolare meglio specificata nel seguito, immerso nel magma di Sima, sino alla profondità di 70 km. e di poco elevato sul livello del mare. Sono riuscito così a valutare sommariamente e soltanto in valore assoluto l'ordine di grandezza della variazione del giorno sidereo, trattando il caso della Groenlandia.

In questa Nota torno sulla questione per tener conto dei più recenti dati geodetico-geofisici: precisamente mi attengo all'ipotesi formulata da Heiskanen, secondo la quale i continenti costituiti da Sial ed il Sima stesso, nel quale sono immersi i continenti, hanno una densità crescente con la profondità. L'importo dell'incremento di densità è dell'ordine di 0,2 sino a 60 km. di profondità ⁽³⁾. Lo studio della propagazione delle onde sismiche sembra convalidare l'ipotesi anzidetta ed io mi atterrò ad essa nell'elaborazione dell'applicazione numerica. In questa Nota tengo poi conto della controcorrente del magma di Sima ed anche di quella dell'acqua oceanica, provocate entrambi dallo scorrimento del continente verso l'equatore, per precisare meglio quantitativamente e qualitativamente la presunta variazione del giorno sidereo.

Supponendo che la superficie terminale del continente sia una circonferenza di raggio sferico σ ed il cui centro abbia la latitudine φ_0 , richiamo dalla Nota già citata, che la variazione del momento d'inerzia I del blocco continentale, il cui volume è quello della parte di cono circolare retto, proiettante dal centro della Terra la circonferenza anzidetta, compresa tra le due superficie sferiche concentriche di raggi r_0 ed r_1 , è data da:

(1) Nella seduta del 19 dicembre 1937.

(2) Cfr. P. SCONZO, *Effetti dinamici dovuti alla traslazione dei continenti*. «Public. dell'Oss. Astr. di Palermo», Memorie n. 62.

(3) Cfr. W. HEISKANEN, *Der heutige Stand der Isostasiefrage*. «Gerlands Beiträge zur Geophysik», XXXVI (1932) e dello stesso autore le *Tables isostatiques*, «Bull. géod.», XXX (1931).

$$(1) \quad \delta I = \frac{\partial I}{\partial \varphi_0} \delta \varphi_0 = \left\{ -\pi \sin 2\varphi_0 \cos \sigma \sin^2 \sigma \int_{r_0}^{r_1} \mu \rho^4 d\rho \right\} \delta \varphi_0,$$

corrispondentemente ad uno spostamento rigido $\delta \varphi_0$ in latitudine del blocco continentale.

La quantità μ che figura nella (1) è la densità del continente e si calcola con la formula:

$$(2) \quad \mu = \mu_0 + \frac{0.2}{r_1 - r_0} (r_1 - \rho),$$

dove μ_0 è il valore della densità alla superficie.

Due formole analoghe alla (1) si impiegheranno poi per il calcolo dei contributi $\frac{\partial I'}{\partial \varphi_0} \delta \varphi_0$ e $\frac{\partial I''}{\partial \varphi_0} \delta \varphi_0$, dovuti rispettivamente agli spostamenti della massa di acqua oceanica e del magma di Sima, che vanno ad occupare il posto lasciato libero dal continente durante il moto polifugo di quest'ultimo. Di modo che, detto \mathfrak{J} il momento d'inerzia della Terra, rispetto all'asse di rotazione, la sua variazione totale dovuta alle tre cause di spostamenti anzidetti, si calcola colla formola:

$$(3) \quad \delta \mathfrak{J} = \left(\frac{\partial I}{\partial \varphi_0} - \frac{\partial I'}{\partial \varphi_0} - \frac{\partial I''}{\partial \varphi_0} \right) \delta \varphi_0.$$

Nell'applicazione numerica che segue considero il caso di un continente esteso all'incirca quanto la Groenlandia e che si trovi alla latitudine media di detta isola. Con i dati:

$$\sigma = 8^\circ, \quad \varphi_0 = 70^\circ, \quad r_1 = 637 \cdot 10^4 \text{ m.}, \quad r_0 = 631 \cdot 10^4 \text{ m.},$$

$$\mu_{\text{acqua}} = 1,03, \quad \mu_{\text{Sial}} = 2,65, \quad \mu_{\text{Sima}} = 3,27,$$

che differiscono un poco da quelli della Nota precedente, ma che sono più prossimi alla realtà ed in conformità all'ipotesi ed alle ricerche eseguite da Heiskanen, durante gli anni 1927-32⁽¹⁾, e supponendo inoltre che il continente sia elevato di 2000 m. in media sulla superficie libera delle acque e per altri 2000 m. immerso nelle acque oceaniche, dal calcolo delle formole (1), (2) e (3), si ricava:

$$\frac{\partial I}{\partial \varphi_0} = -1015 \cdot 10^{28}, \quad \frac{\partial I'}{\partial \varphi_0} = -12 \cdot 10^{28}, \quad \frac{\partial I''}{\partial \varphi_0} = -1176 \cdot 10^{28},$$

$$(4) \quad \delta \mathfrak{J} = 173 \cdot 10^{28} \cdot \delta \varphi_0,$$

in unità del sistema metro-chilogrammo-secondo.

(1) Cfr. W. HEISKANEN, *Die Erdkrustendicke u. die Schweranomalien in den Vereinigten Staten*. « Annales Acad. Scient. Fennicae », XXXVI (1932).

Ora per il teorema del momento della quantità di moto rispetto all'asse di rotazione, denotati con Ω e T rispettivamente la velocità angolare terrestre, rispetto allo stesso asse, e la durata del giorno sidereo, per cui sussiste la relazione $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, ed infine con c una costante, si ha:

$$\mathfrak{J}\Omega = c,$$

da cui segue:

$$\Omega d\mathfrak{J} + \mathfrak{J}d\Omega = 0,$$

e da quest'ultima si deduce:

$$(5) \quad \frac{d\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}} = \frac{dT}{T}.$$

Siccome il valore di \mathfrak{J} è noto, in quanto che si ha:

$$\mathfrak{J} = \int_0^{r_1} \mu \rho^4 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\lambda = \frac{8\pi}{3} \left[7.8 \int_0^R \rho^4 d\rho + 3.3 \int_R^{r_1} \rho^4 d\rho \right],$$

dove il valore $R = 507 \cdot 10^4$ m. corrisponde al raggio della sfera che separa il nucleo della Terra di densità media $\mu = 7.8$ dall'involucro di Sima di densità media $\mu = 3.3$ (per cui la densità media della Terra risulta $\mu = 5.5$), e però:

$$(6) \quad \mathfrak{J} = 8311 \cdot 10^{31},$$

osservato che $d\mathfrak{J} = \delta\mathfrak{J}$, si può concludere che la (5) permette di calcolare $\delta\mathfrak{J}$ se si conosce o si fa qualche ipotesi su dT ovvero più utilmente permette di ricavare dT quando si conosce quantitativamente $\delta\mathfrak{J}$, ossia in base alla (4), quando si conosce $\delta\varphi_0$. Nel calcolo che segue mi attengo a quest'ultima applicazione.

Alla Groenlandia Wegener assegna uno spostamento globale di 18-36 m. all'anno ⁽¹⁾. Le osservazioni eseguite negli anni 1922 e 1927 a Godthaab per cura dell'Istituto Geodetico di Copenhagen e le misure eseguite da K. Rasmussen nel 1932 a Julianehaab hanno confermato tale valore annuo della deriva della Groenlandia ⁽²⁾. Nel calcolo mi debbo limitare però alla sola componente della deriva lungo il meridiano. In una ricerca d'altra natura l'Epstein ha assunto alla latitudine di 45° il valore di 33 m. all'anno per la deriva dei continenti ⁽³⁾ e pertanto assumendo, nel caso della mia

(1) Cfr. A. WEGENER, *La genèse des continents et des Océans*, Paris (1924), p. 91.

(2) Cfr. « Boll. della Soc. Geogr. Ital. », agosto 1933, p. 543.

(3) Cfr. P. S. EPSTEIN. *Über die Polflucht der Kontinente*. « Die Naturwissenschaften », 9, Heft 25.

applicazione numerica, una deriva di 20 m. all'anno, non mi discosto molto dalla realtà.

In base alle formule (4), (5) e (6), si ha allora:

$$(dT)_{\text{annuo}} = - \frac{173 \cdot 10^{28} \cdot (\delta\varphi_0)_{\text{rad}} \cdot 864 \cdot 10^2}{8311 \cdot 10^{31}},$$

ossia eseguiti i calcoli:

$$(dT)_{\text{annuo}} = - 5,7 \cdot 10^{-6}.$$

Poichè dT risulta negativo si può concludere che il giorno siderale diventa più corto. L'importo della variazione relativamente alla deriva di un piccolo blocco continentale è però abbastanza piccolo e ciò era prevedibile, in base all'analisi fatta dal Wavre ⁽¹⁾ sull'estrema piccolezza della forza che tenderebbe ad avvicinare un continente all'equatore.

Chimica. — *Azione del protoselensofocloruro e del protosolfoselencloruro sull'etilmercaptano e sull'etilselenmercaptano* ⁽²⁾.
Nota di A. BARONI, presentata ⁽³⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

In due precedenti lavori io ho riferito sulla esistenza e sulle caratteristiche di due cloruri misti di zolfo e selenio corrispondenti alle formule SeSCl_2 ed SSeCl_2 non ancora noti ed ottenuti rispettivamente per azione del selenio sul protocloruro di zolfo ⁽⁴⁾ e dello zolfo sul protocloruro di selenio ⁽⁵⁾. L'esame della loro rifrazione molecolare, della loro decomposizione con la piperidina e del loro comportamento rispetto all'olio di ricino e all'olio di colza nella preparazione dei fatturati, mi ha indotto ad attribuire a questi composti le formule di struttura $\text{Se}=\text{S}=\text{Cl}_2$ ed $\text{S}=\text{Se}=\text{Cl}_2$.

Per vedere se queste formule potessero presentare una sufficiente attendibilità ed avere un controllo dei risultati chimico-fisici, mi è sembrato interessante studiare la loro azione sull'etilmercaptano che in precedenti lavori ⁽⁶⁾ mi ha permesso di realizzare polisolfuri fino ad una catena di cinque atomi di zolfo e catene miste di zolfo e selenio contenenti due atomi di selenio ed uno di zolfo o uno di selenio e due di zolfo. Questi composti non li ho potuti infatti realizzare in altre serie alchiliche e ari-

(1) Cfr. WAVRE, *Sur la force qui tendrait à rapprocher un continent de l'équateur*. « Arch. d. Sciences phys. et nat. » (1925).

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(3) Nella seduta del 19 dicembre 1937.

(4) « Atti IV Congr. Naz. di chimica pura ed applicata », 383, 1932; questi « Rendiconti », XVI, 514, 1932.

(5) Questi « Rendiconti », ser. 6^a, vol. XXV, p. 719.

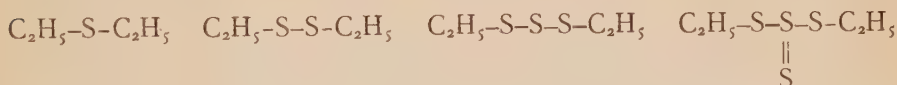
(6) Questi « Rendiconti », IX, 772, 1929 e 903, 1929; IX, 1019, 1929.

liche ⁽¹⁾ perchè operando nella serie metilica e fenilica ho potuto ottenere al massimo il trisolfuro allo stato puro a causa della notevole difficoltà di isolamento dei composti solforati superiori.

Facendo reagire il protoselensolfocloruro ed il protosolfoselencloruro sull'etilmercaptano e sull'etilselenmercaptano in presenza di solfuro di carbonio come solvente, ho potuto realizzare le seguenti reazioni:

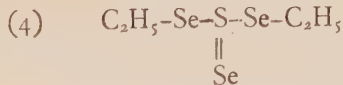
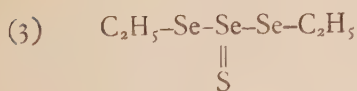
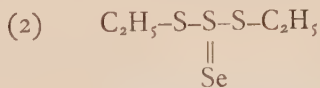
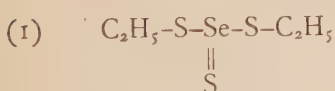


ottenendo quattro composti a due a due isomeri. Questo fatto si può facilmente spiegare in base alle formule di struttura già da me stabilite dalle misure di indice di rifrazione e soprattutto di paracoro ⁽²⁾ per i polisolfuri, poliseleniuri e per le catene miste di zolfo e selenio. Queste misure mi hanno infatti indotto a ritenere che le catene di atomi di zolfo, o le catene miste di zolfo e selenio siano lineari fino al trisolfuro e presentino un atomo di zolfo ramificato nel tetrasolfuro, che cioè ad esse si debbano attribuire le strutture:



La ramificazione dell'atomo di zolfo nel tetrasolfuro è dimostrata dall'incremento notevole nell'indice di rifrazione, dall'azione di una sospensione acquosa di idrato di piombo e dal valore del paracoro che risulta dalla somma dei paracori atomici del carbonio, idrogeno e zolfo con aggiunto il valore 23,2 che compete ad un doppio legame presente nella catena.

I quattro nuovi composti da me preparati presentano quindi verosimilmente le formule seguenti:



che risultano confermate dall'azione di una sospensione alcalina di idrato di piombo che permette di staccare da essi un atomo di zolfo o di selenio ottenendo così il disolfoseleniuro, il trisolfuro, il triseleniuro ed il diselenosolfuro dietilici.

(1) Questi « Rendiconti », XI, 579, 1930.

(2) Questi « Rendiconti », XIV, 28, 1931.

PARTE SPERIMENTALE.

Azione del protosolfoselencloruro S-Se-Cl₂ sull'etilmercaptano. — Questo composto è stato preparato utilizzando il metodo col quale Klason (1) ha ottenuto il tetrasolfuro dietilico e da me già applicato alla preparazione del pentasolfuro dietilico normale. Gr. 18 di protosolfoselencloruro sciolti in circa 5 parti di CS₂, furono addizionati di gr. 13 di mercaptano pure sciolto in 5 parti di CS₂. Ad operazione ultimata aggiunsi gr. 5 di carbonato di calcio precipitato, scaldai a bagno maria per venti minuti, distillai il CS₂ e frazionai il residuo accuratamente a 20 mm. Ottenni così gr. 3,49 di (C₂H₅S)₂Se-S⁽¹⁾ a punto di ebollizione 102° (rend. 15%). Questo prodotto fu analizzato col metodo di Carius dosando lo zolfo come BaSO₄ ed il selenio come selenio metallico. I risultati analitici furono i seguenti

sost. pesata	BaSO ₄ pesato	Se pesato	S% trovato	Se% trovato
0,3218	0,9630	0,1081	41,10	33,60
0,2281	0,6830	0,0767	41,12	33,63

calcolato per (C₂H₅S)₂ Se-S: S-41,23%, Se-33,85%.

Azione del protosolfoselencloruro S-Se-Cl₂ sull'etilselenmercaptano. — La preparazione è stata fatta nel modo sopra indicato usando gr. 18 di protosolfoselencloruro e gr. 22 di etilselenmercaptano. Alla distillazione a 26 mm. ottenni gr. 2,58 (rend. 8%) di (C₂H₅Se)₂Se-S (3) a punto di ebollizione 105° che analizzato diede i seguenti risultati:

sost. pesata	BaSO ₄ pesato	Se pesato	S% trovato	Se% trovato
0,4162	0,2970	0,3009	9,80	72,30
0,4092	0,2902	0,2961	9,74	72,36

teorico per (C₂H₅Se)₂ Se-S: S-9,80%, Se-72,43%.

Azione del protoselenosolfocloruro Se-S-Cl₂ sull'etilmercaptano. — Operando come sopra ed usando gr. 18 di protoselenosolfocloruro e gr. 13 di etilmercaptano ottenni alla distillazione a 26 mm. gr. 3,03 (rend. 13%) di (C₂H₅S)₂S-Se (2) a punto di ebollizione 104° che analizzati diedero i seguenti risultati:

sost. pesata	BaSO ₄ pesato	Se pesato	S% trovato	Se% trovato
0,1961	0,1171	0,0663	41,00	33,80
0,1773	0,1060	0,0613	41,04	33,82

teorico per (C₂H₅S)₂ S-Se: S-41,23%, Se-33,85%.

(1) « Journ. f. prakt. Chemie », (2), 15, 214.

Azione del protoselenosolfocloruro Se-S-Cl_2 sull'etilselenmercaptano. — Usando gr. 18 di protoselenosolfocloruro e gr. 22 di etilselenmercaptano, ottenni alla distillazione a 26 mm. gr. 2,3 (rend. 7%) di $(\text{C}_2\text{H}_5\text{Se})_2 \text{S-Se}$ (4) a punto di ebollizione 107° che analizzai ottenendo i seguenti risultati:

sost. pesata	BaSO_4 pesato	Se pesato	S% trovato	Se% trovato
0,4230	0,3018	0,3358	9,80	79,39
0,3864	0,2766	0,3064	9,83	79,31

teorico per $(\text{C}_2\text{H}_5\text{Se})_2 \text{S-Se}$: S-9,80%, Se-72,43%.

Per vedere se fosse possibile migliorare la resa di preparazione di questi composti ho eseguito anche dei riscaldamenti del trisolfuro dietilico con selenio; ho così potuto preparare anche per questa via, già da me seguita nella preparazione del pentasolfuro dietilico, il composto $(\text{C}_2\text{H}_5\text{S})_2 \text{S-Se}$ però con rese non superiori al 5%. Da ciò risulta che la reattività del selenio allo stato elementare è molto inferiore a quella dello zolfo col quale si possono ottenere pure con buoni rendimenti gli stessi polisolfuri preparabili dai cloruri politionici.

Per riscaldamento dei quattro composti da me ora preparati con una sospensione alcalina di idrato di piombo, si osserva la formazione di solfuro e seleniuro di piombo. La quantità da questi formata corrisponde sensibilmente alla eliminazione dai composti stessi di un atomo di zolfo o rispettivamente di selenio e ciò viene a confermare la stabilità della catena lineare e la facile rottura del legame degli atomi di zolfo o di selenio ramificati.

Chimica. — *Sulle selenoglicerine* ⁽¹⁾. Nota di A. BARONI.
presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Non mi consta che a tutt'oggi siano state preparate le selenoglicerine. Ben poco del resto sono state oggetto di studio anche le tioglicerine. Infatti dopo le ricerche di Carius ⁽³⁾ del 1862, bisogna venire al 1936 per trovare due lavori che trattino di esse.

Carius ha preparato le tioglicerine col metodo più comune di preparazione del mercaptani, cioè per decomposizione delle cloridrine della glicerina con solfidrato di potassio in soluzione alcoolica operando alla ebollizione fino alla completa separazione del cloruro di potassio ed alla cessazione dello sviluppo di idrogeno solforato. Come hanno trovato Lennart Smith e B. Sjöberg ⁽⁴⁾ la decomposizione fra cloridrina e solfidrati alcalini non avviene però come ritiene Carius perchè si ha formazione di prodotti di varia natura, come glicidi, alogeno glicidi ed inoltre si possono formare solfuri e disolfuri che Carius non ha separato dalle sostanze oleose da lui ottenute non avendo purificato i suoi composti per distillazione. Inoltre, per quanto riguarda la monotioglicerina, Smith, che la ha ora preparata, afferma che Carius non può averla ottenuta perchè fra l'altro egli lava accuratamente il suo prodotto con acqua fredda mentre la monotioglicerina è miscibile con acqua in tutti i rapporti, anzi è igroscopica.

Operando secondo il metodo di Carius, H. Rheinbold e C. Tetsch ⁽⁵⁾ nella preparazione della di- e tritioglicerina, sono giunti alle stesse conclusioni dei precedenti Autori ed hanno potuto solo riconoscere la formazione di tracce di sostanze contenenti gruppi SH- per mezzo della sensibile reazione del tionitrito ⁽⁶⁾.

Nella preparazione delle selenoglicerine io ho seguito i metodi sia di Smith che di Rheinbold. Smith ha effettuato la preparazione della monotioglicerina usando come prodotti di partenza cloro-, bromo- e iodidrina, ma non dà alcun dato sui risultati ottenuti. I metodi da lui ritenuti i migliori, e che sono quelli sui quali riferisce nel lavoro sopra citato, sono indicati dai due seguenti schemi:

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

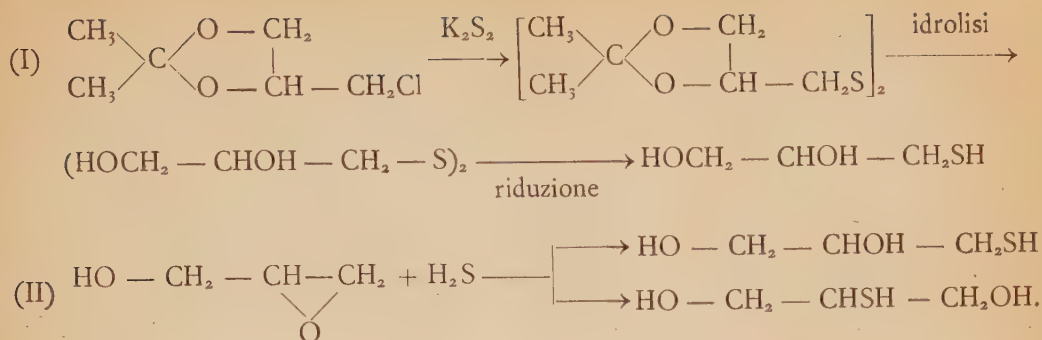
(2) Nella seduta del 19 dicembre 1937.

(3) «Liebigs Annalen», 124, 222, 1862.

(4) «Berichte», 69, 678, 1936.

(5) «Berichte», 70, 675, 1937.

(6) «Berichte», 60, 184, 1927.



Il primo metodo non si adatta bene alla preparazione della monoselenoglicerina a causa della facile ossidabilità dei selenderivati della glicerina (che è molto maggiore di quella dei tioderivati) la cui preparazione deve perciò essere effettuata fuori del contatto dell'aria e meglio ancora in ambiente riducente per non avere una diminuzione troppo forte del rendimento a causa della formazione di seleniuri e diseleniuri. Buoni risultati ho ottenuto col secondo metodo che è però alquanto penoso a causa della necessità di una corrente continua di H_2Se per cui ho preferito ricorrere alla azione del selenidrato di potassio sulle bromo e iodidrine seguendo la tecnica di Rheinbold e Tetsch. Con questo metodo, che è realizzabile anche con le cloridrine però con una durata della reazione molto maggiore, ho avuto oltre alle selenoglicerine anche formazione di seleniuro e diseleniuro (che non ho però potuto isolare perchè non distillabili) pure effettuando tutta la reazione in corrente di gas inerte. Essi però non disturbano la separazione delle selenoglicerine. Non presentando le iodidrine vantaggi essenziali sulle bromidrine, ho preferito usare queste come prodotti di partenza.

Le selenoglicerine costituiscono dei liquidi oleosi di color giallo chiaro la mono e la bi e giallo arancio la tri, aventi un debole odore analogo a quello dei selenmercaptani alchilici. La mono e la diselenglicerina sono solubili in acqua (anzi la mono manifesta una notevole igroscopicità), alcool ed acetone, mentre la triselenglicerina è insolubile in acqua, ma solubile in solventi organici. A temperatura ordinaria esse sono abbastanza stabili, però in pochi giorni subiscono una notevole ossidazione a contatto dell'aria.

PARTE SPERIMENTALE.

Preparazione della monoselenglicerina $\text{HOCH}_2 - \text{CHOH} - \text{CH}_2\text{SeH}$. — Gr. 23 di sodio furono sciolti in 500 cc di alcool e la soluzione fu saturata con H_2Se ottenuto per azione di acido cloridrico diluito sul seleniuro di alluminio preparato per riscaldamento di alluminio in polvere con selenio. La soluzione di NaSeH così ottenuta fu versata in un pallone a tre colli

munito di agitatore e riscaldata a 60°. Furono allora aggiunti lentamente mediante un imbuto a rubinetto gr. 40 di monobromidrina (p. eb.₁₀ 180°). Per tutta la durata della aggiunta della bromidrina la temperatura fu mantenuta a 60° e l'agitazione fu continuata successivamente per un'ora. Dopo separazione del bromuro di sodio formatosi nella reazione, la soluzione fu acidificata, sempre agitandola, con gr. 30 di acido acetico, fu separato l'acetato di sodio formatosi e fu fatta gorgogliare nella soluzione della anidride carbonica per eliminare tutto l'idrogeno seleniato. Ad essa venne allora aggiunta una soluzione di cianuro di mercurio in alcool metilico; precipitò così il mercapturo di mercurio che fu separato per filtrazione. Il mercapturo fu spappolato in alcool metilico e nella sospensione fu fatto gorgogliare H_2Se per realizzare la separazione del mercurio come $HgSe$. La soluzione alcoolica fu filtrata ed essiccata su Na_2SO_4 . L'alcool venne poi distillato a bagno maria ed il residuo nel vuoto. A 20 mm. ottenni a 185° un liquido di color giallo chiaro che analizzai in Carius dosando il selenio come selenio metallico.

sostanza pesata	selenio pesato	Se % trovato
0,3926	0,1945	50,70
0,4264	0,2166	50,79

Se % teorico per la monoselenglicerina 50,93.

Preparazione della diselenglicerina $HSeCH_2 - CHOH - CH_2SeH$. — La diselenglicerina fu ottenuta nel modo ora indicato partendo da gr. 23 di sodio e gr. 50 di 1,3-dibromidrina (p. eb. 219°). Alla distillazione a 20 mm ottenni a 114° un liquido oleoso giallo che analizzai in Carius dosando il selenio come selenio metallico.

sostanza pesata	selenio pesato	Se % trovato
0,2731	0,1973	72,24
0,3164	0,2287	72,29

Se % teorico per la diselenglicerina 72,43.

Preparazione della triselenglicerina $HSeCH_2 - CHSeH - CH_2SeH$. — Nel modo sopra detto furono saturati 23 gr. di sodio sciolti in 500 cc di alcool etilico con H_2Se e poi trattati con gr. 50 di tribromidrina (p. eb. 220°). A reazione ultimata la miscela fu diluita con 1000 cc di acqua e acidificata agitando con 30 gr. di acido acetico. Si separò un olio che fu sciolto in alcool metilico; la soluzione alcoolica fu trattata con una soluzione acquosa di acetato di biombo per precipitare il mercapturo di piombo. Questo fu filtrato, trattato con acido solforico al 25% e la miscela distillata in corrente di vapore. Il distillato fu estratto con etere, la soluzione eterea essiccata su Na_2SO_4 e distillata prima a pressione ordinaria e poi

nel vuoto. A 140° a 20 mm distillò un olio giallo arancio che fu analizzato col metodo di Carius determinando il selenio come selenio metallico.

sostanza pesata	selenio pesato	Se % trovato
0,1235	0,1039	84,16
0,1589	0,1338	84,21

Se % teorico per la triselenglicerina 84,30.

La triselenglicerina, a differenza della mono- e della diselenglicerina, è insolubile in acqua, ma solubile nella maggior parte dei solventi organici.

N. P.

INDICE DEL VOLUME XXVI, SERIE VI. — RENDICONTI

Secondo Semestre 1937.

INDICE PER AUTORI

A

AGOSTINELLI C. — « Risoluzione mediante integrali definiti dell'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = f$$

e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico ». Nota I. 138.

ID. — « Integrazione dell'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = f$$

e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico ». Nota II. 216.

AMALDI U. — « Commemorazione del Socio Nazionale SALVATORE PINCHERLE ». 418.

ANDRISSI G. L. — « Osservazioni della Cometa 1936 *a* (Peltier) ». 267.

ARMELLINI G. — « I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton ». Nota I. 209.

ID. — « I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton ». Nota II. 310.

ARONSZAJN N. — « Sur quelques problèmes concernant les espaces de Minkowski et les espaces vectoriels généraux ». 374.

B

BAGLIONI A. — « Sul contenuto in vitamina antineuritica (B¹) di grani italiani ». 46.

BARONI A. — « Azione del protoselenosolfocloruro e del protosolfoselenocloruro sull'etilmercaptano e sull'etilselenmercaptano ». 456.

ID. — « Sulle selenoglicerine ». 460.

BELLANCA A. — Vedi PERRIER C.

BENAZZI M. — « La preipofisi di Rana non provoca l'estro nella femmina impubere di topo ». 112.

BOTTI E. — Vedi IANDELLI A.

BUZANO P. — « Rigate di ordine *n*, dello spazio a *n* dimensioni, aventi ∞^n omografie in sè ». 61.

C

CAPRARO V. e FORTUNATO M. — « Contributo allo studio dell'azione del fattore antineuritico (B¹) sul testicolo ». 29.

CAPRARO V. — « Tiroidizzazione e beriberi sperimentale nel colombo ». 50.

CAVINATO A. — « Osservazione alla Nota di S. Vardabasso: "Contributo alla conoscenza del vulcanismo recente in Sardegna", ». 290.

CHARRIER G. e IORIO M. — « Piridino-2, 3-triazoli 8-sostituiti ». 170.

CICALA P. — « Sul moto non stazionario di un'ala di allungamento finito ». 97.

CISOTTI U. — « Sulla meccanica dei mezzi continui disgregati ». 202.

ID. — « Sorgenti in mezzi disgregati ». 305.

COLACEVICH A. — « Gli elementi orbitali di ν Octantis ». 7.

ID. — « Osservazioni spettroscopiche e spettrofotometriche della cometa Finsler (1937 *f*) ». 227.

COLONNA M. — Vedi FINZI C.

CONSIGLIO A. — « Sul calcolo degli integrali contenuti nella formula di Vilat relativa ad una corona circolare ». 66.

CORRADETTI A. — « Una specie asiatica di *Anopheles* rinvenuta in Etiopia (« *A. dthali* PATTON», 1905) ». Nota preventiva. 412.

E

ENRIQUES F. — « Curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica ». 193.

F

FACCIOTTI G. — « A proposito della " asfericità " in un punto ordinario di una superficie ». 314.

FANO G. — « Osservazioni su alcune " geometrie finite " ». Nota I. 55.

ID. — « Osservazioni su alcune " geometrie finite " ». Nota II. 129.

FEDELE M. — « Contrattilità ed eccitazione neurogena e miogena negli *Ascidacea* ». 31.

FINZI C. e COLONNA M. — « Costituzione chimica e sapore dolce ». 19.

FIORENTINI CAMPOLIETI F. — « Una particolare soluzione dinamica del problema cosmologico ». Nota I. 319.

ID. — « Una particolare soluzione dinamica del problema cosmologico ». Nota II. 377.

FORTUNATO M. Vedi CAPRARO V.

FUBINI G. — « Studi asintotici per alcune equazioni differenziali ». 253.

G

GALLITELLI P. — « Analisi chimica del granito di Montorfano e del granito e della tormalina di Alzo ». 103.

GHERARDELLI G. — « Gruppi Cayleyani di punti sopra una curva ellittica ». 144.

GHIGI E. — « La costituzione del benzantrone di Liebermann ». 346.

GIALANELLA L. — « Osservazioni meridiane di GIOVE, SATURNO, URANO e della LUNA nel 1936 ». 272.

ID. — « Nuove ricerche sull'« ammasso del Sole » ». Nota I. 393, 446.

GOIDÀNICH G. — « Notizie su una malattia della vite poco conosciuta ». 107.

GOMES R. L. — « Sur les matrices de Dirac au sens large ». 75.

GUARESCHI P. — « Considerazioni sull'energia potenziale molecolare ». 398.

ID. — « Sul calcolo dei calori molecolari dei liquidi ». 403.

I

IANDELLI A. e BOTTI E. — « Sulla struttura cristallina dei composti delle terre rare con i metalloidi del V Gruppo. Composti 1:1 col Bismuto ». Nota V. 233.

IORIO M. — Vedi CHARRIER G.

L

LAMPARIELLO G. — « Estensione del teorema di Jacobi sul viriale e riferimenti di minima energia cinetica ». 266, 325.

ID. — « Varietà sostanziali nel moto di un sistema continuo ». 383.

LAURO C. — « Calcite di " Madonna del Carmine " di Dorgali ». 25.

LEVI B. — « Una proprietà del sistema delle derivate parziali *n*-me di una funzione di più variabili ». 198.

LEVI-CIVITA T. — « Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio euclideo ». 355.

LONGO B. — Vedi MASCARELLI L.

M

MANZONI ANSIDEI R. — « Spettro Raman di idrocarburi a nuclei condensati. II. 9-10 diidroantracene, acenaftene, fluorene ». 166.

MARIOTTI E. — « Modificazione del metodo di Van Slyke per l'analisi delle proteine ». 238.

MASCARELLI L. e PIRONA M. — « Contributo alla conoscenza del bifenile e dei suoi derivati. XIX. Preparazione di alcuni nuovi derivati ». 243.

MASCARELLI L. e LONGO B. — « Contributo alla conoscenza del bifenile e dei suoi derivati. XX. Nuovo esempio di passaggio dal sistema bifenilico a quello fluorenico: sintesi del 3-metil-fluorene ». 292.

MEDI E. — « Ricerche sulla ionizzazione prodotta dall'evaporazione dell'acqua ». 159.

MINEO C. — « Sulla impossibilità d'una stratificazione d'equilibrio omotetica per gli astri fluidi rotanti ». 260.

MONTORO V. — « Studio sulla orientazione preferenziale delle cristalliti in alcuni depositi anormali di rame elettrolitico ». 409.

N

NEBBIA G. — « Le linee delle quantità di moto totali in correnti liquide permanenti gradualmente varie ». 433.

O

OBRECHKOFF N. — « Sugli zeri di alcuni polinomi ». 310.

P

PAROLI V. — « Osservazioni sulla embriologia di *Tamarix gallica* L. ». 352.

PAUC CHR. — « L'inégalité triangulaire dans les espaces de Minkowski généralisés ». 369.

PERRIER C. e BELLANCA A. — « Impiego del potenziometro per la determinazione delle curve tempo-temperatura nelle analisi termiche ». 245.

PIRONA M. — Vedi MASCARELLI L.

PLATANIA E. — « Sulla origine della membrana peritrofica dell'intestino di *Reticulitermes lucifugus* (Rossi) ». 43.

POPA I. — « Geometria proiettivo-differenziale delle singolarità: Il punto di flesso di una superficie qualunque ». 147.

PUNTONI V. — « Studi sul genere *Trichosporon Behrend* ». 413.

S

SACERDOTE E. — « Fotometro a cella fotoelettrica per la determinazione dell'emoglobina in soluzioni diluitissime di sangue ». 116.

SCARPA O. — « Formazione di pseudo cristalli unici nella elettrodeposizione del rame ». 135.

ID. — « Sulle escrescenze catodiche che si osservano nella raffinazione elettrolitica dello stagno ». 362.

SCHÖNBERG M. — « Sulla funzione $\delta(x)$ di Dirac. Nota I. 81.

ID. — « Sulla funzione $\delta(x)$ di Dirac. Nota II. 151.

ID. — « Sopra una classe di equazioni funzionali ». 221.

SCOZ G. e TRIA E. — « Contenuto in acido ascorbico del fegato di rana in diverse condizioni sperimentali ». 180.

SCONZO P. — « Sull'effetto dello spostamento dei continenti nella durata della rotazione terrestre ». 453.

SPAMPINATO N. — « Sulle funzioni di una variabile in una delle quattro algebre complesse commutative del 3° ordine ». 3.

SPIRITO A. — « Studi di Biologia embrionale. II. Differente comportamento di fronte all'anaerobiosi e normale assorbimento di ossigeno nelle diverse forme di Anfibi ». 37.

T

TEDESCHI G. — « Sulla velocità di dissoluzione del piombo negli acidi ». Nota II. 176.

ID. — « Sulla velocità di dissoluzione del piombo negli acidi ». Nota III. 406.

TERRACINI A. — « Su una possibile particolarità delle linee principali di una superficie ». Nota I. 84.

ID. — « Su una possibile particolarità delle linee principali di una superficie ». Nota II. 153.

TRIA E. — Vedi SCOZ G.

ID. — « Determinazione elettrometrica dell'attività peptica ». 187.

TRICONI F. — « Sulla teoria dell'arco elastico a direttrice circolare ». Nota I. 388.

ID. — « Sulla teoria dell'arco elastico a direttrice circolare ». Nota II. 393, 440.

V

VARDABASSO S. — « Contributo alla conoscenza del vulcanismo recente in Sardegna ». 14.

VINCENSINI P. — « Su una classe di funzioni convesse ». 366.

VOLTERRA E. — « Sul calcolo dei ponti ad arco ad impalcato superiore ». 335.

W

WATAGHIN G. — « Sulla teoria delle particelle elementari ». 282.

ID. — « Sopra un sistema di equazioni gravitazionali del primo ordine ». Nota I. 285.

WATSON G. N. — « Studio di una particolare funzione definita da un integrale improprio ». 91.

WOINAROSKY R. — « La cinématique du corps solide dans l'espace ordinaire à trois dimensions ». 263.

Z

ZAGAMI V. — « Ricerche sperimentali sul liquido seminale. II. Sul valore del pH del liquido seminale di gallo ». 123.

ZANABONI O. — « Sull'approssimazione dovuta al principio del De Saint-Venant nei solidi prismatici isotropi ». 340.

ZANOTELLI G. — « Sulla forma della vibrazione luminosa in un mezzo sottoposto a campo magnetico alternato ». 393.

INDICE PER MATERIE

A

- Astronomia.** — « Osservazioni della Cometa 1936 a (Peltier) ». ANDRISSI G. L. 267.
- « I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton ». Nota I. ARMELLINI G. 209.
- « I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton ». Nota II. ID. 310.
- « Gli elementi orbitali di ν Octantis ». COLACEVICH A. 7.
- « Osservazioni spettroscopiche e spettrofotometriche della cometa Finsler (1937 f) ». ID. 227.
- « Osservazioni meridiane di GIOVE, SATURNO, URANO e della LUNA nel 1936 ». GIALANELLA L. 272.
- « Nuove ricerche sull'« ammasso del Sole » ». Nota I. ID. 393, 446.

B

- Biologia.** — « La preipofisi di Rana non provoca l'estro nella femmina impubere di topo ». BENAZZI M. 112.
- « Contributo allo studio dell'azione del fattore antineuritico (B^r) sul testicolo ». CAPRARO V. e FORTUNATO M. 29.
- « Contrattilità ed eccitazione neurogena e miogena negli *Ascidieae* ». FEDELE M. 31.
- « Notizie su una malattia della vite poco conosciuta ». GOIDANICH G. 107.
- « Osservazioni sulla embriologia di *Tamarix gallica* L. ». PAROLI V. 352.
- « Studi di Biologia embrionale. — II. Differente comportamento di fronte

all'anaerobiosi e normale assorbimento di ossigeno nelle diverse forme di Anfibi ». SPIRITO A. 37.

Bollettino Bibliografico. — 300, 431.

C

- Chimica.** — « Azione del protoselenosolfocloruro e del protosolfoselenocloruro sull'etilmercaptano e sull'etilselenmercaptano ». BARONI A. 456.
- « Sulle selenoglicerine ». ID. 460.
- « Piridino-2, 3-triazoli 8-sostituiti ». CHARRIER G. e IORIO M. 170.
- « Costituzione chimica e sapore dolce ». FINZI C. e COLONNA M. 19.
- « La costituzione del benzantrone di Liebermann ». GHIGI E. 346.
- « Sulla struttura cristallina dei composti delle terre rare con i metalloidi del V Gruppo. — Composti 1:1 col Bismuto ». Nota V. IANDELLI A. e BOTTI E. 233.
- « Spettro Raman di idrocarburi a nuclei condensati. — II. 9-10 diidroantracene, acenaftene, fluorene ». MANZONI ANSIDEI R. 166.
- « Modificazione del metodo di Van Slyke per l'analisi delle proteine ». MARIOTTI E. 238.
- « Contributo alla conoscenza del bifenile e dei suoi derivati. — XIX. Preparazione di alcuni nuovi derivati ». MASCARELLI L. e PIRONA M. 243.
- « Contributo alla conoscenza del bifenile e dei suoi derivati. — XX. Nuovo esempio di passaggio dal sistema bifenilico a quello fluorenico: sintesi del 3-metil-fluorene ». MASCARELLI L. e LONGO B. 292.

Chimica. — « Impiego del potenziometro per la determinazione delle curve tempo-temperatura nelle analisi termiche ». PERRIER C. e BELLANCA A. 245.

— « Sulle escrescenze catodiche che si osservano nella raffinazione elettrolitica dello stagno ». SCARPA O. 362.

— « Sulla velocità di dissoluzione del piombo negli acidi ». Nota II. TEDESCHI G. 176.

Chimica fisica. — « Sul calcolo dei calori molecolari dei liquidi ». GUARESCHI P. 403.

— « Sulla velocità di dissoluzione del piombo negli acidi ». Nota III. TEDESCHI G. 406.

Commemorazioni. — 418.

Comunicazioni varie. — 299, 430.

E

Elettrochimica. — « Studio sulla orientazione preferenziale delle cristalliti in alcuni depositi anormali di rame elettrolitico ». MONTORO V. 409.

— « Formazione di pseudo cristalli-unicì nella elettrodeposizione del rame ». SCARPA O. 135.

F

Fisica. — « Ricerche sulla ionizzazione prodotta dall'evaporazione dell'acqua ». MEDI E. 159.

— « Sulla teoria delle particelle elementari ». WATAGHIN G. 282.

— « Sopra un sistema di equazioni gravitazionali del primo ordine ». Nota I. ID. 285.

— « Sulla forma della vibrazione luminosa in un mezzo sottoposto a campo magnetico alternato ». ZANOTELLI G. 393.

Fisica chimica. — « Considerazioni sulla energia potenziale molecolare ». GUARESCHI P. 398.

Fisiologia. — « Sul contenuto in vitamina antineuritica (B¹) di grani italiani ». BAGLIONI A. 46.

— « Tiroidizzazione e beriberi sperimentale nel colombo ». CAPRARO V. 50.

Fisiologia. — « Fotometro a cella fotoelettrica per la determinazione dell'emoglobina in soluzioni diluitissime di sangue ». SACERDOTE E. 116.

— « Contenuto in acido ascorbico del fegato di rana in diverse condizioni sperimentali ». SCOZ G. e TRIA E. 180.

— « Determinazione elettrometrica dell'attività peptica ». TRIA E. 187.

— « Ricerche sperimentali sul liquido seminale. — II. Sul valore del pH del liquido seminale di gallo ». ZAGAMI V. 123.

G

Geofisica. — « Sull'effetto dello spostamento dei continenti nella durata della rotazione terrestre ». SCONZO P. 453.

Geologia. — « Osservazione alla Nota di S. Vardabasso: " Contributo alla conoscenza del vulcanismo recente in Sardegna, " ». CAVINATO A. 290.

— « Contributo alla conoscenza del vulcanismo recente in Sardegna ». VARDABASSO S. 14.

M

Matematica. — « Risoluzione mediante integrali definiti dell'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = f$$

e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico ». Nota I. AGOSTINELLI C. 138.

— « Integrazione dell'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = f$$

e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico ». Nota II. ID. 216.

— « Sur quelques problèmes concernant les espaces de Minkowski et les espaces vectoriels généraux ». ARON-SZAJN N. 374.

Matematica. — « Rigate di ordinè n , dello spazio a n dimensioni, aventi ∞^n omografie in sè ». BUZANO P. 61.

— « Sul calcolo degli integrali contenuti nella formula di Villat relativa ad una corona circolare ». CONSIGLIO A. 66.

— « Curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica ». ENRIQUES F. 193.

— « A proposito della "asfericità" in un punto ordinario di una superficie ». FACCIOU G. 314.

— « Osservazioni su alcune "geometrie finite" ». Nota I. FANO G. 55.

— « Osservazioni su alcune "geometrie finite" ». Nota II. ID. 129.

— « Studi asintotici per alcune equazioni differenziali ». FUBINI G. 253.

— « Gruppi Cayleyani di punti sopra una curva ellittica ». GHERARDELLI G. 144.

— « Sur les matrices de Dirac au sens large ». GOMES R. L. 75.

— « Una proprietà del sistema delle derivate parziali $n - m$ di una funzione di più variabili ». LEVI B. 198.

— « Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio euclideo ». LEVI-CIVITA T. 355.

— « Sugli zeri di alcuni polinomi ». OBRECHKOFF N. 310.

— « L'inégalité triangulaire dans les espaces de Minkowski généralisés ». PAUC CHR. 369.

— « Geometria proiettivo-differenziale delle singolarità: Il punto di flesso di una superficie qualunque ». POPA I. 147.

— « Sulla funzione $\delta(x)$ di Dirac ». Nota I. SCHÖNBERG M. 81.

— « Sulla funzione $\delta(x)$ di Dirac ». Nota II. ID. 151.

— « Sopra una classe di equazioni funzionali ». ID. 221.

— « Sulle funzioni di una variabile in una delle quattro algebre complesse commutative del 3° ordine ». SPAMPINATO N. 3.

Matematica. — « Su una possibile particolarità delle linee principali di una superficie ». Nota I. TERRACINI A. 84.

— « Su una possibile particolarità delle linee principali di una superficie ». Nota II. ID. 153.

— « Su una classe di funzioni convesse ». VINCENSINI P. 366.

— « Studio di una particolare funzione definita da un integrale improprio ». WATSON G. N. 91.

Meccanica. — « Sul moto non stazionario di un'ala di allungamento finito ». CICALA P. 97.

— « Sulla meccanica dei mezzi continui disgregati. CISOTTI U. 207.

— « Sorgenti in mezzi disgregati ». ID. 305.

— « Una particolare soluzione dinamica del problema cosmologico ». Nota I. FIORENTINI-CAMPOLIETI F. 319.

— « Una particolare soluzione dinamica del problema cosmologico ». Nota II. ID. 377.

— « Estensione del teorema di Jacobi sul viriale e riferimenti di minima energia cinetica ». LAMPARIELLO G. 266, 325.

— « Varietà sostanziali nel moto di un sistema continuo ». ID. 383.

— « Sulla impossibilità d'una stratificazione d'equilibrio omotetica per gli astri fluidi rotanti ». MINEO C. 260.

— « Le linee delle quantità di moto totali in correnti liquide permanenti gradualmente varie ». NEBBIA G. 433.

— « Sulla teoria dell'arco elastico a direttrice circolare ». Nota I. TRICOMI F. 388.

— « Sulla teoria dell'arco elastico a direttrice circolare ». Nota II. ID. 393, 440.

— « Sul calcolo dei ponti ad arco ad impalcato superiore ». VOLTERRA E. 335.

— « La cinématique du corps solide dans l'espace ordinaire à trois dimensions ». WOINAROSKY R. 263.

— « Sull'approssimazione dovuta al principio del De Saint-Venant nei solidi

prismatici isotropi ». ZANABONI O. 340.

Microbiologia. — « Studi sul genere *Tri-chosporon Behrend* ». PUNTONI V. 413.

Mineralogia. — « Analisi chimica del granito di Montorfano e del granito e della tormalina di Alzo ». GALLI-TELLI P. 193.

— « Calcite di "Madonna del Carmine" di Dorgali ». LAURO C. 25.

P

Parassitologia. — « Una specie asiatica di *Anopheles* rinvenuta in Etiopia. (" *A. dthali* PATTON,, 1905) ». Nota preventiva. CORRADETTI A. 412.

Personale Accademico. — 298, 430.

Presentazione di libri. — 298, 430.

Presentazione di note e memorie. — 298, 430.

R

Relazioni di commissioni. — 298, 430.

Relazioni su temi dati. — 299.

Z

Zoologia. — « Sulla origine della membrana peritrofica dell'intestino di *Reticulitermes lucifugus* (Rossi) ». PLATANIA E. 43.

